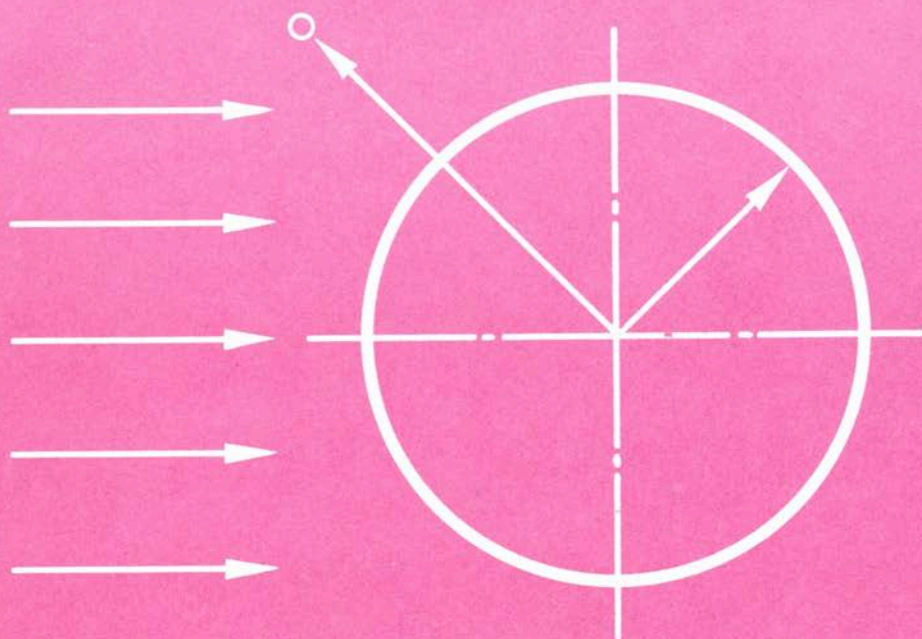


Введение в нелинейную гидро- упругость

М.А.Ильгамов



М.А. ИЛЬГАМОВ

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ГИДРОУПРУГОСТЬ



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1981

ББК 22.25

И45

УДК 539.3

Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 200 с. — ISBN 5-02-014281-6.

Излагаются основы нелинейной теории взаимодействия тонкостенных непроницаемых и проницаемых оболочек с идеальной и вязкой жидкостью. Формулируются необходимые условия на поверхности контакта сред и постановки задач гидроупругости. Рассматриваются разные способы описания взаимодействия оболочки с жидкостью, области их применения, приближенные условия контакта в частных случаях, в том числе линеаризованные условия, широко применяемые в классических задачах. Дается классификация задач гидроупругости. Приведенные примеры носят, главным образом, иллюстративный характер. По каждому способу дается краткий обзор литературы.

Для специалистов в области аэрогидромеханики, прочности, динамики, а также для аспирантов, преподавателей и студентов вузов.

Ил. 87. Табл. 1. Библиогр. 226 назв.

Рецензент доктор физико-математических наук *А.Г. Горшков*

И $\frac{1603040000-002}{053(02)-91}$ 50-91

ISBN 5-02-014281-6

© "Наука". Физматлит, 1991

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Г л а в а 1	
Некоторые сведения из механики сплошной среды	10
§ 1. Способы описания движения среды	10
§ 2. Способы описания взаимодействия сред	15
§ 3. Основные зависимости нелинейной теории тонких упругих оболочек	20
§ 4. Основные уравнения гидромеханики	23
§ 5. Условия на поверхностях сильных разрывов	27
Г л а в а 2	
Совместный эйлерово-лагранжев способ	29
§ 1. Кинематическое и динамические условия на контактной поверхности. Постановка задачи	30
§ 2. Приведение условий контакта на начальную поверхность	33
§ 3. Классификация задач гидроупругости	36
§ 4. Взаимодействие при сильном изгибе оболочки	39
§ 5. Взаимодействие при среднем изгибе оболочки	41
§ 6. Взаимодействие при слабом изгибе оболочки	44
Г л а в а 3	
Изгиб цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании жидкостью	47
§ 1. Слабый изгиб цилиндрической оболочки при ее поперечном безотрывном обтекании жидкостью	47
§ 2. Влияние разделения деформированной и недеформированной поверхности в контактных условиях	53
§ 3. Динамическое поведение оболочки в потоке	57
§ 4. Изгиб пологой цилиндрической панели в потоке	60
§ 5. Результаты исследования. Сравнение с экспериментом	64
§ 6. Сильный изгиб цилиндрической оболочки в потоке	68
§ 7. Динамическое поведение системы. Учет начального искривления оболочки	77
§ 8. Учет отрыва потока с поверхности оболочки	80
Г л а в а 4	
Взаимодействие проницаемой оболочки с потоком жидкости	85
§ 1. Условия на поверхности контакта	85
§ 2. Зависимости для скорости протекания и жесткости оболочки	89

§ 3. Частные случаи	95
§ 4. Изгиб цилиндрической оболочки в потоке несжимаемой жидкости . .	97
§ 5. Изгиб цилиндрической оболочки с сосредоточенной перфорацией . . .	104
Глава 5	
Взаимодействие между оболочкой и вязкой жидкостью	108
§ 1. Условия на поверхности контакта	108
§ 2. Перистальтическое движение	112
§ 3. Скорость продольного движения цилиндра в вязкой жидкости	114
§ 4. Краткий обзор исследований волнового способа продвижения тел. . .	117
Глава 6	
Единый лагранжев способ	121
§ 1. Специфика единого лагранжевого представления	122
§ 2. Постановка задачи. Условия на поверхности контакта	124
§ 3. Первый вариант условий.	128
§ 4. Второй вариант условий	132
Глава 7	
Применение единого лагранжевого способа	137
§ 1. Устойчивость упругой пластины между жидкостями разной плотности.	137
§ 2. Вынужденные колебания сжимаемой жидкости внутри жесткой трубы, закрытой упругой пластиной	142
§ 3. Нелинейные радиальные колебания цилиндрической оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью	145
§ 4. Взаимодействие при ударном нагружении	150
§ 5. Сильный изгиб стержня силой, зависящей от деформации упругой линии	153
§ 6. Ударное взаимодействие мягкой оболочки и газа	158
Глава 8	
Произвольный эйлерово-лагранжев способ	162
§ 1. Постановка задачи взаимодействия	162
§ 2. Сравнение решений задачи, сформулированной двумя способами . . .	164
§ 3. Движение вязкой жидкости, вызванное бегущей волной в пластине. .	167
§ 4. Жесткие подвижные препятствия в потоке газа.	170
§ 5. Взаимодействие упругой мембраны и потока газа	175
§ 6. Моделирование раскрытия купола в потоке.	180
Послесловие	184
Список литературы	186

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена нелинейной теории взаимодействия тонкостенных элементов конструкций с жидкостью и газом. Тонкостенные элементы в форме оболочки, панели и пластины при большой жесткости на растяжение могут относительно легко изгибаться и заметно изменять форму при нагружении. Это в свою очередь приводит к изменению поля скоростей и давлений в жидкости около тела и, следовательно, нагрузок на него.

Таким образом, нужно интегрировать уравнения движения сред и их решения сопрягать на деформирующейся контактной поверхности. Из сказанного ясно, что формулировка задач гидроупругости опирается на такие разделы механики, как кинематика и динамика деформируемой среды, гидромеханика и нелинейная теория оболочек. Поэтому читатель должен быть знаком с этими разделами.

В первой главе приводятся минимальные сведения из механики сплошной среды, нелинейной теории оболочек и гидромеханики. Она носит справочный характер.

Вторая и третья главы посвящены рассмотрению совместного эйлери-во-лагранжевого способа описания взаимодействия непроницаемой поверхности и идеальной жидкости и его применению при описании поведения цилиндрической оболочки в потоке.

Этот же способ применяется в четвертой главе в случае проницаемой поверхности и идеальной жидкости, а в пятой — в случае непроницаемой поверхности и вязкой жидкости.

В шестой и седьмой главах содержатся описание единого лагранжевого способа и его применение.

Обобщенный способ описания взаимодействия дается в последней, восьмой, главе.

Отметим, что приведенные конкретные примеры носят в основном методический характер и демонстрируют применение того или иного способа описания взаимодействия. При этом намеренно рассматриваются одни и те же примеры. Это, в частности, относится к задаче поперечного обтекания цилиндрической оболочки потоком идеальной несжимаемой жидкости.

Список литературы приводится по главам. Он не претендует на полноту. Указаны только те исследования, которые так или иначе использованы при написании книги.

В основу ее положены лекции по аэрогидроупругости, которые читались автором в Казанском университете.

Рукопись просмотрели и внесли свои предложения по улучшению изложения отдельных глав кандидаты физико-математических наук А.Н. Гильманов, Ж.М. Сахабутдинов, В.Л. Федяев, являющиеся авторами исследований, которые нашли отражение в книге. При ее подготовке большую помощь оказали старшие инженеры А.Н. Иванова и Л.Б. Газеева. Для издания книги весьма ценной была поддержка со стороны академика Н.С. Соломенко и профессора А.Г. Горшкова. Всем им автор приносит свою благодарность.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время гидроупругость, или теория взаимодействия деформируемого твердого тела с жидкостью и газом, представляет собой хорошо развитый раздел механики сплошной среды.

Особенно большие успехи имеются в решении вопросов о динамическом и статическом поведении несущей поверхности (крылового профиля) в потоке жидкости и газа. Эти задачи были поставлены еще на ранних стадиях развития авиационной техники. В дальнейшем они стали актуальными и в турбо- и компрессоростроении. Относящиеся сюда результаты освещены в монографиях и обзорных работах [1, 29, 39, 40, 42–44, 55–58]. Существенной является малая толщина профиля по сравнению с двумя другими размерами. Это обеспечивает применимость линейной теории течения жидкости около профиля. Часто принимаемое допущение о неизменности поперечного сечения позволяет рассматривать только изгиб и кручение его как балки. Эти особенности облегчают исследование поведения системы.

В настоящее время большое внимание уделяется также анализу аэрогидроупругих явлений при трансзвуковых скоростях, течениях с образованием каверн и при других нелинейных факторах гидродинамического характера. Элемент конструкции может иметь сложную внутреннюю структуру (композиты и т.д.).

Более сложные модели движения и взаимодействия приходится принимать при рассмотрении поведения упругих пластин, панелей и оболочек в потоке [2, 3, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 35, 47, 50–54]. Это диктуется как более сложной формой их деформирования, так и ориентацией по отношению к направлению невозмущенного потока (например, упругая панель находится под большим углом атаки).

В этих задачах также учитывается малая толщина стенки, в частности, при сопряжении решений для двух сред контактная поверхность отождествляется со срединной поверхностью. Применяется сведение деформированной срединной поверхности к исходной, что допустимо при прогибах, не сильно превышающих толщину стенки. При этом ограничения должны быть наложены также на поле течения. Подробно изучен сверхзвуковой панельный флаттер с применением закона плоских сечений ("поршневой" теории). Нелинейность учитывалась в основном при описании динамики панели.

Гидроупругость плохообтекаемых элементов конструкций рассмотрена в работах [22, 26, 27, 38, 41]. Здесь существенным является режим обтекания, связанный с безотрывностью или отрывом потока с поверхности тела. Моделирование отрыва потока с поверхности тела представляет большие трудности, и до сих пор нет удовлетворительных результатов в этом направлении. Особенно это относится к исследованию взаимодействия в условиях нестационарного отрыва.

Тесно примыкает к этим вопросам весьма сложная задача о динамическом поведении мягких оболочек в потоке жидкости и газа. Здесь в силу больших изменений формы тела (перемещения — одного порядка по сравнению с основными линейными размерами) могут происходить кардинальные изменения картины течения. Возникает также необходимость учета проницаемости оболочки, зависящей в основном от степени перфорации стенки и перепада давления с двух ее сторон. Решение прикладных задач в этом направлении возможно только на основе самых мощных численных методов.

Другой круг исследований включает в себя описание колебаний и распространения волн в оболочке, находящейся в жидкости или содержащей жидкость (газ) [4, 25, 37, 45, 48, 49]. Сюда относится также анализ динамических явлений в камерах сгорания и всевозможных реакторах. Отметим, что работы по распространению волн в трубопроводе по времени выполнения являются первыми исследованиями в аэрогидроупругости.

Определению динамической реакции конструкции на падение волны давления, распространяющейся в жидкости и газе, также посвящено большое количество изданий [5–7, 10, 11, 13, 15–17, 19, 20, 23, 24, 28, 30–34, 36, 46]. Определяются отраженные от тела волны, упругая устойчивость и несущая способность оболочек разной формы (цилиндр, сфера, их сочетания и т.д.). Взаимодействие, сопровождаемое большими пластическими деформациями, осуществляется в процессах гидродинамической штамповки тонкостенных изделий.

Из этого краткого обзора основных обобщающих работ видно, сколь обширным и разнообразным является предмет гидроупругости. Однако подавляющее большинство указанных изданий посвящено линейной теории взаимодействия. В том случае, когда учитываются нелинейности, это относится главным образом к описанию деформации конструкции, что объясняется тем, что во многих случаях определяющими являются геометрические нелинейности в упругом тонкостенном теле. Редко учитывается нелинейное движение жидкости, вызванное деформацией конструкции.

Постановка задач с привлечением нелинейностей также в контактных условиях и их решение в указанных выше работах затрагиваются мало. Более полному учету нелинейностей при различных ограничениях и предположениях посвящены лишь исследования [2, 9, 11, 21, 54].

Во всех работах характерным является рассмотрение малых изменений формы деформируемой непроницаемой поверхности.

Отметим следующие особенности этой книги.

1. Дается полностью нелинейная постановка задачи гидроупругости. Это позволяет рассматривать новые задачи, в частности с большим изме-

нением формы деформируемого тела, и обоснованно получать упрощенные соотношения.

2. Излагаются все в достаточной мере разработанные к настоящему времени способы описания взаимодействия (эйлерово-лагранжев, единый лагранжев, обобщенный способы). Это сделано с единых позиций. Поверхность контакта оболочки и жидкости трактуется как сильный разрыв параметров среды. Этот подход является более общим и обоснованным, чем известное кинематическое условие Лагранжа для непроницаемой поверхности.

3. Дана классификация задач гидроупругости и система упрощений их в зависимости от меры перемещения упругого тела, изменяемости поля его деформаций, поля скорости и давления в жидкости.

4. Особое внимание уделяется анализу точности условий на контактной поверхности. Обычно при формулировке контактных условий деформированная поверхность отождествляется с недеформированной. Так поступают, например, в классической теории флаттера несущей поверхности. В большинстве случаев это оправдано. Однако указанное отождествление иногда может приводить к качественно неверным результатам или к количественным ошибкам.

5. Дается формулировка задачи взаимодействия и методические примеры в случае проницаемой поверхности. Этот класс задач важен для описания поведения перфорированных моментных оболочек, разворачивания и функционирования в потоке тканевых полотнищ с их естественной и искусственной проницаемостью и т.д.

6. Рассматривается взаимодействие конструкции с вязкой жидкостью. В качестве примера разбирается эффект среднего движения тела при деформации его поверхности в режиме бегущей волны. Показано, что обычное отождествление деформированной и недеформированной поверхностей при этом приводит к качественно неверному результату.

Таким образом, в этой книге более полно, чем это делалось ранее, учитываются нелинейные факторы.

Количество исследований, выполненных с помощью аналитических и численных методов, различно при формулировании задачи взаимодействия разными способами. В совместном эйлерово-лагранжевом способе больше аналитических расчетов, в едином лагранжевом и обобщенном способах — численного моделирования. Можно предположить, что эта тенденция в нелинейной гидроупругости сохранится и в ближайшее время.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ
ИЗ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Поскольку в гидроупругости рассматривается совместное движение жидкости и твердого деформируемого тела и их взаимодействие, то описание их базируется на общих положениях механики сплошной среды. Гидроупругость можно рассматривать как наиболее богатый раздел механики сплошной среды с точки зрения демонстрации общих ее принципов, способов описания движения деформируемого тела.

В общей части механики сплошной среды подробно рассматриваются переходы между способами описания движения с точек зрения Эйлера и Лагранжа [3, 6]. Однако при решении задач механики твердого деформируемого тела пользуются только переменными Лагранжа, а в гидромеханике — преимущественно переменными Эйлера [4, 5]. В гидроупругости часто приходится пользоваться обоими способами описания движения, так как формулировка условий на поверхности контакта жидкости и упругого тела содержит обе системы переменных. Здесь требуется более детальное знание особенностей способов описания движения и переходов между ними, чем в классических разделах механики.

В настоящей главе приводятся некоторые сведения, соотношения и уравнения, на которые в дальнейших главах неоднократно будут делаться ссылки.

§ 1. Способы описания движения среды

В способе описания движения Эйлера координаты x_1, x_2, x_3 закрепляются в пространстве, и в фиксированных его точках с течением времени определяются параметры среды (скорость, ускорение, деформация, напряжение, давление и т.д.). Координаты x_1, x_2, x_3 и время t называются *переменными Эйлера*.

Указанные координаты в начальный момент $t = 0$, обозначим через x_1^0, x_2^0, x_3^0 или $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. При движении среды ($t > 0$) для фиксированной ее точки они сохраняют свои численные значения. Координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и время t называются *переменными Лагранжа*. В этом способе описания движения параметры определяются в индивидуализированных, фиксированных точках среды.

Для наглядности рассмотрим изгиб тонкого нерастяжимого стержня, вдоль которого отложена лагранжева координатная линия $\alpha_1 = \alpha$. В исход-

ном прямолинейном состоянии ($t = 0$) на его поверхности нанесены метки в точках $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ (рис. 1.1, а).

Пусть при $t > 0$ стержень принимает форму полуокружности с радиусом R . При этом координатная линия α искривляется. Численные значения $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ сохраняются, хотя положение их в пространстве изменилось. Если в первоначальный момент значения эйлеровых координат равнялись $x_1 = \alpha, x_2 = 0$, то при $t > 0$, как видно из рис. 1.1, б

$$x_1 = R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{R} \right), \quad x_2 = R \sin \frac{\alpha}{R}. \quad (1.1)$$

При дальнейшем изгибе стержня концы его можно совместить. Таким образом, с одной точкой пространства совпадут две точки тела с лагранжевыми координатами α^0 и α^3 .

Здесь проявляется важнейшее свойство лагранжевых координатных линий искривляться вместе со средой при ее деформации. Эта система координат вмерзана в тело; поэтому о ней говорят как о материальной системе и как о *сопутствующей системе координат*.

В общем случае движения трехмерной среды вместо (1.1) закон движения имеет вид

$$x_i = x_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.2)$$

Разрешив (1.2) относительно координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, получим

$$\alpha_i = \alpha_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.3)$$

Скорость и ускорение фиксированной частицы среды относительно эйлеровой системы координат вычисляются по формулам

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_{\alpha_i}, \quad \mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\alpha_i},$$

где $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3, t)$ — радиус-вектор частицы, индексы α_i указывают на то, что производные вычисляются при постоянных значениях лагранжевых координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (т.е. для рассматриваемой частицы).

Индивидуальная производная по t от скалярной функции $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$, зависящей от переменных Лагранжа, равна $(\partial f / \partial t)_{\alpha_i}$. Если функция задана в переменных Эйлера $f(x_1, x_2, x_3, t)$, то, учитывая, что согласно (1.2) $f[x_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t), \dots]$, найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\alpha_i} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{\alpha_i} + \dots = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{x_i} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

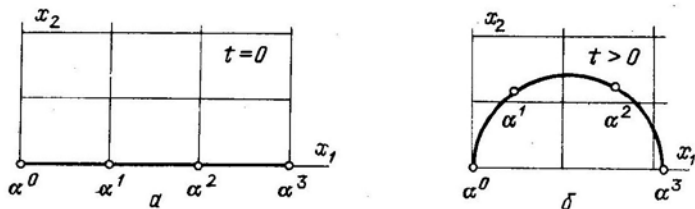
Заметим, что $(\partial f / \partial t)_{\alpha_i}$ рассматривается обычно как полная производная df/dt , а $(\partial f / \partial t)_{x_i}$ — как частная производная $\partial f / \partial t$. Можно говорить также о производной $df/dt = (\partial f / \partial t)_{\alpha_i} = \partial f / \partial t$ как о "лагранжевой" производной

по времени, а о $(\partial f / \partial t)_{x_i} = \partial f / \partial t$ — как об "эйлеровой" производной по времени (в дальнейшем кавычки опускаем).

Рассмотрим производные по одной из пространственных координат. Запишем уравнение неразрывности и уравнение движения идеальной сжимаемой жидкости в переменных Эйлера в одномерном случае ($x_1 = x$, $\alpha_1 = \alpha$):

$$\begin{aligned} (\partial \rho / \partial t)_x + \partial(\rho v) / \partial x &= 0, \\ \rho(\partial v / \partial t)_x + \rho v \partial v / \partial x + \partial p / \partial x &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Перейдем от них к уравнениям в переменных Лагранжа. Здесь $(\partial \rho / \partial t)_x$,



Р и с. 1.1. Лагранжева координатная линия вдоль тонкого стержня

$(\partial v / \partial t)_x$ представляют собой изменение ρ и v по времени в фиксированной точке пространства. Они связаны с производными по времени в фиксированной движущейся частице $(\partial f / \partial t)_\alpha$ зависимостью (1.4) $(\partial f / \partial t)_x = (\partial f / \partial t)_\alpha - v \partial f / \partial x$. Поэтому уравнения (1.5) приводятся к виду

$$\begin{aligned} (\partial \rho / \partial t)_\alpha + \rho \partial v / \partial x &= 0, \\ \rho(\partial v / \partial t)_\alpha + \partial p / \partial x &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где остается записать вторые члены в производных по α .

Вводя перемещение u фиксированной частицы жидкости, вместо (1.2) запишем

$$x = \alpha + u(\alpha, t). \quad (1.7)$$

Имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Входящие сюда производные $\partial \alpha / \partial x$, $\partial v / \partial \alpha$ определяются из (1.7):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial(x - u)}{\partial x} = 1 - \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial t}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \alpha} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial t} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^{-1}. \quad (1.8)$$

Учитывая также, что лагранжевы производные по времени равны

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_\alpha = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_\alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

(1.6) приводим к виду

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial t} &= 0, \\ \rho \left(1 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Эти уравнения (неразрывности и движения в переменных Лагранжа) можно привести к одному. Поделим первое из них на $\rho(1 + \partial u/\partial \alpha)$ и проинтегрируем по t . Приравняв константу интегрирования значению плотности невозмущенной жидкости ρ_0 , находим

$$(1 + \partial u/\partial \alpha)\rho = \rho_0. \quad (1.10)$$

Тогда уравнение движения принимает вид

$$\rho_0 \partial^2 u / \partial t^2 + \partial p / \partial \alpha = 0.$$

Если учесть адиабатический закон

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma, \quad (1.11)$$

то можно получить одно нелинейное уравнение относительно перемещения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a_0^2}{(1 + \partial u/\partial \alpha)^{\gamma+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (1.12)$$

В случае малых деформаций и перемещений среды эйлеровы и лагранжевы координаты могут быть отождествлены. При этом справедливой становится линеаризация соотношений. В частности, элементарным становится выполнение взаимного перехода между линеаризованными уравнениями (1.5) и (1.12).

В обобщенном способе описания движения координатная система может быть произвольной, скорость движения ее не совпадает со скоростью среды. Подвижные координаты $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ вводятся аналогично (1.2), (1.3):

$$x_i = x_i(\beta_1, \beta_2, \beta_3, t), \quad \beta_i = \beta_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.13)$$

Некоторые особенности этого способа будут рассмотрены в следующем параграфе. Здесь ограничимся выводом одномерных уравнений в подвижной системе $\beta_1 = \beta$, соответствующих (1.5), (1.6), (1.9).

Физический смысл первого уравнения (1.5) состоит в том, что за время dt в неподвижном объеме $1 \cdot dx$ изменение массы $(\partial \rho / \partial t)_x dx dt$

происходит за счет притока массы $\rho v dt$ через границу x и оттока $[\rho v + (\partial \rho v / \partial x) dx] dt$ через границу $x + dx$. В системе β , t изменение массы $(\partial \rho / \partial t)_\beta dt dx$ в контрольном движущемся со скоростью $v_0(x, t)$ объеме происходит как за счет изменения этого объема $\rho (\partial v_0 / \partial x) dt dx$, так и суммы притока и оттока массы через подвижные границы

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho (v - v_0)] dx dt.$$

Поэтому уравнение сохранения массы приобретает вид

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_\beta + \rho \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho (v - v_0)] = 0. \quad (1.14)$$

Аналогично вместо второго уравнения (1.5) имеем

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_\beta + \rho (v - v_0) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (1.15)$$

Отметим, что (1.14), (1.15) могут быть получены из (1.5) и (1.6) применением к ним соответственно операторов

$$\begin{aligned} (\partial / \partial t)_\beta &= (\partial / \partial t)_x + v_0 (\partial / \partial x), \\ (\partial / \partial t)_\beta &= (\partial / \partial t)_\alpha + (v_0 - v) (\partial / \partial x), \end{aligned} \quad (1.16)$$

смысл которых ясен из сказанного ранее о производных по времени.

В (1.14), (1.15) можно переходить к производным по β по формулам (1.8), в которых вместо α нужно принять β . То же самое получим, умножая их на $dx / d\beta$ и принимая во внимание, что $(dx / d\beta)(\partial / \partial x) = \partial / \partial \beta$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_\beta \frac{\partial x}{\partial \beta} + (v - v_0) \frac{\partial \rho}{\partial \beta} + \rho \frac{\partial v}{\partial \beta} &= 0, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_\beta \frac{\partial x}{\partial \beta} + (v - v_0) \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь вместо $dx / d\beta$ можно подставить $(1 + \partial u / \partial \beta)$, если в соответствии с (1.13) ввести соотношение $x = \beta + u(\beta, t)$.

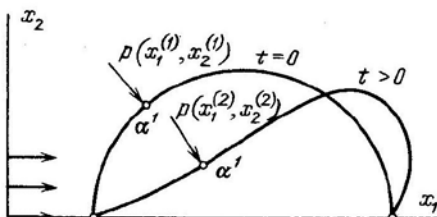
Если в частности координатная система неподвижна ($v_0 = 0$, $\beta = x$), т.е. совпадает с эйлеровой, то из (1.14), (1.15) и (1.17) следует система (1.5). Если она движется вместе со средой ($v_0 = v$, $\beta = \alpha$), т.е. совпадает с лагранжевой системой, то получается система (1.6).

Обычно в уравнениях (1.5), (1.6), (1.12), (1.14), (1.15), (1.17) нижние индексы x , α , β у производных $(\partial \rho / \partial t)$, $(\partial v / \partial t)$ не пишутся. Однако эти производные имеют неодинаковые значения. В (1.5) они означают изменение параметров по времени в фиксированной точке пространства, а (1.6), (1.12) — в движущейся индивидуальной частице среды, в (1.14), (1.15), (1.17) — в фиксированной точке произвольно движущейся системы координат.

§ 2. Способы описания взаимодействия сред

Рассмотрим способы описания взаимодействия гибкой тонкостенной оболочки и идеальной жидкости. В силу тонкости стенки поверхность контакта с жидкостью отождествляем с ее срединной поверхностью. Так как в теории оболочек применяются переменные Лагранжа, а в гидромеханике — главным образом переменные Эйлера, то в задаче взаимодействия естественно пользоваться этими традиционными способами, сопрягая решения на поверхности контакта. Такой способ описания взаимодействия будем называть *совместным эйлерово-лагранжевым*¹⁾.

Рис. 1.2. Изгиб тонкой оболочки в потоке жидкости



Пусть оболочка находится в потоке жидкости (рис. 1.2). Фиксированная точка поверхности с лагранжевой координатой α^1 , совпадающая при $t = 0$ с точкой $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ пространства, в результате деформации ($t > 0$) приходит в точку $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ пространства.

Уравнения движения оболочки составляются для движущегося фиксированного элементарного объема в точке α^1 проектированием всех сил, действующих на этот объем, на подвижные оси

$$L_m^*(\alpha^1, t) = \delta_{2m} p(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, t) \quad (m = 1, 2). \quad (2.1)$$

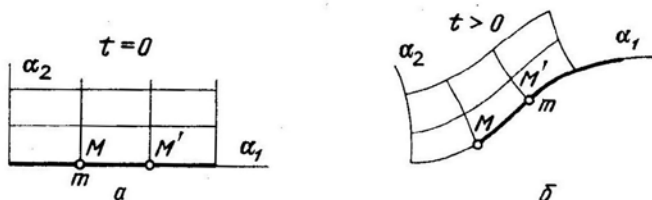
Здесь L_m^* — нелинейный дифференциальный оператор в переменных Лагранжа, а давление $p(x_1, x_2, t)$ — функция переменных Эйлера, $\delta_{21} = 0$, $\delta_{22} = 1$.

Так как точка $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ определяется из решения задачи, то, следовательно, давление нужно находить в неизвестной точке пространства, куда приходит точка поверхности с координатой α^1 . То же самое относится к определению скорости жидкости, значение которой нужно знать, чтобы удовлетворить тому или иному кинематическому условию на поверхности контакта. Таким образом, здесь заранее неизвестна граница области, в которой нужно находить решение задачи гидромеханики. В удовлетворении условий на движущейся поверхности контакта состоит одна из главных сложностей решения конкретных задач с помощью эйлерово-лагранжевого способа.

¹⁾ Совместный эйлерово-лагранжев способ описания взаимодействия и его применение в случае идеальной жидкости и непроницаемой оболочки рассматриваются в гл. 2, 3, в случае проницаемой поверхности — в гл. 4. Этот же способ для вязкой жидкости и непроницаемой оболочки приводится в гл. 5.

Ситуация несколько упрощается, если изгиб оболочки сравнительно мал, так что область, занятая жидкостью, изменяется в результате деформации контура не сильно. Тогда давление и скорость жидкости в точке $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ приближенно могут быть выражены через параметры, вычисляемые в известной точке $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, аналитическим продолжением функций и разложением их в ряды Тейлора.

Следует отметить, что во многих случаях при записи условий на поверхности контакта допустимо отождествление деформированной поверхности



Р и с. 1.3. Взаимное скольжение сред

с недеформированной, исходной. Это главным образом случаи малых изменений контура и малой изменчивости поля давлений и скоростей в жидкости. Так поступают, например, в классической теории дивергенции и флаттера несущих поверхностей.

К достоинствам способа можно отнести то, что во многих случаях могут быть использованы известные решения задачи из гидромеханики. Во всяком случае, они могут служить некоторым ориентиром при анализе задачи гидроупругости.

Если движение обеих взаимодействующих сред описываются переменными Лагранжа, то этот способ условно будем называть *единым лагранжевым*. При этом принимаем допущение о том, что частицы жидкости, прилегающие в начальный момент к поверхности контакта, остаются на ней и в последующем¹⁾.

В начальный момент времени $t = 0$ выделим две соседние граничные точки m оболочки и M жидкости (рис. 1.3, а). Они имеют лагранжеву координату α_1^1 . При $t > 0$ (рис. 1.3, б) эти точки по разным траекториям переходят в новые положения в пространстве. В результате взаимного скольжения сред они расходятся, однако имеют одно и то же значение лагранжевой координаты α_1^1 . В соприкосновение с точкой m оболочки приходит другая частица жидкости M' с лагранжевой координатой α_1^2 .

Так как в уравнение изгиба оболочки, составленное для ее элемента в движущейся точке m , входит давление со стороны жидкости, действующее на эту точку m , то (2.1) теперь принимает вид

$$L_m^*(\alpha_1^1, t) = \delta_{2m} p(\alpha_1^2, 0, t) \quad (m = 1, 2). \quad (2.2)$$

¹⁾ Единый лагранжев способ будет изложен в гл. 6, 7.

Если взаимное скольжение $\alpha_1^2 - \alpha_1^1$ мало по сравнению с размером, на котором происходит значительное изменение поля давления в жидкости (например, с длиной волны), то правая часть (2.2) приближенно может быть выражена через параметры в точке M жидкости с ее известной лагранжевой координатой α_1^1 . То же самое относится к кинематическому условию на поверхности контакта.

В отсутствие взаимного скольжения сред давление будет определяться в точке с координатой $(\alpha_1^1, 0)$. Кинематическое условие независимо от величины перемещений точек m и M от начального положения сред будет

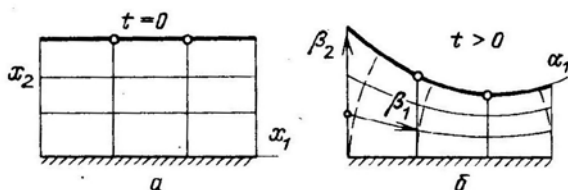


Рис. 1.4. Подвижная координатная система

линейным, а именно сведется к равенству скоростей или перемещений точек m и M .

Таким образом, в едином лагранжевом способе частично устраняется недостаток предыдущей процедуры удовлетворения условиям на поверхности контакта. В эйлерово-лагранжевом способе краевая задача решается в области, изменяющейся во времени и заранее неизвестной, а в едином лагранжевом — в области, не изменяющейся во время протекания процесса (в координатах α_1, α_2). Например, на рис. 1.3 граница имеет координату $\alpha_2 = 0$ во все время движения. Но в переменных Лагранжа уравнения гидромеханики сложнее, чем в переменных Эйлера. Исключение составляет одномерный случай (1.12). Другой недостаток состоит в усложнении условий контакта в случае значительного взаимного скольжения сред. Поэтому о целесообразности применения того или иного способа описания нужно судить, исходя из конкретной задачи. Во многих случаях удобство удовлетворения условиям контакта может перевесить сложность самих уравнений движения в пользу единого лагранжевого способа описания взаимодействия. Так что обычные оценки, справедливые в классической гидромеханике, здесь могут измениться.

Недостатки двух указанных процедур, относящиеся к условиям контакта, можно устранить введением подвижных координат в области, занятой жидкостью. Так приходим к способу, который будем называть *произвольным эйлерово-лагранжевым*. При этом движение оболочки по-прежнему описывается в переменных Лагранжа, а жидкости — в координатах, произвольно деформирующихся и движущихся в пространстве. В частности, когда эта координатная система неподвижна, мы приходим к рассмотренному выше совместному эйлерово-лагранжевому способу, когда же она движется вместе с жидкостью — к единому лагранжевому способу описания взаимодействия.

В качестве примера рассмотрим координатную сетку, показанную на рис. 1.4, *а*. Здесь верхняя граница жидкости контактирует с гибкой пластиной, а нижняя — с неподвижной жесткой стенкой. Координатные линии, обозначенные β_2 , могут растягиваться и сокращаться, оставаясь прямыми, причем расстояния между ними постоянны (рис. 1.4, *б*). Координатные линии β_1 совпадают на поверхности контакта с изогнутой линией пластины ($t > 0$) и по мере опускания к нижней стенке выпрямляются по определенному закону. Линии β_1 и β_2 хотя и напоминают, но не являются лагранжевыми и эйлеровыми координатами, так как первые не обязательно совпадают с линиями, состоящими из индивидуальных частиц жидкости, а вторые вслед за деформацией пластины удлиняются или укорачиваются (если, например, принять $\beta_2 = \beta_2^0 = \text{const}$ для верхней границы).

Указанная координатная система позволяет упростить условия контакта, если пластина деформируется так, что фиксированные точки ее движутся только вертикально вдоль линий β_2 . Однако изгиб реальной пластины сопровождается изменением расстояний между указанными точками по горизонтали. Чтобы исключить взаимное скольжение между лагранжевыми координатами α_1 пластины и координатами в области, занятой жидкостью, на поверхности контакта нужно принимать $\beta_1 = \alpha_1$. При этом линии β_2 могут оставаться как прямыми (но расстояния между ними будут меняться в соответствии с изгибанием пластины), так и быть подвижными криволинейными.

Уравнения (2.1) и (2.2) приобретают наиболее простой вид

$$L_m^*(\alpha_1, t) = \delta_{2m} p(\alpha_1, t). \quad (2.3)$$

То же самое можно сказать о кинематическом условии контакта.

Относительно координатных линий β_1 , β_2 могут быть поставлены и другие требования. К ним относятся ортогональность (штриховые линии на рис. 1.4, *б*), сгущение в области больших градиентов решений, что особенно важно при применении численных методов, и т.д.

Упрощение в условиях контакта достигается ценой усложнения уравнений движения жидкости. Изменение их покажем на примере уравнения Лапласа относительно потенциала скорости φ , которым описывается потенциальное движение несжимаемой идеальной жидкости (см. § 4 настоящей главы),

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь x_1 , x_2 — прямоугольные эйлеровы координаты. Гидродинамическое давление определяется по формуле Бернулли

$$p = p_0 - \rho_0 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 \right]. \quad (2.5)$$

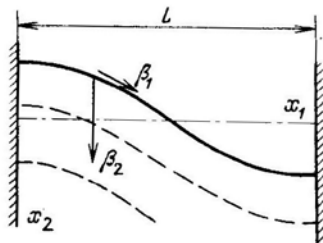
Рассмотрим колебания несжимаемой идеальной жидкости бесконечной глубины между плоскостями $x_1 = 0$, $x_1 = L$ (рис. 1.5). Начало координат x_1 , x_2 находится на невозмущенной поверхности. Деформируемые

координаты β_1, β_2 свяжем с поверхностью волны ($\beta_2 = 0$):

$$x_1 = \beta_1, \quad x_2 = \beta_2 + u_2(\beta_1, 0, t). \quad (2.6)$$

Здесь для простоты преобразований функцию u_2 принимаем не зависящей от глубины жидкости. В случае ограниченной глубины жидкости требуется вводить затухающую по β_2 функцию $u_2(\beta_1, \beta_2, t)$. Обращение в нуль функции $u_2(\beta_1 = x_1, \beta_2 = x_2)$ на плоском жестком дне упрощает удовлетворение соответствующего граничного условия ($\partial\varphi/\partial\beta_2 = 0$).

Рис. 1.5. Система координат, связанная с поверхностью жидкости



Первые производные $\partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2$ вычисляются аналогично (1.8). В составе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1} \frac{\partial\beta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2} \frac{\partial\beta_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_1}$$

с учетом (2.6) имеем $\partial\beta_1/\partial x_1 = 1, \partial\beta_2/\partial x_1 = -\partial u_2/\partial\beta_1, \partial t/\partial x_1 = 0$. Продолжаем то же самое с $\partial\varphi/\partial x_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} &= \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1} - \frac{\partial u_2}{\partial\beta_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} &= \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким же образом вычисляются $\partial^2\varphi/\partial x_1^2, \partial^2\varphi/\partial x_2^2$. Производная по времени $(\partial\varphi/\partial t)_{x_1, x_2}$, входящая в (2.5), равна

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{x_1, x_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1} \frac{\partial\beta_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2} \frac{\partial\beta_2}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t},$$

или с учетом (2.6) $\partial\beta_1/\partial t = 0, \partial\beta_2/\partial t = -\partial u_2/\partial t$ и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{x_1, x_2} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\beta_1, \beta_2} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2}. \quad (2.8)$$

Эта формула может быть получена также из (1.4).

Следовательно, уравнения (2.4), (2.5) приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_2^2} - 2 \frac{\partial u_2}{\partial \beta_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_2^2} = 0, \quad (2.9)$$

$$p = p_0 - \rho_0 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1} - \frac{\partial u_2}{\partial \beta_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2} \right)^2 \right].$$

Уравнения движения жидкости в подвижных координатах приводятся в § 4 настоящей главы, а применение произвольного эйлера-лагранжева способа рассматривается в гл. 8.

§ 3. Основные зависимости нелинейной теории тонких упругих оболочек

Приведем краткие сведения [5] из теории упругих оболочек, построенной в предположении, что деформациями и относительной толщиной оболочки можно пренебречь по сравнению с единицей, т.е. при выполнении условий

$$hk/2 \leq \epsilon_p \ll 1, \quad \epsilon \leq \epsilon_p, \quad h/R \ll 1,$$

где ϵ_p — предел пропорциональности материала оболочки, h — толщина стенки, R — наименьший из радиусов кривизны срединной поверхности оболочки, ϵ — наибольшее значение относительных удлинений и угла сдвига ϵ_{ij} , κ — наибольшее значение изменений кривизны и кручения κ_{ij} . На значения перемещений ограничения в общем случае не накладываются. При этом применяется гипотеза Кирхгофа — Лява, согласно которой нормаль к срединной поверхности σ до деформации остается нормалью и к деформированной поверхности, а также нормальные напряжения, перпендикулярные к σ , малы по сравнению с напряжениями, касательными к поверхностям, параллельным σ .

Перемещения точек срединной поверхности определяются вектором

$$u = u_1 k_1 + u_2 k_2 + u_3 k_3, \quad (3.1)$$

где k_1, k_2, k_3 — орты, направленные по ортогональным криволинейным лагранжевым координатным линиям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Орты k_1, k_2 лежат в плоскости, касательной к срединной поверхности оболочки до деформации, k_3 направлен по внешней нормали. Единичные векторы по координатным линиям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ деформированной срединной поверхности k_1^*, k_2^*, k_3^* выражаются через k_1, k_2, k_3 формулами [5]

$$\begin{aligned} k_1^* &= (1 + e_{11})k_1 + e_{12}k_2 + \omega_1 k_3, \\ k_2^* &= e_{21}k_1 + (1 + e_{22})k_2 + \omega_2 k_3, \\ k_3^* &= F_1 k_1 + E_2 k_2 + E_3 k_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{H_1 \partial \alpha_1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + k_{11} u_3, \\ e_{12} &= \frac{\partial u_2}{H_1 \partial \alpha_1} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + k_{12} u_3, \\ \omega_1 &= \frac{\partial u_3}{H_1 \partial \alpha_1} - k_{11} u_1 - k_{12} u_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Остальные выражения (e_{22} , e_{21} , ω_2) получаются отсюда перестановкой индексов 1 и 2. В (3.3) k_{ij} — кривизны координатных линий α_1 , α_2 и кручение, H_1 , H_2 — коэффициенты Ляме. Величины E_i имеют вид

$$\begin{aligned} E_1 &= e_{12} \omega_2 - (1 + e_{22}) \omega_1, \\ E_2 &= e_{21} \omega_1 - (1 + e_{11}) \omega_2, \\ E_3 &= (1 + e_{11})(1 + e_{22}) - e_{12} e_{21}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ввиду малости относительных удлинений и сдвига и тонкости стенки векторы k_1^* , k_2^* , k_3^* остаются ортогональными. Смысл величин e_{ij} , ω_i , E_i виден из формул

$$\begin{aligned} k_i^* k_i &= \cos(k_i^* k_i) = 1 + e_{ii}, \\ \cos(k_i^* k_j) &= e_{ij} \quad (i \neq j), \quad \cos(k_i^* k_3) = \omega_i, \\ \cos(k_3^* k_i) &= E_i, \quad \cos(k_3^* k_3) = E_3, \end{aligned}$$

получающихся из (3.2) скалярным умножением на k_i . Следовательно, параметры e_{ij} , ω_i , E_i характеризуют углы поворота ортов в процессе деформации оболочки.

Относительные удлинения и сдвиги равны

$$\epsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} (e_{11}^2 + e_{12}^2 + \omega_1^2), \quad (3.5)$$

$$2\epsilon_{12} = e_{12} + e_{21} + e_{11} e_{21} + e_{22} e_{12} + \omega_1 \omega_2,$$

а изменения кривизн —

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= k_{11} e_{22} - k_{12} e_{21} - \frac{1}{H_1} \left(E_1 \frac{\partial e_{11}}{\partial \alpha_1} + E_2 \frac{\partial e_{12}}{\partial \alpha_1} + E_3 \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} \right) - \\ &\quad - \frac{\omega_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1}, \\ \kappa_{12} &= k_{12} e_{11} - k_{11} e_{21} - \frac{1}{H_1} \left(E_1 \frac{\partial e_{21}}{\partial \alpha_1} + E_2 \frac{\partial e_{22}}{\partial \alpha_1} + E_3 \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1} \right) + \\ &\quad + \frac{\omega_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Формулами (3.5) характеризуются изменения размеров элемента срединной поверхности, а (3.6) — его искривление.

Внутренние усилия и моменты связаны с ϵ_{ij} , κ_{ij} соотношениями

$$\begin{aligned} N_{11} &= B(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}), \quad N_{12} = B(1 - \nu)\epsilon_{12}, \quad \left(B = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \right), \\ M_{11} &= D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}), \quad M_{12} = D(1 - \nu)\kappa_{12}, \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где B , D — жесткости на растяжение-сжатие и на изгиб, E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Неприведенные величины получаются из (3.5)–(3.7) перестановкой индексов 1 и 2.

Уравнения движения могут быть представлены в скалярной форме в проекциях на оси α_1 , α_2 , α_3 в деформированном состоянии оболочки (орты k_1^* , k_2^* , k_3^*) и в начальном ее положении (орты k_1 , k_2 , k_3). Отмечая компоненты усилий и моментов в первом случае звездочками сверху (N_{11}^* , ...), имеем [5]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(H_2^* N_{11}^*)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(H_1^* N_{21}^*)}{\partial \alpha_2} + N_{12}^* \frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_2} - N_{22}^* \frac{\partial H_2^*}{\partial \alpha_1} + \\ &+ H_1 H_2 (Q_1^* k_{11}^* + Q_2^* k_{12}^* + X_1^*) = 0, \\ &\frac{\partial(H_1^* N_{22}^*)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(H_2^* N_{12}^*)}{\partial \alpha_1} + N_{21}^* \frac{\partial H_2^*}{\partial \alpha_1} - N_{11}^* \frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_2} + \\ &+ H_1 H_2 (Q_2^* k_{22}^* + Q_1^* k_{12}^* + X_2^*) = 0, \\ &\frac{\partial(H_2 Q_1^*)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(H_1 Q_2^*)}{\partial \alpha_2} - H_1 H_2 (N_{11}^* k_{11}^* + N_{22}^* k_{22}^* + \\ &+ 2N_{12}^* k_{12}^* - X_3^*) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь X_i^* — проекции внешних массовых и поверхностных сил,

$$k_{ij}^* = k_{ij} + \kappa_{ij}, \quad H_i^* = H_i(1 + \epsilon_{ii}). \quad (3.9)$$

В некоторых членах (3.8) сохранены коэффициенты H_i^* , хотя $\epsilon_{ii} \ll 1$.

Это сделано потому, что при замене H_i^* коэффициентами H_i в отдельных случаях может происходить потеря точности [5].

Уравнения моментов имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(H_2 M_{11}^*)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(H_1 M_{21}^*)}{\partial \alpha_2} + M_{12}^* \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - M_{22}^* \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - H_1 H_2 Q_1^* = 0, \\ &\frac{\partial(H_1 M_{22}^*)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(H_2 M_{12}^*)}{\partial \alpha_1} + M_{21}^* \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - M_{11}^* \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - H_1 H_2 Q_2^* = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Проекции главного вектора и главного момента, внешних сил на оси до деформации (орты k_1 , k_2 , k_3) будем обозначать через N_{ij} , Q_i , M_{ij} , X_i .

Соответствующие уравнения движения имеют тот же вид (3.8), (3.10), если в последних вместо N_{ij}^* , M_{ij}^* , Q_i^* , H_i^* , k_{ij}^* , X_i^* взять эти величины без звездочек.

Между этими проекциями имеется очевидная связь

$$k_1 N_{11} + k_2 N_{12} + k_3 Q_1 = k_1^* N_{11}^* + k_2^* N_{12}^* + k_3^* Q_1^*,$$

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3 = k_1^* X_1^* + k_2^* X_2^* + k_3^* X_3^*, \dots$$

Поэтому в соответствии с (3.2) имеется, например, равенство

$$X_1 = (1 + e_{11}) X_1^* + e_{12} X_2^* + e_{13} X_3^*.$$

§ 4. Основные уравнения гидромеханики

Приведем эти уравнения как в неподвижных в пространстве координатах, так и в подвижных. Сначала выпишем уравнения сохранения массы, количества движения и энергии в интегральной форме [3, 6].

Обозначим через ρ , i , $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{p}_n$ плотность, удельную внутреннюю энергию, векторы скорости, массовых и поверхностных сил; через V — произвольный подвижный деформируемый объем, состоящий из одних и тех же частиц жидкости; через Σ — поверхность, окружающую этот объем. Имеет место следующая формула дифференцирования интеграла, взятого по подвижному объему:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V f(x_1, x_2, x_3, t) dV &= \int_V \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_x + \nabla(\mathbf{v}f) \right] dV, \\ \nabla &= \frac{a_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где h_1 , h_2 , h_3 — коэффициенты Ляме; индекс x в правой части указывает на эйлерову производную по времени.

Законы сохранения массы, количества движения и энергии для индивидуального объема V имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV &= \int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\Sigma, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} v^2 + i \right) dV = \int_V \rho \mathbf{F} \mathbf{v} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n \mathbf{v} d\Sigma.$$

В случае идеальной жидкости $\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$, где $p > 0$ — давление. При рассмотрении непрерывного движения жидкости массовые силы будем принимать равными нулю ($\mathbf{F} = 0$).

В результате применения (4.1) и формулы Гаусса получаем из (4.2) дифференциальные уравнения, описывающие непрерывное движение

идеальной жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla i + \frac{p}{\rho} \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (4.5)$$

Последнее из них равносильно уравнению

$$\partial \tilde{\sigma} / \partial t + \mathbf{v} \nabla \tilde{\sigma} = 0, \quad (4.6)$$

вытекающему из первого закона термодинамики и (4.5). Здесь $\tilde{\sigma}$ — энтропия. Из (4.6) следует, что при непрерывном движении жидкости энтропия сохраняется в движущейся индивидуальной частице.

Замыкающим систему (4.3)–(4.5) является уравнение состояния

$$p = f(\rho, \tilde{\sigma}). \quad (4.7)$$

Для баротропных процессов (4.7) имеет вид $p = f(\rho)$, в частности

$$p/p_{\infty} = (\rho/\rho_{\infty})^{\gamma}, \quad (4.8)$$

где γ — коэффициент адиабаты, $p_{\infty}, \rho_{\infty}$ — значения давления и плотности в бесконечно удаленной точке.

Второй член в (4.4) может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}.$$

Для безвихревых движений ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$), вводя потенциал скорости

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi \quad (\mathbf{v}_{\infty} = \nabla \varphi_{\infty}), \quad (4.9)$$

систему (4.3), (4.4), (4.8) можно привести к виду ($a_{\infty}^2 = \gamma p_{\infty} / \rho_{\infty}$)

$$a^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi \nabla) \right] (\nabla \varphi)^2, \\ a^2 = a_{\infty}^2 - (\gamma - 1) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi_{\infty})^2 \right], \quad (4.10)$$

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{a_{\infty}^2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi_{\infty})^2 \right] \right\}^{\gamma / \gamma - 1}. \quad (4.11)$$

В случае идеальной несжимаемой жидкости ($\rho = \rho_{\infty} = \text{const}$, $\gamma = \infty$, $a_{\infty} = \infty$) из (4.10) и (4.11) получаем

$$\nabla^2 \varphi = 0, \\ p = p_{\infty} - \rho_{\infty} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi_{\infty})^2 \right]. \quad (4.12)$$

В данной книге учет вязкости проводится только в случае несжимаемой жидкости. При этом движение описывается уравнениями [3]

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} &= - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где μ_0 — коэффициент вязкости.

Уравнения движения сжимаемой идеальной жидкости в произвольно деформирующейся системе координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно неподвижной в пространстве эйлеровой системы x_1, x_2, x_3 , выводятся аналогично (4.3)–(4.5). Теперь вместо подвижного объема V , состоящего из одних и тех же частиц жидкости и, следовательно, движущегося вместе с лагранжевой системой координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, введем контрольный объем V_0 , движущийся вместе с координатной системой $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Изменение массы в этом объеме за единицу времени

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV_0$$

в отличие от (4.2) не равно нулю, а равно разности притока и оттока массы из контрольного объема V_0 через его границы Σ_0 за то же время

$$-\int_{\Sigma_0} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \mathbf{n} d\Sigma_0,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности Σ_0 . Поэтому

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV_0 = -\int_{\Sigma_0} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \mathbf{n} d\Sigma_0. \quad (4.14)$$

Пользуясь формулой Гаусса и естественным обобщением формулы (4.1) для рассматриваемого нами контрольного объема V_0 (вместо $\mathbf{v}$ теперь $\mathbf{v}_0$), получим из (4.14)

$$\int_{V_0} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\beta} + \rho \nabla \mathbf{v}_0 + \nabla [\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)] \right\} dV_0 = 0.$$

В подвижной системе координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ имеем следующие уравнения [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v}_0) + \nabla [\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)] &= 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \rho \mathbf{v}(\nabla \mathbf{v}_0) + \nabla [\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + p] &= 0, \\ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \rho e(\nabla \mathbf{v}_0) + \nabla [\rho e(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + p \mathbf{v}] &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь введена удельная полная энергия e , которая связана с удельной внутренней энергией i в (4.5) соотношением

$$e = i + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}). \quad (4.16)$$

Члены $\partial \rho / \partial t$, ... означают производные по времени при фиксированных значениях подвижных координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, т.е. $(\partial \rho / \partial t)_{\beta}$ и т.д., однако оператор Гамильтона ∇ записан в эйлеровых координатах (4.1). Уравнения (4.15) находят применение при решении задач численными методами. В них

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} \right)_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}, \quad \mathbf{v}_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} \right)_{\beta_1, \beta_2, \beta_3},$$

где $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0$ — радиусы-векторы индивидуальных частиц среды и фиксированных точек подвижных координат.

При $\mathbf{v}_0 = 0$ из (4.15) получаются уравнения Эйлера (4.3) — (4.5), при $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ — уравнения в форме Лагранжа. В последних иногда необходимо заменить производные по x_1, x_2, x_3 на производные по $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. То же самое относится к переменным $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Приведем соответствующие уравнения в двумерном случае. Запишем (4.3) — (4.5) в декартовых координатах x_1, x_2 в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0, \quad (4.17)$$

где

$$E = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho e \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ (\rho e + p)v_1 \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ (\rho e + p)v_2 \end{vmatrix}.$$

Уравнения в координатах

$$\beta_1 = \beta_1(x_1, x_2, t), \quad \beta_2 = \beta_2(x_1, x_2, t)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left[\frac{1}{J} \left(E \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + F \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + G \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left[\frac{1}{J} \left(E \frac{\partial \beta_2}{\partial t} + F \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} + G \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

где J — якобиан преобразования координат

$$J = \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2}. \quad (4.19)$$

Отметим, что подвижные координаты используются, например, в книгах [1, 2, 7].

§ 5. Условия на поверхностях сильных разрывов

Необходимые условия на поверхности контакта сред получаются исходя из общих соотношений, справедливых на сильных разрывах. Приведем эти соотношения [3, 4, 6].

Если на поверхности σ вектор скорости $\mathbf{v}$, давление, плотность, энергия p , ρ , e терпят разрыв, а вне σ — непрерывны, то такое течение жидкости называется движением с сильным разрывом. Под σ будем понимать подвижную, в общем случае проникаемую поверхность оболочки. Ввиду малой толщины h ее стенки по сравнению с характерным размером изменчивости поля течения принимаем $h \rightarrow 0$, а σ отождествляем со срединной поверхностью оболочки. Величины разрывов (скачков) параметров течения не могут быть произвольными. Они должны удовлетворять определенным условиям.

Для их построения исходят из интегральных законов сохранения (4.2). Предполагаем, что подвижный объем V охватывает элементарный участок $\Delta\sigma$ поверхности σ и малую толщину слоя $h_0/2$ с каждой стороны σ . При устремлении h_0 и $\Delta\sigma$ к нулю имеет место кинематическое равенство [6]

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma \rightarrow 0 \\ h_0 \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta\sigma} \frac{d}{dt} \int_V f dV = f \mathbf{v} \mathbf{k}_3^* - f' \mathbf{v}' \mathbf{k}_3^*, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{k}_3^*(\alpha_1, \alpha_2, t)$ — внешняя нормаль к деформированной поверхности $\sigma(t)$, связанной с основным базисом в соответствии с (3.2); f , $\mathbf{v}$ и f' , $\mathbf{v}'$ — значения функций с разных ее сторон.

Все подынтегральные функции в поверхностных интегралах по Σ при стягивании Σ к срединной поверхности оболочки σ имеют конечные значения, но различны на разных ее сторонах. Далее принимаем, что при $h_0 \rightarrow 0$ имеют место предельные равенства

$$\begin{aligned} \lim_{h_0 \rightarrow 0} \int_V \rho F dV &= \int_{\sigma} Z d\sigma, \\ \lim_{h_0 \rightarrow 0} \int_V \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dV &= \int_{\sigma} \tilde{W} d\sigma, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $(-Z)$, $(-\tilde{W})$ — внешние для среды сила и приток энергии. Очевидно, если ρF , $\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ конечны в объеме V , то $Z = 0$, $\tilde{W} = 0$. Для любого непрерывного поля массовых сил (например, сил тяжести) реализуется указанный случай.

На основании (5.1) и (5.2) из законов сохранения (4.2) получаем

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_3^*) &= \rho'(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}_3^*), \\ Z + p_{k_3^*} - \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_3^*) &= p'_{k_3^*} - \rho' \mathbf{v}'(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}_3^*), \\ \tilde{W} + p_{k_3^*} \cdot \mathbf{v} - \rho e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_3^*) &= p'_{k_3^*} \cdot \mathbf{v}' - \rho' e'(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}_3^*). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Условия на разрывах (5.3) при заданных значениях параметров с двух сторон поверхности разрыва σ позволяют определить воздействия Z и $\tilde{W}$ по-

тока на оболочку. Они даны в системе координат, связанной с поверхностью σ .

В дополнение к ним приведем соотношения, записанные для неподвижной эйлеровой системы координат. Относительно последней скорость движения фиксированной точки оболочки есть $\partial u / \partial t$, где $u(\alpha_1, \alpha_2, t)$ — вектор перемещения (3.1). Нормальная компонента ее равна $(\partial u / \partial t) k_3^*$, поэтому в (5.3) вместо величин $v k_3^*$, $v' k_3^*$ будут фигурировать разности $(v - \partial u / \partial t) k_3^*$, . . . Для случая идеальной жидкости ($p_{k_3^*} = -p k_3^*$) и в неподвижной системе координат условия (5.3) приобретают вид

$$\rho(v - \partial u / \partial t) k_3^* = \rho'(v' - \partial u / \partial t) k_3^*, \quad (5.4)$$

$$p k_3^* + \rho v[(v - \partial u / \partial t) k_3^*] - Z = p' k_3^* + \rho' v'[(v' - \partial u / \partial t) k_3^*], \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} p v k_3^* + \rho e[(v - \partial u / \partial t) k_3^*] - \tilde{W} - Z(v - \partial u / \partial t) = \\ = \rho' v' k_3^* + \rho' e'[(v' - \partial u / \partial t) k_3^*]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь гидродинамические параметры ρ , v , p , e , . . . с обеих сторон поверхности являются функциями эйлеровых, а параметры k_3^* , u , относящиеся к оболочке, — лагранжевых координат.

Эти соотношения находят многочисленные применения в механике. Ударные волны в газе описываются ими при $Z = 0$, $\tilde{W} = 0$.

Система (5.4) — (5.6) не является полной при решении задач взаимодействия с оболочкой. Нужно еще привлечь физический закон пропускной способности поверхности σ . Он зависит от свойств проницаемости ее, перепада давления и от многих других факторов. Относящиеся сюда вопросы рассматриваются в гл. 4.

Укажем лишь на один предельный случай. При $v k_3^* = (\partial u / \partial t) k_3^*$ жидкость через оболочку не течет. Из (5.4) следует, что при этом плотности с двух сторон оболочки терпят произвольный разрыв ($\rho \neq \rho'$). Условие (5.5) сводится к равенству $Z = (p - p') k_3^*$.

СОВМЕСТНЫЙ ЭЙЛЕРОВО-ЛАГРАНЖЕВ СПОСОБ

Пользуясь сведениями, приведенными ранее, в этой главе сформулируем общую нелинейную задачу гидроупругости. Прежде всего конкретизируем контактные условия для случая непроницаемой поверхности и идеальной жидкости. Взаимодействие непроницаемых оболочек с жидкостью и газом описывается относительно просто и, вообще говоря, представляет основной интерес для практики.

Классификация задач гидроупругости основана на оценках величин нормальной компоненты перемещения оболочки и угла поворота линейного элемента ее, а также изменяемости полей перемещения в оболочке и скорости (и давления) в жидкости. В зависимости от этих параметров предлагаются достаточно общие соотношения в случае сильного изгиба, когда нормальное перемещение имеет порядок линейного размера, в случае среднего изгиба (в частности, пологой оболочки) и слабого изгиба (линейной теории). При этом учитывается поведение жидкости вблизи контактной поверхности.

Здесь речь идет лишь о порядках величин и качественных оценках. Поэтому в конкретных задачах могут быть достигнуты дополнительные упрощения общих соотношений. К ним относятся размерность задачи, характер зависимости решения от времени (статический, периодический, импульсный), сжимаемые и несжимаемые течения жидкости, безмоментность оболочки и т.п.

Отметим, что приведенная классификация не является окончательно установленной. Возможна дальнейшая детализация и другие варианты записи граничных условий. Этому будут способствовать опыт решения частных задач и проникновение в природу рассматриваемых явлений.

Таким образом, в данной главе речь идет об условиях на контактной поверхности, постановка которых и порождает задачу взаимодействия. Что касается условий закрепления оболочки по кромкам, условий затухания решений на бесконечности, симметрии и т.п., то они устанавливаются при решении частных задач.

Здесь не затрагиваются вопросы численной реализации в совместном эйлерово-лагранжевом способе [5, 6].

Изложение главы следует работам [1, 2].

§ 1. Кинематическое и динамические условия на контактной поверхности. Постановка задачи

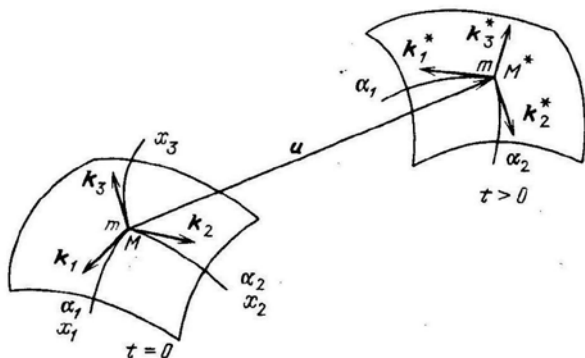
Итак, движение оболочки описывается способом Лагранжа. Соответствующая ортогональная криволинейная система координат α_1, α_2 совпадает со срединной поверхностью оболочки, причем α_1, α_2 направлены по линиям кривизны поверхности. Эти координатные линии α_1, α_2 деформируются вместе со срединной поверхностью; фиксированные точки ее во все время движения и деформации имеют одни и те же численные значения координат α_1, α_2 . Единичные векторы вдоль этих линий k_1, k_2 , а по внешней нормали — k_3 (рис. 2.1). Единичные векторы во время деформации k_1^*, k_2^*, k_3^* выражаются через k_i по известным формулам (3.2) из предыдущей главы. В частности,

$$k_3^* = E_1 k_1 + E_2 k_2 + E_3 k_3, \quad (1.1)$$

где E_i — изменения направляющих косинусов углов между осями α_j в результате деформации. Уравнения движения оболочки, полученные проектированием всех сил на направления k_1, k_2, k_3 (§ 3 гл. 1), представим в символической форме

$$\begin{aligned} L_m(u_1, u_2, u_3) &= R_m + Z_m \quad (m = 1, 2, 3), \\ l_n(u_1, u_2, u_3) &= r_n \quad (n = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — проекции вектора перемещения ($u_i = k_i u$), L_m — нелинейные дифференциальные операторы, R_m — проекции внешних сил неаэродинамического характера (опорные реакции, собственный вес и т.д.), Z_m — силы со стороны жидкости, l_n — дифференциальные операторы, определенные на граничных срезах поверхности; r_n обозначает перемещения, деформации или усилия, приложенные на этих срезах. В варианте теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява, m, n меняются соответственно от 1 до 3 и от 1 до 4. Если используются другие модели теории оболочек, то в (1.2) изменяются лишь эти числа m, n .



Р и с. 2.1. Два положения элемента оболочки в пространстве

Уравнения движения оболочки (3.8), (3.10) из гл. 1, полученные проектированием всех сил на направления k_1^* , k_2^* , k_3^* во время деформации, также представим в символической форме

$$\begin{aligned} L_m^*(u_1, u_2, u_3) &= R_m^* + Z_m^* \quad (m = 1, 2, 3), \\ L_n^*(u_1, u_2, u_3) &= r_n^* \quad (n = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь R_m^* , Z_m^* — проекции указанных выше сил на направления k_m^* . И в этом варианте используются проекции вектора перемещения u на $k_m(t=0)$.

Все величины, входящие в (1.2), (1.3), кроме Z_m и Z_m^* , являются функциями координат α_1, α_2 .

Движение жидкости будем описывать способом Эйлера. Неподвижные в пространстве координаты Эйлера x_1, x_2, x_3 . Соответствующие уравнения в случае идеальной сжимаемой жидкости (4.3), (4.4), (4.8) из гл. 1 представим в форме

$$\begin{aligned} H_\nu(v_1, v_2, v_3, p, \rho) &= Q_\nu \quad (\nu = 1, \dots, 5), \\ h_\mu(v_1, v_2, v_3, p, \rho) &= q_\mu \quad (\mu = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь H_ν — дифференциальные операторы гидромеханики, Q_ν — заданные величины (массовые силы и т. п.). Операторы h_μ и величины q_μ определены на границах занимаемого жидкостью объема, не являющихся поверхностями контакта с оболочкой.

Теперь запишем контактные условия на деформированной поверхности оболочки. В силу малой ее толщины контактирующую с жидкостью поверхность отождествляем со срединной поверхностью.

Криволинейные эйлеровы координаты x_1, x_2 принимаем так, чтобы они совпадали с лагранжевыми координатами α_1, α_2 в недеформированном состоянии оболочки (при $t=0$), а координату x_3 направим по внешней нормали (рис. 2.1).

В начальный момент ($t=0$) фиксированная точка m оболочки с лагранжевыми координатами α_1, α_2 совпадает с точкой M пространства с эйлеровыми координатами $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, x_3 = 0$. В произвольный момент $t > 0$ движения точка m совпадает с точкой M^* пространства. Эйлеровы координаты M^* будут другие, чем для точки M пространства, в то время как лагранжевы координаты m будут иметь одни и те же численные значения в моменты $t=0$ и $t > 0$. Следовательно, при $t > 0$ координаты α_1, α_2 фиксированной точки оболочки и координаты x_1, x_2 не совпадают. Так как скорость движения оболочки $\partial u / \partial t$ и сила на нее со стороны жидкости Z определяются для фиксированной точки m , совпадающей с M^* , условия контакта будем ставить в точке M^* пространства.

Для непроницаемой поверхности скорость протекания, входящая в уравнения сохранения массы для струйки ((5.4) гл. 1), равна нулю. Следовательно кинематическое условие принимает вид

$$v \cdot k_3^* = (\partial u / \partial t) \cdot k_3^*, \quad (M^*) \quad (1.5)$$

что означает равенство нормальных составляющих скоростей движения жидкости и оболочки. Здесь и далее знак (M^*) указывает на то, что усло-

ние имеет место в точке M^* пространства с радиусом-вектором $\mathbf{r} + \mathbf{u}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M .

Для приведения (1.5) к скалярному виду используем (1.1) и введем в рассмотрение компоненты перемещения оболочки и скорости движения жидкости в локальном базисе $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1 \mathbf{k}_1 + u_2 \mathbf{k}_2 + u_3 \mathbf{k}_3, \\ \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{k}_1 + v_2 \mathbf{k}_2 + v_3 \mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подстановка их в (1.5) дает

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - v_1 \right) E_1 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - v_2 \right) E_2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - v_3 \right) E_3 = 0. \quad (M^*) \quad (1.7)$$

Этому условию можно также придать вид

$$v_3^* = \frac{\partial u_1}{\partial t} E_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t} E_2 + \frac{\partial u_3}{\partial t} E_3. \quad (M^*) \quad (1.8)$$

Из (5.5) гл. 1 динамические условия в случае непроницаемой оболочки приобретают вид

$$\mathbf{Z} = (p - p') \mathbf{k}_3^*, \quad (M^*) \quad (1.9)$$

где p, p' — давления с двух сторон стенки. Отсюда

$$Z_1^* = Z_2^* = 0, \quad Z_3^* = p - p'. \quad (M^*) \quad (1.10)$$

Из (1.9), (1.1) получаем также

$$Z_1 = (p - p') E_1, \quad Z_2 = (p - p') E_2, \quad Z_3 = (p - p') E_3. \quad (M^*) \quad (1.11)$$

Следовательно, применение варианта уравнений (1.3), (1.10) выгоднее в смысле правых частей (1.3), чем вариант (1.2), (1.11), где все компоненты Z_m не равны нулю.

Система уравнений и контактных условий (1.2), (1.4), (1.7), (1.11) или система (1.3), (1.4), (1.8), (1.10) представляют собой математическую постановку задачи аэроупругости. Еще раз отметим, что в них параметры u_i, E_j — функции лагранжевых координат α_1, α_2 , а v_i, p, ρ — функции эйлеровых координат x_1, x_2, x_3 . По физической постановке задачи величины R_m, r_n чаще всего являются функциями α_1, α_2 , а Q_v, q_μ — функциями x_1, x_2, x_3 .

При применении численных методов интегрирования, когда на каждом шаге по времени находится решение, приведенная выше формулировка задачи взаимодействия является окончательной. Здесь положение оболочки и точки M^* можно отождествлять с их положением, найденным на предыдущем временном шаге в силу малости перемещений оболочки за это время. Если решение ведется с помощью аналитических методов, то условия (1.7), (1.8), (1.10), (1.11) необходимо представить в виде, где бы не было неявных функций $\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{u}), p(\mathbf{r} + \mathbf{u})$, а фигурировали бы функции $\mathbf{v}(\mathbf{r}), p(\mathbf{r})$ в точке M с известными эйлеровыми координатами. Этому вопросу посвящается следующий параграф.

§ 2. Приведение условий контакта на начальную поверхность

Будем предполагать, что вектор скорости $\mathbf{v}$ и давление p в жидкости являются функциями, которые могут быть аналитически продолжены в окрестности точки M пространства, с которой совпадает фиксированная точка оболочки m в начальный момент ее движения. Тогда неявные функции $\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{u})$, $p(\mathbf{r} + \mathbf{u})$ могут быть приближенно выражены через $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $p(\mathbf{r})$ в окрестности точки M на недеформированной начальной поверхности путем разложения в ряд Тейлора

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} + \dots, \quad (2.1)$$

$$p(\mathbf{r} + \mathbf{u}) = p(\mathbf{r}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \nabla)^2 p + \dots \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{v}$ и p в правой части и оператор Гамильтона

$$\nabla = \frac{k_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{k_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{k_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (2.3)$$

вычисляются в точке M с известными эйлеровыми координатами x_1, x_2, x_3 .

Если учесть (2.1), то кинематическое условие (1.5) приобретает вид

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} - \dots \right] \mathbf{k}_3^* = 0. \quad (M) \quad (2.4)$$

Здесь скорость $\mathbf{v}$ и ее производные вычисляются для точки M пространства. Поэтому условие (2.4) (и другие подобные соотношения) в дальнейшем будем помечать знаком (M) и говорить о приведении на начальную поверхность, хотя оно представляет собой приближенное равенство нормальных составляющих скоростей жидкости и движущейся оболочки в точке M^* пространства. Очевидно, такое представление (1.5) имеет смысл лишь тогда, когда ряды (2.1), (2.2) являются быстро сходящимися. Это требование реализуется при относительно малых значениях вектора перемещения.

Для приведения (2.4) к скалярному виду используем (1.1) и (1.6). Так как $\mathbf{k}_i$ представляют собой единичные векторы на недеформированной начальной поверхности оболочки, то $\partial \mathbf{k}_i / \partial t = 0$.

В выражении

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left(\frac{u_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (v_1 \mathbf{k}_1 + v_2 \mathbf{k}_2 + v_3 \mathbf{k}_3)$$

в силу криволинейности координат производные от единичных векторов

не равняются нулю. Используем формулы их дифференцирования [4]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial k_1}{\partial x_1} &= -\frac{\partial h_1}{h_2 \partial x_2} k_2 - \frac{\partial h_1}{h_3 \partial x_3} k_3, \\
 \frac{\partial k_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial h_2}{h_1 \partial x_1} k_2, \quad \frac{\partial k_1}{\partial x_3} = \frac{\partial h_3}{h_1 \partial x_2} k_3, \\
 \frac{\partial k_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial h_1}{h_2 \partial x_2} k_1, \quad \frac{\partial k_2}{\partial x_3} = \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} k_3, \\
 \frac{\partial k_2}{\partial x_2} &= -\frac{\partial h_2}{h_1 \partial x_1} k_1 - \frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} k_3, \\
 \frac{\partial k_3}{\partial x_1} &= \frac{\partial h_1}{h_3 \partial x_3} k_1, \quad \frac{\partial k_3}{\partial x_2} = \frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} k_2, \\
 \frac{\partial k_3}{\partial x_3} &= -\frac{\partial h_3}{h_1 \partial x_1} k_1 - \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} k_2.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

В результате (2.4) может быть приведено к следующему виду:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - V_1 \right) E_1 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - V_2 \right) E_2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - V_3 \right) E_3 = 0. \quad (M) \tag{2.6}$$

Параметры E_1, E_2, E_3 даны в (3.4) гл. 1. Величины V_1, V_2, V_3 представляют собой значения компонент скорости в точке M^* , приближенно выраженные через их значения в точке M :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= v_1 + \frac{u_1}{h_1} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_1}{h_2 \partial x_2} v_2 + \frac{\partial h_1}{h_3 \partial x_3} v_3 \right] + \\
 &+ \frac{u_2}{h_2} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{h_1 \partial x_1} v_2 \right] + \frac{u_3}{h_3} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{h_1 \partial x_1} v_3 \right] + \\
 &+ V'_1 \left(\frac{u_1^2}{h_1^2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \dots \right).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Величины V_2 и V_3 получаются отсюда круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

Функции V'_1, V'_2, V'_3 , соответствующие третьему члену в правой части (2.1), имеют довольно громоздкий вид. Выпишем их выражения только для двумерного случая (координат x_2, x_3):

$$\begin{aligned}
 V'_2 &= V''_2 + \frac{u_2 u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} \right) v_3, \\
 V'_3 &= V''_3 - \frac{u_2 u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} \right) v_2.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 V_2'' = & \frac{u_2^2}{2h_2^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} v_3 \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} v_2 \right) \right] + \\
 & + \frac{u_3^2}{2h_3^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} v_2 \right) - \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} v_2 \right) \right] + \\
 & + \frac{u_2 u_3}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} \frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} v_2 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right]. \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Функция V_3'' получается из (2.9) перестановкой индексов 2 и 3.

Необходимо отметить, что в условии (2.6) выражения для E_i содержат производные от α_1, α_2 , а выражения для V_i — производные от x_1, x_2, x_3 . Хотя эйлеровы и лагранжевы координаты в (2.6) могут быть отождествлены в силу специального выбора координатных систем, совпадающих в начальный момент времени, производные по α_i и x_i необходимо между собой различать, так как они не равны друг другу ($\partial/\partial\alpha_i \neq \partial/\partial x_i$). Только после выполнения операции дифференцирования можно отождествить между собой переменные x_i и α_i . Это же замечание относится, конечно, и к коэффициентам Ляме $H_i(\alpha_1, \alpha_2)$ и $h_i(x_1, x_2, x_3)$, входящим в уравнения движения оболочки и жидкости. В них после выполнения операции дифференцирования можно положить

$$h_1(x_1, x_2, 0) = H_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad h_2(x_1, x_2, 0) = H_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

Если учесть (2.2), то динамические условия (1.10) приобретают вид (без потери общности можно опустить p')

$$\begin{aligned}
 Z_1^* &= Z_2^* = 0, \\
 Z_3^* &= p + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{u_1^2}{2h_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \dots (M) \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

В (2.2), (2.10) операция дифференцирования производится над скалярной величиной p , поэтому ряд может быть легко продолжен.

Аналогично представляются условия (1.11)

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= E_1 \left(p + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \dots \right), \\
 Z_2 &= E_2 \left(p + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \dots \right), \quad (M) \quad (2.11) \\
 Z_3 &= E_3 \left(p + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Итак, математическая постановка задачи включает в себя систему уравнений и условий (1.2), (1.4), (2.6), (2.11) или систему (1.3), (1.4), (2.6), (2.10).

§ 3. Классификация задач гидроупругости

Естественно, при постановке частных задач как уравнения движения оболочки и жидкости, так и контактные условия упрощаются. В этой книге мы не будем специально рассматривать те или иные классы задач теории оболочек и гидромеханики, где достигаются известные тривиальные упрощения (как, например, плоские задачи, безмоментные оболочки, несжимаемость, сверхзвуковые и дозвуковые течения и т. д.). Эти вопросы рассматриваются в соответствующих курсах по теории упругости и гидромеханике. Они будут ставиться далее при решении конкретных задач.

Здесь мы ограничимся разбором контактных условий. При этом будем исходить из таких факторов общего характера, как величина перемещения оболочки по нормали, угол поворота ее элемента, а также изменение полей перемещения оболочки и полей скорости и давления в жидкости.

Примем следующие допущения. Пусть H представляет собой характерный линейный размер оболочки. За α_i и x_i принимаем такие безразмерные координаты, что все коэффициенты Ляме h_i (также H_1 , H_2 , совпадающие с h_1 и h_2 на контактной поверхности $\alpha_3 = 0$), одного порядка как между собой, так и с H .

Будем считать, что геометрические параметры оболочки изменяются плавно, т. е. имеют место соотношения $\partial H_i / \partial \alpha_j \sim H_i$. Этим же свойством обладают и соответствующие производные по x_j . В силу указанных выше допущений можно принять, что кривизны поверхности k_{ij} имеют порядок

$$k_{ij} \sim H_i^{-1} \sim h_i^{-1} \sim H^{-1}. \quad (3.1)$$

Для качественной оценки деформации введем числа m , n , k так, чтобы

$$\frac{u_3}{H} \sim \epsilon^m, \quad \omega_i \sim \epsilon^n, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} \sim \epsilon^k u_i, \quad (3.2)$$

где ϵ — величина, малая по сравнению с единицей, или допускаемая в расчетах погрешность, символ $\sim$ означает одинаковость порядка сравниваемых величин.

Для качественной оценки картины движения жидкости введем числа λ и μ так, чтобы

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sim \epsilon^\lambda v_i, \quad \frac{\partial p}{\partial x_j} \sim \epsilon^\mu p. \quad (3.3)$$

Оценки должны вестись по максимальным значениям ω_i , $\partial u_i / \partial \alpha_j$, $\partial v_i / \partial x_j$, $\partial p / \partial x_j$. Числа m , n характеризуют перемещение по нормали и угол поворота элемента стенки при изгибе. Числа k , λ , μ характеризуют измене-

мость полей перемещения стенки, а также скорости движения и давления в жидкости вблизи поверхности оболочки.

Возможны следующие случаи.

1. Поле в оболочке и жидкости изменяется плавно, т. е. производные по координатам имеют такой же порядок, что и сами функции (или даже сильно уменьшаются). В этом случае, как видно из (3.2) и (3.3),

$$k \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0. \quad (3.4)$$

Это реализуется, например, при поперечном безотрывном стационарном обтекании цилиндрической оболочки потоком идеальной несжимаемой жидкости.

2. Поле изменяется быстро, производные больше самих функций, следовательно,

$$k < 0, \quad \lambda < 0, \quad \mu < 0. \quad (3.5)$$

Такая картина может быть в импульсных задачах, при высокочастотной осцилляции и т. д.

Можно принять, что ϵ имеет порядок отношения толщины стенки оболочки к ее характерному линейному размеру h/H . В этом случае степень точности уравнений теории тонких оболочек, построенной на гипотезах Кирхгофа — Лява и имеющей погрешность h/H по сравнению с единицей, и граничных условий на контактной поверхности с жидкостью будет одна и та же.

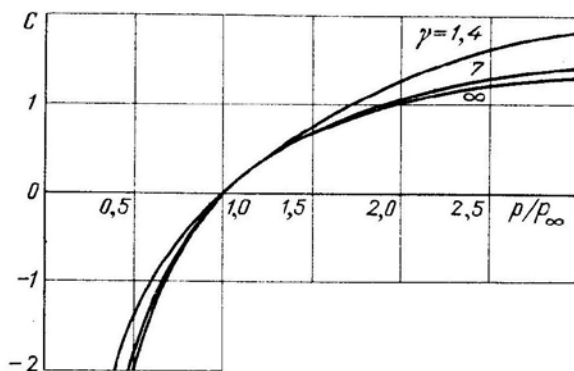
Покажем, как должны вестись оценки. Рассмотрим, например, в составе Z_3^* (2.10) члены

$$p + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{u_3^2}{2h_3^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2}. \quad (3.6)$$

Согласно (3.1) $h_i \sim H$. Следовательно, $u_3/h_3 \sim \epsilon^m$ в соответствии с (3.2). Поэтому с учетом (3.3) имеем следующие порядки величин: $\sim p(1 + \epsilon^{m+\mu} + \epsilon^{2(m+\mu)})$.

Если $m + \mu \geq 1$, то в (3.6) сохраняется только первый член p . Если $m + \mu < 1, 2(m + \mu) \geq 1$, то должен быть сохранен наравне с первым также член, содержащий u_3/h_3 в первой степени. В таких оценках состоит идея классификации задач взаимодействия и соответствующих упрощений условий контакта.

В частных задачах взаимодействия далеко не всегда нелинейности во всех трех системах уравнений (гидромеханики, теории оболочек и контактных условий) играют одинаково важную роль. В тех случаях, когда по характеру задачи нелинейности в контактных условиях не являются определяющими, пренебрежение только величинами $\epsilon^1 \sim h/H$ по сравнению с единицей может приводить к излишне точным соотношениям. Тогда можно допустить пренебрежение несколько большими величинами, например $\epsilon^{2/3}$ ($m + \mu \geq 2/3$). При этом если $\epsilon = h/H = 10^{-2}$, то $\epsilon^{2/3} \approx 0,05$, в то время как при критерии ϵ^1 отбрасываются лишь величины порядка 0,01. Однако в дальнейших общих оценках мы будем придерживаться указанного выше правила пренебрежения величинами ϵ по сравнению с единицей.



Р и с. 2.2. Коэффициент изменения давления

В заключение отметим, что для отдельных классов задач можно указать некоторые простые соотношения между числами m , n , k , а также λ и μ . В этих случаях упрощается и анализ порядков величин.

Рассмотрим, например, соотношение между λ и μ в случае установившихся потенциальных течений сжимаемой жидкости с параметрами V_∞ , ρ_∞ , p_∞ на большом удалении от препятствия. Тогда из (4.11) гл. 1 получаем следующее выражение для гидродинамического давления:

$$p = p_\infty \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} (v^2 - V_\infty^2) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (3.7)$$

Используя (3.3) $\partial v / \partial x_i \sim \epsilon^\lambda v$, непосредственным дифференцированием (3.7) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \sim \epsilon^\lambda v^2 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} (v^2 - V_\infty^2) \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Исключив отсюда v^2 с помощью (3.7),

$$v^2 = V_\infty^2 + \frac{2a_\infty^2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right],$$

находим

$$\partial p / \partial x_i \sim C \epsilon^\lambda p, \quad (3.8)$$

где обозначено

$$C = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[1 - \frac{2 + (\gamma - 1)M_\infty^2}{2} \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{1 - \gamma}{\gamma}} \right], \quad M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}. \quad (3.9)$$

При $M_\infty^2 \ll 2/(\gamma - 1)$ график функции $C(p/p_\infty)$ показан на рис. 2.2 для $\gamma = 1.4$ (воздух), $\gamma = 7$ (вода), $\gamma = \infty$ (несжимаемая жидкость). В наиболее интересном случае $p/p_\infty > 1/3$ эта функция порядка единицы. Так как в соответствии с (3.3) $\partial p / \partial x_i \sim \epsilon^\mu p$, то $\mu = \lambda$. Аналогично могут быть указаны другие случаи равенства μ и λ или простых соотношений между ними. Однако для общих оценок мы сохраним оба числа λ и μ .

§ 4. Взаимодействие при сильном изгибе оболочки

Под сильным изгибом будем понимать случай, когда перемещения оболочки соизмеримы с ее характерным линейным размером, а повороты сечения порядка единицы [3]. Далее, для сильного изгиба характерна одинаковость порядков максимальных значений касательных компонент перемещения и прогиба

$$u_1, u_2 \sim u_3. \quad (4.1)$$

При таком статическом изгибе перемещения по координатам изменяются плавно. Что касается динамических задач, то здесь возможны перемещения, имеющие быстроизменяющиеся составляющие. Однако последние, связанные с частым волнообразованием, не могут сопровождаться большими перемещениями. Поэтому основное движение оболочки при оценках также можно считать плавно изменяющимся по координатам.

Таким образом, при взаимодействии, сопровождающемся сильным изгибом, значения m, n, k в несколько раз меньше единицы. Для определенности примем

$$m = n = 1/5, \quad k = 0. \quad (4.2)$$

При этом, например, прогиб цилиндрической оболочки с отношением толщины к радиусу $h/R = 10^{-2}$ может доходить до одной трети радиуса и более, так как $u_3 \sim \epsilon^m H \sim (h/R)^m R \sim 10^{-2/5} R \sim R/2.5$. Таким образом, имеет место сильный изгиб оболочки.

Рассмотрим случай (3.4) плавного изменения поля в жидкости. Пусть $\lambda = \mu = 1/5$.

В кинематическом условии (2.6) установим сначала порядки членов, входящих в состав V_i . В соответствии с (3.1), (3.2), (4.1) $H_i \sim H$, а также $u_1/H_1 \sim u_2/H_2 \sim u_3/H_3 \sim \epsilon^m$. Допуская далее, что порядок величин, заключенных в квадратные скобки в (2.7), определяется порядком их первых членов

$$\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{h_1 \partial x_1} v_2 \right] \sim \epsilon^\lambda v_1, \dots,$$

можем записать

$$V_i \sim v_i(1 + \epsilon^{m+\lambda} + \epsilon^{2(m+\lambda)} + \dots). \quad (4.3)$$

Согласно (3.3), (3.4) гл. 1 и (3.2), (4.1) величины E_i имеют порядок

$$\begin{aligned} E_{1,2} &\sim \epsilon^n + \epsilon^{n+m} + \epsilon^{n+m+k}, \\ E_3 &\sim 1 + \epsilon^m + \epsilon^{m+k} + \epsilon^{2m} + \epsilon^{2(m+k)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

так как из формул для e_{ij} следует

$$e_{ij} \sim \epsilon^m + \epsilon^{m+k}. \quad (4.5)$$

Из (4.3) и (4.4) заключаем, что при принятых значениях параметров m, n, k, λ в составе V_i наравне с главными сохраняются члены порядков $\epsilon^{m+\lambda}$ и $\epsilon^{2(m+\lambda)}$, а в составе E_i должны быть сохранены все члены. Это означает, что в случае сильного изгиба выражения (2.7) — (2.9) остаются без изменения.

Теперь в (2.6) нужно сравнить между собой члены $E_i du_i/dt$, а также $E_i V_i$. Из оценок (4.1) и (4.4) заключаем, что все члены $E_i du_i/dt$ имеют одинаковый порядок. Что касается $E_i V_i$, то здесь оценки сложнее. Из (4.3) и (4.4) следует, что $E_3 V_3 \sim v_3 (1 + \epsilon^m + \dots)$, где единица в скобках является главным членом, с которым нужно сравнивать другие. Это сравнение показывает, что член $E_3 V_3$ должен быть заменен на сумму $E_3 V_3 + V_3'$, где V_3 берется согласно (2.7), но без членов V_3' . Аналогичное сравнение порядков величин $E_1 V_1$ и $E_2 V_2$ с v_3 в составе $E_3 V_3$ показывает ($v_1, v_2 \sim v_3$), что в них должны быть взяты V_1, V_2 по (2.7) без членов V_1', V_2' .

Таким образом, при динамическом взаимодействии, сопровождающемся сильным изгибом оболочки и плавным изменением поля скоростей в жидкости с указанными выше значениями параметров m, n, k, λ , кинематическое условие (2.6) принимает вид

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - V_1\right)E_1 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - V_2\right)E_2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - V_3\right)E_3 - V_3' = 0, \quad (4.6)$$

где V_i даются выражениями (2.7) без членов V_i' , а V_3' — выражениями (2.8). Значения E_i даны в (3.4) гл. 1. Здесь и далее в главе знак (M) при записи условий контакта опускаем.

В соотношениях (2.10), (2.11) члены типа

$$\frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \frac{u_1^2}{2h_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2},$$

имеющие порядок $\epsilon^{m+\mu} p$, $\epsilon^{2(m+\mu)} p$ в силу (4.2), должны быть сохранены. Итак, динамические условия (2.10) в рассматриваемом случае взаимодействия имеют вид

$$\begin{aligned} Z_1^* &= Z_2^* = 0, \\ Z_3^* &= p + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \\ &+ \frac{u_1^2}{2h_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{u_2^2}{2h_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \frac{u_3^2}{2h_3^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Если изменение поля скорости таково, что λ имеет отрицательное значение, то ряд (4.3) не сходится или сходится плохо, и рассматриваемые условия контакта неприменимы.

При перемещении оболочки по нормали к срединной поверхности, значительно превышающем толщину стенок, но в то же время значительно меньшем ее характерных линейных размеров, можно для оценок принять

$$m = 2/3, \quad n = 1/3, \quad k = -1/3. \quad (4.8)$$

Здесь допускаются упрощения и при сильном изменении поля скорости и давления ($\lambda, \mu < 0$). Соответствующая теория взаимодействия, являющаяся промежуточной между сильным и средним изгибом, была построена в работе [1]. Здесь мы не будем ее рассматривать.

§ 5. Взаимодействие при среднем изгибе оболочки

Изгиб называется средним, если максимальный прогиб одного порядка с толщиной стенки или превышает ее, но мал по сравнению с другими линейными размерами. Средний изгиб характерен для пологих оболочек, у которых кривизна k_{ii} и размер основания L (или длина полуволны L) удовлетворяют условию $k_{ii}L \sim \epsilon^{1/2}$. Заметим, что упомянутый выше промежуточный случай между сильным и средним изгибом имеет место при $k_{ii}L \sim \epsilon^{1/3}$.

Теория пологих оболочек строится в предположении

$$m = 1, \quad n = 1/2, \quad k = -1/2. \quad (5.1)$$

При этом вместо (4.1) имеем

$$u_1 \sim \omega_1 u_3, \quad u_2 \sim \omega_2 u_3. \quad (5.2)$$

На основании (3.1), (3.2) и (5.1), (5.2), а также (3.3) гл. 1 устанавливаем

$$\frac{u_3}{h_3} \sim \epsilon, \quad \frac{u_1}{h_1} \sim \epsilon^{3/2}, \quad \frac{u_2}{h_2} \sim \epsilon^{3/2}, \quad (5.3)$$

$$e_{ij} \sim \epsilon, \quad \omega_k \sim \epsilon^{1/2}.$$

Для параметров E_i из (3.4) гл. 1 при этом получаем

$$E_1 = -\omega_1, \quad E_2 = -\omega_2, \quad E_3 = 1. \quad (5.4)$$

Углы поворота с точностью до ϵ по сравнению с единицей

$$\omega_i = \partial u_3 / H_i \partial \alpha_i. \quad (5.5)$$

В рассматриваемом случае без заметной погрешности можно отождествить производные по α_1, α_2 и x_1, x_2 .

Сравним далее между собой члены $E_1 \partial u_1 / \partial t + E_3 \partial u_3 / \partial t$, входящие в уравнение (2.6). Из (5.2), (5.4) имеем оценки

$$\sim \omega_1 \frac{\partial(\omega_1 u_3)}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \sim (1 + \epsilon) \frac{\partial u_3}{\partial t},$$

откуда заключаем, что члены $E_1 \partial u_1 / \partial t, E_2 \partial u_2 / \partial t$ должны быть отброшены как малые по сравнению с $E_3 \partial u_3 / \partial t = \partial u_3 / \partial t$.

Поэтому кинематическое условие (2.6) в случае взаимодействия пологой оболочки с быстроизменяющимся полем жидкости ($-1/2 \leq \lambda < 0$) имеет вид

$$v_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{h_1 \partial x_1} v_1 + \frac{\partial u_3}{h_2 \partial x_2} v_2 - \frac{u_3}{h_3} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial h_3}{h_1 \partial x_1} v_1 + \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} v_2 \right). \quad (5.6)$$

Если поле течения в жидкости медленноизменяющееся ($\lambda \geq 0$), то в (5.6) члены с множителем u_3/h_3 отбрасываются. В случае быстроизменяющегося поля в жидкости с показателем $-1/2 > \lambda \geq -2/3$ нужно учесть в (5.6) еще члены с множителями $(u_3/h_3)^2$, u_1/h_1 , u_2/h_2 . Эти члены содержатся в (2.7), (2.8), (2.9).

Для записи динамических условий оценим в (4.7) следующие три члена:

$$p + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} \sim p (1 + \epsilon^m + \epsilon^n + \epsilon^\mu + \epsilon^{m+\mu}). \quad (5.7)$$

Здесь учтены соотношения (5.2). Для быстроизменяющихся полей в жидкости ($-1/2 \leq \mu < 0$) в соответствии с (5.1) наравне с p нужно сохранить член $(u_3/h_3) \partial p / \partial x_3$, а другие нужно отбросить.

Следовательно, динамические условия при взаимодействии пологой оболочки с быстроизменяющимся полем в жидкости имеют вид

$$Z_1^* = 0, \quad Z_2^* = 0, \quad Z_3^* = p + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (5.8)$$

Для быстроизменяющегося поля в жидкости ($\lambda \geq 0$) в соответствии с (5.7) в последнем условии (5.8) остается $Z_3^* = p$.

Динамические условия (2.11) при среднем изгибе и быстроизменяющемся поле в жидкости ($-1/2 \leq \mu \leq 0$)

$$Z_1 = - \frac{\partial u_3}{h_1 \partial x_1} p, \quad Z_2 = - \frac{\partial u_3}{h_2 \partial x_2} p, \quad Z_3 = p + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (5.9)$$

Здесь учтены (5.4) и (5.5). В правых частях Z_1 и Z_2 опущены члены $(u_3/h_3) \partial p / \partial x_3$, имеющие порядок $\epsilon^{m+\mu}$ по сравнению с первыми членами p , так как изгиб пологой оболочки слабо зависит от нагрузок в касательных направлениях.

В случае плоской пластины, испытывающей изгиб с параметрами (5.1), кинематическое и динамические условия можно записать в виде ($u_3 = w$, $h_1 = h_2 = h_3 = 1$)

$$v_3 = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} v_2 - w \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \quad (5.10)$$

$$Z_3^* = p + w \partial p / \partial x_3.$$

Отсюда легко получить, например, хорошо известные в теории линейного флаттера контактные условия относительно возмущений компонент скорости v'_1, v'_2, v'_3 и давления p' . Учитывая, что при продольном обтекании пластины равномерным потоком со скоростью V_∞ , направленным вдоль линии x_1 , $v_1 = V_\infty + v'_1$, $v_2 = v'_2$, $v_3 = v'_3$, $\partial p / \partial x_3 = 0$, и проводя линейризацию, имеем

$$v'_3 = \frac{\partial w}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad Z_3^* = p', \quad (x_3 = 0), \quad (5.11)$$

где p' определяется из линейризованного уравнения Бернулли.

Сделаем еще одно замечание в отношении условий (5.6), (5.10). Если предположить, что компоненты скорости v_1, v_2, v_3 одного порядка, то члены типа $v_1 \partial w / \partial x_1$ будут малы по сравнению с членом v_3 . Такие случаи могут иметь место, например, в задачах колебаний оболочки и жидкости. Однако, если имеется среднее течение, как в только что рассмотренном примере, величины v_1 и v_2 вблизи поверхности оболочки могут существенно превышать v_3 . Поэтому в общем случае кинематические условия должны иметь вид (5.6), (5.10). Влияние членов $w \partial v_3 / \partial x_3$, $w \partial p / \partial x_3$ в (5.10) будет рассмотрено далее в задачах о вторичных течениях около пластины (гл. 5) и обтекании криволинейной поверхности (гл. 3). Эти члены, как известно из § 2 этой главы, появляются в результате того, что мы различаем деформированную и недеформированную поверхности контакта.

Вернемся к условиям (5.6), (5.8). В случае потенциального движения жидкости, как это известно из гл. 1, может быть введен в рассмотрение потенциал скорости $\varphi_*(v_i = \partial \varphi_* / \partial x_i)$. Соответствующее гидродинамическое давление обозначим p_* . Представим φ_* и p_* в виде сумм

$$\varphi_* = \varphi + \psi, \quad p_* = p_\varphi + p_\psi, \quad (5.12)$$

где первые члены в правых частях описывают поле скоростей и давления в жидкости в предположении об абсолютной жесткости поверхности тела ($v_3 = \partial \varphi / \partial x_3 = 0$), а вторые представляют собой их возмущения, вызванные перемещением поверхности контакта. В таком представлении не принимаются во внимание произвольные постоянные, с точностью которых определяется потенциал.

Предположим, что $\partial \psi / \partial x_i \ll \partial \varphi / \partial x_i$, $p_\psi \ll p_\varphi$. Тогда кинематические и динамические условия (5.6), (5.8) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{h_3 \partial x_3} &= \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{h_1 \partial x_1} \frac{\partial \varphi}{h_1 \partial x_1} + \frac{\partial u_3}{h_2 \partial x_2} \frac{\partial \varphi}{h_2 \partial x_2} - \\ &- \frac{u_3}{h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varphi}{h_3 \partial x_3} \right) + \frac{\partial h_3}{h_1 \partial x_1} \frac{\partial \varphi}{h_1 \partial x_1} + \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} \frac{\partial \varphi}{h_2 \partial x_2} \right], \\ Z_1^* &= 0, \quad Z_2^* = 0, \quad Z_3^* = p_\infty + p_\psi + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p_\varphi}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

На поверхности контакта $x_3 = 0$ коэффициенты h_1, h_2 совпадают с H_1, H_2 .

§ 6. Взаимодействие при слабом изгибе оболочки

Если плавно изменяющиеся по координатам прогиб и тангенциальные компоненты перемещения оболочки являются величинами порядка толщины стенки, а повороты ее линейных элементов малы по сравнению с единицей, то такой изгиб называется слабым. При этом происходит линеаризация всех соотношений теории тонких оболочек. В соответствии со сказанным компоненты перемещения одного порядка

$$u_1 \sim u_2 \sim u_3, \quad (6.1)$$

а параметры m, n, k имеют значения

$$m = 1, \quad n = 1, \quad k = 0. \quad (6.2)$$

При этом $u_1/H_1, u_2/H_2 \sim u_3/H_3 \sim \epsilon^1, \omega_k = \epsilon^1$. Из формул e_{ij}, E_i и (6.2) следует

$$e_{ij} \sim \epsilon^1, \quad E_1 = -\omega_1, \quad E_2 = -\omega_2, \quad E_3 = 1. \quad (6.3)$$

Здесь выражения для ω_1, ω_2 берутся без упрощений, в виде (3.3) гл. 1. Величины $E_1 \partial u_1 / \partial t, E_2 \partial u_2 / \partial t$ в соответствии с (6.1) – (6.3) в ϵ раз меньше, чем $E_3 \partial u_3 / \partial t = \partial u_3 / \partial t$.

Для случая быстроизменяющегося поля скорости и давления в жидкости ($-1/2 \leq \lambda, \mu < 0$) вблизи поверхности оболочки имеем следующее кинематическое условие:

$$\begin{aligned} v_3 = & \frac{\partial u_3}{\partial t} + \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 - \frac{u_1}{h_1} \left[\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{h_3 \partial x_3} v_1 \right] - \\ & - \frac{u_2}{h_2} \left[\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{h_3 \partial x_3} v_2 \right] - \frac{u_3}{h_3} \left[\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial h_3}{h_1 \partial x_1} v_1 + \frac{\partial h_3}{h_2 \partial x_2} v_2 \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Соответствующие динамические условия имеют вид

$$Z_1^* = Z_2^* = 0, \quad Z_3^* = p + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (6.5)$$

В линейной теории можно отождествить координатные системы α_1, α_2 и x_1, x_2 . Компоненты внешних нагрузок Z_i^* по направлениям единичных векторов k_i^* и компоненты Z_i по k_i с допускаемой точностью совпадают между собой. Поэтому

$$Z_1 = Z_2 = 0, \quad Z_3 = p + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (6.6)$$

Если поле в жидкости изменяется плавно ($\lambda, \mu \geq 0$), то в кинематическом и динамических условиях (6.4), (6.5) опускаются члены с множи-

телом (u_i/h_i):

$$v_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} + \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2, \quad (6.7)$$

$$Z_1^* = Z_2^* = 0, \quad Z_3^* = p.$$

В случае потенциального движения жидкости, представляя потенциал и гидродинамическое давление в виде сумм (5.12), получаем из (6.7) линеаризованные условия контакта

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{h_3 \partial x_3} &= \frac{\partial u_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_3}{H_1 \partial x_1} - k_{11} u_1 - k_{12} u_2 \right) \frac{\partial \varphi}{h_1 \partial x_1} + \\ &+ \left(\frac{\partial u_3}{H_2 \partial x_2} - k_{22} u_2 - k_{21} u_1 \right) \frac{\partial \varphi}{h_2 \partial x_2}, \quad (6.8) \\ Z_1^* &= Z_2^* = 0, \quad Z_3^* = p_\varphi + p_\psi. \end{aligned}$$

Рассмотрим для примера выражение для гидродинамического давления в случае стационарного течения несжимаемой жидкости

$$p = p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2} [V_\infty^2 - (\nabla \varphi)^2]. \quad (6.9)$$

Значение p_φ совпадает с (6.9), а $p_\psi = -\rho_\infty \nabla \varphi \nabla \psi$. Так как $\partial \varphi / \partial x_3 = 0$ в силу предположения в (5.12), то

$$Z_3^* = p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2} [V_\infty^2 - (\nabla \varphi)^2] - \rho_\infty \left(\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right). \quad (6.10)$$

Контактные условия (6.4)–(6.8) справедливы, когда деформация оболочки при взаимодействии с жидкостью происходит плавно ($k=0$). При деформации с частым волнообразованием, когда каждая полуволна занимает пологую область поверхности, линеаризация соотношений происходит при

$$m = 3/2, \quad n = 1, \quad k = -1/2. \quad (6.11)$$

Рассмотрим порядок тангенциальных компонент перемещения u_1, u_2 . Если, например, по окружности цилиндрической оболочки радиусом R образуется $2n$ полуволн длиной L , то $n = \pi R/L$. Как указывалось в предыдущем параграфе, для пологой оболочки $L/R \sim \epsilon^{1/2}$. С другой стороны, при преимущественно изгибной деформации можно положить

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{R \partial x_1} - \frac{u_3}{R} \approx 0,$$

откуда $u_2 \sim u_3/n$ или $u_2 \sim u_3 (L/(\pi R)) \sim u_3 \epsilon^{1/2} \sim \omega_2^{1/2} u_3$. Поэтому будем иметь оценки

$$u_1 \sim \omega_1^{1/2} u_3, \quad u_2 \sim \omega_2^{1/2} u_3. \quad (6.12)$$

С помощью (6.12) находим, что в рассматриваемом случае (6.11) даже при быстром изменении поля в жидкости ($-1/2 \leq \lambda, \mu < 0$) кинематическое и динамические условия имеют вид (6.7), но в них значения ω_i определяются для полой оболочки (5.5). Итак,

$$v_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{H_1 \partial x_1} v_1 + \frac{\partial u_3}{H_2 \partial x_2} v_2, \quad (6.13)$$

$$Z_1^* = Z_2^* = 0, \quad Z_3^* = p.$$

В заключение снова вернемся к рассмотренному в § 3 вопросу о возможных простых соотношениях между числами m, n, k . Из разобранных выше случаев сильного, среднего и слабого изгиба следует, что m, n, k подчиняются правилу

$$n = m + k \quad (\text{при } k \leq 0).$$

В самом деле, при сильном изгибе $m = 1/5, n = 1/5, k = 0$, при среднем изгибе $m = 1, n = 1/2, k = -1/2$; в случае, промежуточном между ними, $m = 2/3, n = 1/3, k = -1/3$; при слабом изгибе $m = 1, n = 1, k = 0$, а также $m = 3/2, n = 1, k = -1/2$.

ИЗГИБ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЕЕ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ЖИДКОСТЬЮ

В настоящей главе показывается применение сформулированной в гл. 2 общей постановки задачи взаимодействия, в частности условий на контактной поверхности. С этой целью рассматривается поведение цилиндрической оболочки и панели при их поперечном обтекании потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Выясняется роль введенных нелинейных членов в контактных условиях. При решении этих задач определяющим является допущение о безотрывности потока жидкости с поверхности тела. Приводятся также данные экспериментальных исследований и их сравнение с теоретическими результатами.

В работах [1, 8, 13, 14, 19, 20, 22, 23–26, 33] рассматривалась плоская статическая задача обтекания идеальной несжимаемой жидкостью газового пузыря и поверхностей, полностью или частично состоящих из мембраны. Аналогичная задача для обтекания цилиндрических оболочек и панелей исследовалась в статьях [2–6, 10–12, 15–17, 21, 27–31] и др. Динамическое поведение оболочки в потоке в указанной постановке рассматривалось в работах [7, 10, 34].

§ 1. Слабый изгиб цилиндрической оболочки при ее поперечном безотрывном обтекании жидкостью

Рассмотрим плоскую деформацию бесконечно длинной цилиндрической тонкостенной оболочки при безотрывном поперечном обтекании ее потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости (рис. 3.1). Оболочка свободна от опорных или иных усилий негидродинамического характера и находится в установившемся движении относительно жидкости. Далее примем, что она покоится в пространстве, а на большом удалении ($r \rightarrow \infty$) давление, плотность и скорость однородного потока равны p_∞ , ρ_∞ , V_∞ . Давление внутри оболочки равно p_i и не изменяется в процессе ее деформации.

Для плоской деформации тонкостенной цилиндрической оболочки довольно точным является предположение о нерастяжимости ее срединной поверхности. Оно использовано здесь для некоторого упрощения вычислений. Перемещение по нормали к срединной поверхности считается малым по сравнению с толщиной стенки. В связи с этим уравнение изгиба и уравнения, описывающие изменение поля течения за счет деформации

ции контура, линеаризуются. Другими словами, применяются кинематические и динамические условия, полученные для случая слабого изгиба.

Предполагается, что разность давлений извне и изнутри оболочки мала по сравнению со значением давления, при котором происходит ее статическая потеря устойчивости. Наиболее существенно допущение о безотрывности течения жидкости по поверхности. В последующих параграфах будет обсуждаться влияние указанных факторов, а также нелинейного изгиба.

В указанной постановке задача относительно потенциала скорости φ

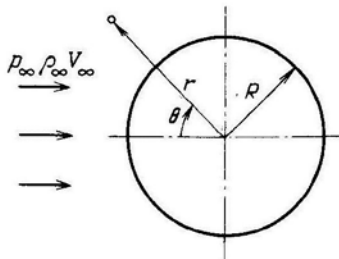


Рис. 3.1. Поперечное обтекание цилиндрической оболочки

движения невесомой несжимаемой жидкости сводится к решению уравнений (§ 4 гл. 1)

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad p = p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2} \left[V_\infty^2 - (\nabla \varphi)^2 - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right], \quad (1.1)$$

удовлетворяющих на бесконечности условию

$$\varphi = C - V_\infty r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty), \quad (1.2)$$

а также кинематическому и динамическим условиям на поверхности. В (1.2) произвольную константу в дальнейшем полагаем $C = 0$.

В соответствии с (6.4), (6.5) гл. 2 запишем условия в цилиндрической системе координат θ, r в случае слабого изгиба оболочки. Учитывая, что

$$u_2 = v, \quad u_3 = w, \quad \alpha_2 = x_2 = \theta, \quad \alpha_3 = x_3 = r, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1, \quad H_2 = R,$$

$$k_{22} = R^{-1}, \quad k_{21} = 0, \quad \omega_2 = (\partial w / \partial \theta - v) / R, \quad v_2 = \partial \varphi / r \partial \theta, \quad v_3 = \partial \varphi / \partial r,$$

получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \quad (r = R), \quad (1.3)$$

$$Z_\theta = 0, \quad Z_r = p_i - p - w \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (r = R). \quad (1.4)$$

Здесь Z_r представляет собой перепад давления.

Запишем линейные соотношения теории оболочек в плоской задаче согласно (3.8)–(3.10) гл. 1 с учетом

$$N_{22} = N_{\theta\theta}, \quad Q_2 = Q_\theta,$$

$$X_2 = Z_\theta - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad X_3 = Z_r - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Найдем

$$\frac{\partial N_{\theta\theta}}{R \partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Z_\theta,$$

$$\frac{\partial Q_\theta}{R \partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z_r, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - R Q_\theta = 0,$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R}, \quad M_{\theta\theta} = \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right).$$

В этой системе последовательно исключим Q_θ , $N_{\theta\theta}$, $M_{\theta\theta}$. Кроме того, используем условие нерастяжимости срединной поверхности $\epsilon_{\theta\theta} = 0$, откуда

$$\partial v / \partial \theta = -w, \quad v = - \int w d\theta + v_0. \quad (1.6)$$

При перемещениях оболочки, вызванных лишь ее деформацией, $v_0 = 0$. В случае идеальной жидкости в соответствии с (1.4) $Z_\theta = 0$. В результате получим

$$\frac{D}{R^4} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) = \frac{\partial^2 Z_r}{\partial \theta^2}. \quad (1.7)$$

С учетом (1.4), (1.6) условие (1.3) и уравнение (1.7) принимают вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \left(\int w d\theta \right) \frac{\partial^2 \varphi}{r \partial \theta \partial r} \quad (r=R), \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\rho h R^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) = \\ & = \frac{R^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[p_i - p - w \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\int w d\theta \right) \frac{\partial p}{r \partial \theta} \right] \quad (r=R). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Рассматривая статическую задачу взаимодействия, введем потенциал φ_1 и давление p_1 в жидкости в предположении об абсолютной жесткости оболочки ($w_1 \equiv 0$), а также потенциал φ_2 и давление p_2 , порождаемые изгибом оболочки, так что

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad p = p_1 + p_2, \quad w = w_2. \quad (1.10)$$

Подставим (1.10) в (1.1), (1.2), (1.8), (1.9) и учтем, что в рассматриваемом случае слабого изгиба плохо обтекаемого тела $p_2 \ll p_1$, $\partial\varphi_2/\partial\theta \ll \partial\varphi_1/\partial\theta$, . . . Тогда относительно φ_1 , p_1 получается следующая краевая задача:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad p_1 = p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2} [V_\infty^2 - (\nabla\varphi_1)^2], \quad (1.11)$$

$$\partial\varphi_1/\partial r = 0 \quad (r=R), \quad \varphi_1 = -V_\infty r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty), \quad (1.12)$$

а относительно φ_2 , p_2 , w — задача

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad p_2 = -\rho_\infty \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} \right), \quad (1.13)$$

$$\varphi_2 = 0 \quad (r \rightarrow \infty), \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial\theta} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} - w \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} \quad (r=R), \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^6 w}{\partial\theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} = \frac{R^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left[p_i - p_1 - p_2 - w \frac{\partial p_1}{\partial r} + \left(\int w d\theta \right) \frac{\partial p_1}{r \partial\theta} \right] \quad (r=R). \quad (1.16)$$

При выводе (1.15) учтено, что в соответствии с первым выражением (1.12) имеет место $\partial^2 \varphi_1 / \partial r \partial\theta = 0$.

Найдем решение первой задачи. Потенциал φ_1 будем разыскивать в виде ряда по четным функциям θ

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^N \Phi_n(r) \cos n\theta, \quad (1.17)$$

так как обтекание цилиндра симметрично относительно линии $0; \pi$ (рис. 3.1).

При этом из первого уравнения (1.11) следует

$$\frac{d^2 \Phi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \Phi_n = 0.$$

Подстановкой решения этого уравнения в (1.17) получаем

$$\varphi_1 = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^N (A_n r^{-n} + B_n r^n) \cos n\theta, \quad (1.18)$$

где константы в соответствии с условиями (1.12) равны

$$A_0 = B_0 = 0, \quad A_1 = B_1 R^2, \quad B_1 = -V_\infty, \quad A_n = B_n = 0.$$

Следовательно, при поперечном безотрывном обтекании жесткого цилиндра идеальной жидкостью выражения для потенциала φ_1 и давления p_1

в соответствии с (1.11), (1.18) имеют вид

$$\varphi_1 = -V_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad (1.19)$$

$$p_1 = p_\infty - \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \cos 2\theta \right). \quad (1.20)$$

Эпюра давления p_1 на поверхность цилиндра ($r = R$) показана на рис. 3.2 (без учета p_∞). Имеется симметрия давления не только относительно линии $0; \pi$, но и $\pi/2; 3\pi/2$. Последнее есть следствие предположения о безотрывности течения идеальной несжимаемой жидкости и известно в гидромеханике как парадокс Даламбера об отсутствии равнодействующей силы на тело со стороны жидкости.

Переходим ко второй части задачи. Решение φ_2 уравнения (1.13) имеет тот же вид, что и φ_1 в (1.18). Согласно условию (1.14) $B_0 = B_n = 0$.

Представим функцию прогиба также в рядах по четным функциям θ

$$w = \sum_{n=0}^N W_n \cos n\theta. \quad (1.21)$$

Отметим, что ввиду допущения о нерастяжимости срединной поверхности оболочки $W_0 \equiv 0$.

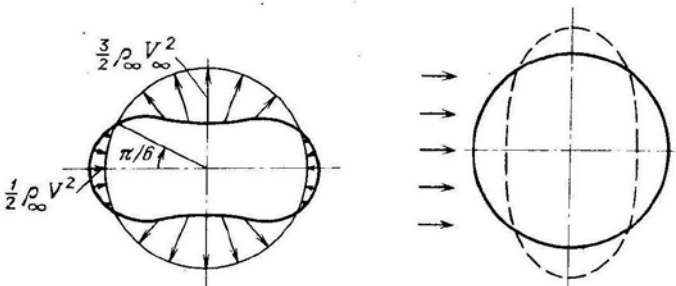
Подставляя (1.21) и выражения для φ_1 и φ_2 в условие (1.15) и приравнявая члены при $\cos k\theta$ одинаковых аргументов, находим

$$A_0 = 0, \quad A_n = V_\infty R^n (W_{n+1} - W_{n-1}), \quad (n \geq 1).$$

Следовательно,

$$\varphi_2 = V_\infty \sum_{n=1}^N \left(\frac{R}{r} \right)^n (W_{n+1} - W_{n-1}) \cos n\theta. \quad (1.22)$$

Так как в правой части (1.16) нет производных от p_2 по радиусу (в отличие от p_1), при вычислении p_2 по (1.13) первый член в нем можно



Р и с. 3.2. Распределение переменной части давления на жестком цилиндре при безотрывном обтекании

Р и с. 3.3. Форма оболочки при потенциальном безотрывном обтекании

опустить ($\partial\varphi_1/\partial r = 0$ при $r = R$). Тогда

$$p_2 = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{R} \sum_{n=1}^N n(W_{n+1} - W_{n-1}) [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta]. \quad (1.23)$$

Таким образом, все члены в правой части уравнения изгиба (1.16) выражены через параметры невозмущенного потока и функцию прогиба оболочки. Подставляя в (1.16) выражения (1.20), (1.21), (1.23) и пользуясь формулами

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta),$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\mu} \sum_{n=1} (n^2 - 1)^2 n^2 W_n \cos n\theta &= 4R \cos 2\theta + \sum_{n=1} n(W_{n+1} - W_{n-1}) \times \\ &\times [(n^2 - 1)^2 \cos(n-1)\theta - (n+1)^2 \cos(n+1)\theta] + 2 \sum_{n=1} n^2 W_n \cos n\theta - \\ &- \sum_{n=1} W_n [(n-2)^2 \cos(n-2)\theta + (n+2)^2 \cos(n+2)\theta] + \\ &+ \sum_{n=1} \frac{1}{n} W_n [(n-2)^2 \cos(n-2)\theta - (n+2)^2 \cos(n+2)\theta]. \end{aligned}$$

Здесь через μ обозначено отношение скоростного напора $\rho_\infty V_\infty^2/2$ к величине D/R^3 , характеризующей жесткость оболочки,

$$\mu = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 R^3}{2D}, \quad (1.24)$$

которое будем называть *параметром гидроупругости*. В этой тригонометрической сумме приравняем нулю члены при $\cos k\theta$ одинаковых аргументов. При этом получим систему алгебраических уравнений относительно W_n

$$\begin{aligned} W_3 &= 0, \\ \left(\frac{9}{2\mu} - 2\right) W_2 + \frac{9}{4} W_4 &= -R, \\ (n-3) W_{n-2} + \left[\frac{(n^2-1)^2}{2\mu} - 2(n-1)\right] W_n + \left(n + \frac{1}{n+2}\right) W_{n+2} &= 0 \\ (n \geq 3). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Амплитуды прогиба с нечетными индексами, как это следует из рассмотрения (1.25), тождественно равны нулю. При $N = 4$ из (1.25) следует система двух уравнений

$$\left(\frac{9}{2\mu} - 2\right) W_2 + \frac{9}{4} W_4 = -R, \quad W_2 + \left(\frac{225}{2\mu} - 6\right) W_4 = 0,$$

откуда

$$W_2 = - \frac{2R\mu}{9 - 4\mu \left(1 + \frac{9\mu}{900 - 48\mu}\right)}, \quad (1.26)$$

$$W_4 = \frac{4R\mu^2}{\left[9 - 4\mu \left(1 + \frac{9\mu}{900 - 48\mu}\right)\right](225 - 12\mu)}.$$

Поскольку за положительное направление w принята внешняя нормаль к оболочке, из (1.21) и (1.26) следует, что цилиндрическая оболочка при обтекании по принятой выше модели симметрично вытягивается поперек потока (рис. 3.3). С возрастанием скорости или уменьшением жесткостных характеристик оболочки (с увеличением μ) прогибы ее монотонно увеличиваются. В рамках линейной теории они возрастают неограниченно, если параметр гидроупругости μ приближается к значению

$$\mu_+ = 2,20. \quad (1.27)$$

Это значение μ будем условно называть *критическим*.

Необходимо сказать, однако, что линейная теория перестает быть верной задолго до достижения параметром μ критического значения (1.27). Поэтому значение μ_+ служит лишь некоторым ориентиром в порядках величин параметра гидроупругости. Полученное решение верно лишь при $\mu \ll \mu_+$. При $\mu > \mu_+$ амплитуды W_2 и W_4 меняют свой знак, что соответствует вытягиванию оболочки по потоку. Этот результат неверен качественно.

Линейная постановка задачи будет снята в последующих разделах этой главы.

Как видно из (1.26), ряды (1.21) – (1.23) быстро сходятся. Если, например, ограничиться случаем $N = 2$ или 3, вместо (1.26) и (1.27) получим

$$W_2 = -2R\mu(9 - 4\mu)^{-1}, \quad \mu_+ = 2,25. \quad (1.28)$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче уже гармоника $\cos 2\theta$ дает полную картину взаимодействия потока и оболочки.

§ 2. Влияние разделения деформированной и недеформированной поверхности в контактных условиях

Рассмотрим вклад в полученное выше решение разделения деформированной поверхности от недеформированной при записи контактных условий, т.е. последнего члена в правой части (1.15) и последних двух членов в правой части (1.16). Для этого рассмотрим отношение этих членов к

ОСНОВНЫМ:

$$\frac{(\partial^2 \varphi_1 / \partial r^2) R^2 w}{(\partial \varphi_1 / \partial \theta) (\partial w / \partial \theta)} = \frac{\sum_{s=1,3,\dots} (W_{s+1} + W_{s-1}) \cos s \theta}{\sum_{s=1,3,\dots} [(s+1) W_{s+1} - (s-1) W_{s-1}] \cos s \theta},$$

$$\frac{(\partial p_1 / \partial r) w}{p_2} = \frac{\sum_{s=2,4,\dots} (2W_s - W_{s+2} - W_{s-2}) \cos s \theta}{\sum_{s=2,4,\dots} [(s+1) W_{s+2} - 2s W_s + (s-1) W_{s-2}] \cos s \theta} \quad (2.1)$$

Здесь произведено пересуммирование в рядах с учетом нулевых амплитуд W_n с нечетными индексами и $W_0 = 0$. Например, сумма $(\partial^2 \varphi_1 / \partial r^2) w$ записана

$$\sum_{n=1} W_n \cos n \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sum_{n=1} W_n [\cos (n-1) \theta + \cos (n+1) \theta] =$$

$$= \frac{1}{2} [W_2 \cos \theta + (W_2 + W_4) \cos 3 \theta + \dots] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1,3,\dots} (W_{s-1} + W_{s+1}) \cos s \theta.$$

Как видно из (1.26), входящие сюда ряды быстро сходятся. Принимая во внимание только главные амплитуды W_2 и W_4 , заключаем, что указанные члены в задаче изгиба оболочки, обтекаемой жидкостью вдоль криволинейной координаты, имеют одинаковый порядок с главными членами. В самом деле, при $\theta = \pi/3$ первое отношение (2.1) равно $\sim 1/6$ (учтено, что $W_2 \gg W_4$). При некоторых значениях угла θ оно обращается в нуль, при других — в бесконечность (ввиду того, что касательная составляющая скорости $\partial \varphi_1 / \partial \theta$, а также функция прогиба w и ее производная обращаются в нуль). Второе отношение при $\theta = 0$ равно ~ 1 , при $\theta = \pi/3$ имеет порядок $(225 - 12\mu) / (2\mu)$.

Более наглядными являются оценки вклада указанных членов в контактных условиях по непосредственному решению задачи. Начнем с оценки влияния последнего члена в правой части уравнения (1.16). Если его отбросить, то вместо (1.25) получаем

$$W_1 - W_3 = 0,$$

$$(9/2\mu - 2) W_2 + 2 W_4 = -R,$$

$$(n-2) W_{n-2} + [(n^2 - 1)^2 / 2\mu - 2(n-1)] W_n + n W_{n+2} = 0 \quad (n \geq 3),$$

откуда при $N=4$ ($W_1 = W_3 = 0$)

$$W_2 = - \frac{2R\mu}{9 - 4\mu \left(1 + \frac{4\mu}{225 - 12\mu} \right)},$$

$$W_4 = \frac{8R\mu^2}{\left[9 - 4\mu \left(1 + \frac{4\mu}{225 - 12\mu} \right) \right] (225 - 12\mu)} \quad (2.2)$$

Сравнение этих значений W_2 , W_4 с (1.26) показывает, что разница между ними незначительна. В частности, при $N = 2$ значение W_2 полностью совпадает с (1.28). Критическое значение параметра μ в решении (2.2) близко к (1.27):

$$\mu_+ = 2,16. \quad (2.3)$$

Если же отбросить еще и член $w \partial p_1 / \partial r$ в правой части (1.16), то аналогичные вышеприведенным выкладки дают

$$W_2 = - \frac{2R\mu}{9 - 8\mu \left(1 + \frac{9\mu}{550 - 32\mu} \right)}, \quad (2.4)$$

$$W_4 = \frac{12R\mu^2}{\left[9 - 8\mu \left(1 + \frac{9\mu}{550 - 32\mu} \right) \right] (225 - 16\mu)}.$$

Соответствующее критическое значение μ равно

$$\mu_+ = 1,12, \quad (2.5)$$

т.е. в два раза ниже, чем (1.27), даваемое при полном учете разделения деформированной поверхности от недеформированной.

Далее, рассмотрим влияние последнего члена в кинематическом условии (1.15). Без его учета, но с сохранением члена $w \partial p_1 / \partial r$ в (1.16) получаем следующие выражения для дополнительного давления:

$$p_2 = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{R} \sum_{n=1}^N [(n+1) W_{n+1} - (n-1) W_{n-1}] [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta]$$

и для амплитуд прогиба

$$W_2 = - \frac{2R\mu}{9 - 4\mu \left(1 + \frac{3\mu}{225 - 12\mu} \right)}, \quad (2.6)$$

$$W_4 = \frac{4R\mu^2}{\left[9 - 4\mu \left(1 + \frac{3\mu}{225 - 12\mu} \right) \right] (225 - 12\mu)}.$$

Критическое значение μ равно

$$\mu_+ = 2,18 \quad (2.7)$$

и мало отличается от значения (1.27).

Таким образом, в контактных условиях из членов, порожденных разделением деформированной и недеформированной поверхностей оболочки,

наиболее существенным является $w \partial p / \partial r$, входящий в динамическое условие (1.4), или $w \partial p_1 / \partial r$ в (1.16).

Если отбросить в (1.15) последний, а в (1.16) — два последних члена то p_2 дастся выражением (2.5), а амплитуды W_2, W_4 будут равны

$$W_2 = - \frac{2R\mu}{9 - 8\mu \left(1 + \frac{4\mu}{225 - 16\mu}\right)},$$

$$W_4 = \frac{8R\mu^2}{\left[9 - 8\mu \left(1 + \frac{4\mu}{225 - 16\mu}\right)\right] (225 - 16\mu)}.$$
(2.8)

При этом параметр гидроупругости

$$\mu_+ = 1,10$$
(2.9)

вместо $\mu_+ = 2,20$ по (1.27).

Заметим, что в случае обтекания поверхности по прямолинейной координате (обтекание пластины параллельно ее плоскости, цилиндрической оболочки вдоль ее образующей и т.д.) указанные члены в (1.15) и (1.16) обращаются в нуль, и при записи контактных условий деформированная и недеформированная поверхности отождествляются. При этом мы приходим к контактным условиям, применяющимся в классической линейной теории дивергенции и флаттера тонких несущих тел. Итак, классическая теория взаимодействия дает в рассматриваемой задаче деформации плохообтекаемого тела (цилиндра) критическое значение μ_+ , которое в два раза ниже, чем дает уточненная теория.

Наконец, рассмотрим задачу с наибольшим упрощением. Давление, действующее на оболочку, определим, предполагая ее недеформируемость. Следовательно, все давление на поверхность сводится к p_1 из (1.20). При этом деформация оболочки определяется из уравнения (1.16) с извест-

ной правой частью. Данное решение может быть получено также из (1.26) или из последующих формул для амплитуд прогиба отбрасыванием в знаменателе членов, содержащих параметр μ :

$$W_2 = -2R\mu/9,$$

$$W_4 = W_6 = \dots = 0.$$
(2.10)

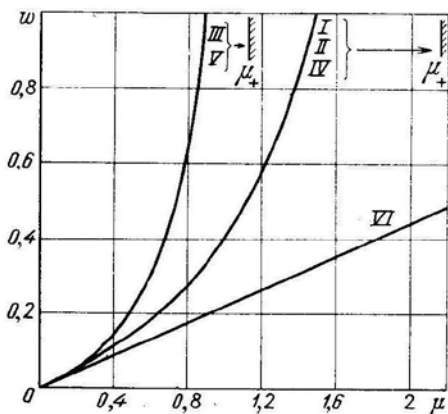


Рис. 3.4. Влияние на решение условий различной точности на контактной поверхности

Так как в данном приближении задача перестает быть задачей взаимодействия, то нет и критического параметра гидроупругости. Это решение может быть уточнено применением метода последовательных приближений, причем существуют эффективные методы усиления сходимости [9].

Таким образом, мы получили решения задачи с применением условий различной точности на поверхности контакта оболочки и жидкости. На рис. 3.4 приведены значения безразмерного прогиба $w = (W_2 + W_4)/R$ в лобовой точке A ($\theta = 0$). При этом решение (1.26), полученное удовлетворением уточненных условий контакта, обозначено цифрой *I*. Цифрой *II* обозначено решение (2.2), когда в динамическом условии контакта не учитывается влияние касательной составляющей перемещения оболочки на изменение давления на нее; цифрой *III* — значение прогиба (2.4), когда при записи динамического условия деформированная поверхность отождествляется с недеформированной (в кинематическом условии это разделение сохраняется); цифрой *IV* — значение (2.6), полученное при противоположных (2.4) предположениях. Решение (2.8), полученное с применением контактных условий классической теории дивергенции, обозначено цифрой *V*, а значение (2.10), найденное при гидродинамическом давлении на абсолютно жесткую оболочку, — цифрой *VI*. В верхней части рис. 3.4 указаны критические значения параметра гидроупругости μ_+ .

Из приведенных данных видно, что условия различной точности на контактной поверхности могут приводить к различным результатам. Наиболее важным оказывается уточнение значения давления с учетом перемещения контура по нормали.

§ 3. Динамическое поведение оболочки в потоке

Представляет интерес рассмотрение в динамической постановке указанной в § 1 задачи. Все предположения, принятые при ее формулировании, оставим без изменения. Поэтому будут справедливы уравнения и условия (1.1), (1.2), (1.8), (1.9), к которым нужно присоединить начальные условия.

Влиянием среды, заключенной внутри полости, пренебрегаем. Это может быть допустимо, когда, например, плотность среды мала по сравнению с плотностями материала оболочки и обтекающей жидкости. При необходимости это влияние может быть легко учтено.

Динамические явления могут иметь место на фоне статического изгиба оболочки и соответствующего поля течения жидкости вокруг нее. Поэтому возмущенные значения потенциала скорости φ_* , давления p_* и прогиба w_* представим в виде

$$\begin{aligned}\varphi_* &= \varphi_0(r, \theta) + \varphi(r, \theta, t), \\ p_* &= p_0(r, \theta) + p(r, \theta, t), \\ w_* &= w_0(\theta) + w(\theta, t).\end{aligned}\tag{3.1}$$

В дальнейшем приближенном анализе динамического поведения системы исходное статическое состояние оболочки отождествляем с ее недефор-

мированным состоянием: $w_0 = 0$. Соответственно, $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 \approx \varphi_1$, $p_0 = p_1 + p_2 \approx p_1$, где по обозначениям § 1 φ_1 , p_1 — параметры потока в случае абсолютно жесткой оболочки, а φ_2 , p_2 — возмущения за счет ее деформации. Влияние деформированного состояния оболочки и измененного поля течения на динамическое поведение будет учтено в § 7. Итак,

$$\varphi_* = \varphi_1 + \varphi, \quad p_* = p_1 + p, \quad w_* = w. \quad (3.2)$$

Приписывая в уравнениях и условиях (1.1), (1.2), (1.8), (1.9) параметрам φ , p , w нижние индексы звездочки и учитывая (3.2), получим необходимое соотношение относительно возмущений φ , p , w . Динамические прогибы будем считать малыми. Поэтому $\partial\varphi/\partial\theta \ll \partial\varphi_1/\partial\theta$, $p \ll p_1$, и уравнения могут быть линеаризованы. При этом в правых частях (1.8) и (1.9) опускаем последние члены. Как известно из предыдущих разделов, при линеаризации в (1.8) он обращается в нуль, а влияние последнего члена в (1.9) незначительно.

Следовательно, относительно возмущений имеем уравнения

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad p = -\rho_\infty \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (3.3)$$

Условие на бесконечности

$$\varphi = 0 \quad (r \rightarrow \infty). \quad (3.4)$$

Кинематическое и динамическое условия

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} w + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (r = R), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\rho h R^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) = \\ & = -\frac{R^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(p + \frac{\partial p_1}{\partial r} w \right) \quad (r = R). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Не вдаваясь в подробности о начальных условиях, решение задачи разыскиваем в классе функций

$$w = e^{\lambda t} \sum_{n=0}^N W_n \cos n\theta, \quad \varphi = e^{\lambda t} \sum_{n=0}^N \Phi_n \cos n\theta. \quad (3.7)$$

Так же как при статическом изгибе, $W_0 = 0$ в силу нерастяжимости оболочки, предполагается симметрия относительно линии, проходящей через точки $\theta = 0, \theta = \pi$ (рис. 3.1).

В представлении выражения для потенциала (3.7) решение уравнения Лапласа (3.3) имеет по пространственным координатам вид (1.18). Подчиняя это решение условию (3.4) ($B_n = 0$) и подставляя (3.7), (1.19) в (3.5), запишем

$$A_n = -(\lambda/n) R^{n+1} W_n + V_\infty R^n (W_{n+1} - W_{n-1}) \quad (n \geq 1).$$

Следовательно,

$$\varphi = e^{\lambda r} \sum_{n=1}^N [- (\lambda R/n) W_n + V_{\infty} (W_{n+1} - W_{n-1})] (R/r)^n \cos n\theta. \quad (3.8)$$

Формула для определения возмущения давления (3.3) на поверхности оболочки ($r = R$) приобретает вид

$$p = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}}{R} \sum_{n=1}^N [\lambda R W_n - n V_{\infty} (W_{n+1} - W_{n-1})] \times \\ \times \left[\frac{\lambda R}{n V_{\infty}} \cos n\theta + \cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta \right] e^{\lambda r}. \quad (3.9)$$

Здесь учтено, что $\partial \varphi_1 / \partial r = 0$ при $r = R$.

Подстановка выражений (3.7), (3.9), (1.20) в (3.6) и приравнивание нулю членов при $\cos k\theta$ одинаковых аргументов дает

$$[(1 + \nu) \chi^2 - 1] W_1 - 2\chi W_2 + W_3 = 0 \quad (W_0 \equiv 0), \\ \frac{1}{2} [(n^2 - 1)^2 \mu^{-1} + (n^2 + 1) \nu \chi + n^{-1} \chi^2 - 2(n-1)] W_n + \\ + 2\chi (W_{n-1} - W_{n+1}) + (n-2) W_{n-2} + n W_{n+2} = 0 \quad (n \geq 2), \quad (3.10)$$

где кроме параметра гидроупругости μ по (1.24) введены обозначения

$$\nu = \frac{2\rho h}{\rho_{\infty} R}, \quad \chi = \frac{R\lambda}{V_{\infty}}. \quad (3.11)$$

Параметр ν представляет собой отношение массы стенки оболочки к массе вытесненной ею жидкости.

Согласно (3.10) при $N = 2$ из условия существования ненулевого решения для W_1, W_2 получаем

$$(1 + \nu) [1 + (5/4) \nu] \chi^4 + [7 - (5/4) \nu - (1 + \nu) (4 - 9\mu^{-1})] \chi^2 + \\ + (4 - 9\mu^{-1}) = 0. \quad (3.12)$$

Отсюда видно, что для $\chi = 0$ ($\lambda = 0$) значение μ , при котором происходит неограниченное вытягивание оболочки поперек потока, есть $\mu_+ = 2.25$, что совпадает с (1.28).

Подставив в (3.12) $\chi = \epsilon + i\omega$ и исключив из полученных двух уравнений ω , приходим к биквадратному уравнению относительно ϵ . Один из корней его будет положительным, если

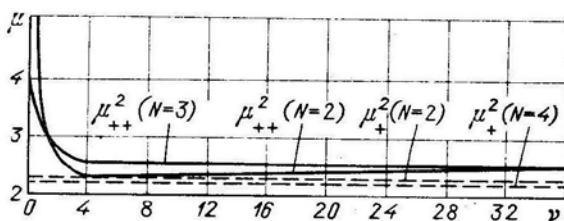
$$[7 - (5/4) \nu - (1 + \nu) (4 - 9\mu^{-1})]^2 - 4(1 + \nu) [1 + (5/4) \nu] (4 - 9\mu^{-1}) \leq 0,$$

откуда значение μ , при превышении которого будет иметь место неограниченное колебательное (при $\omega \neq 0$) возрастание решения, равно

$$\mu_{++} = \frac{9(1 + \nu)}{\sqrt{32 + 40\nu} + (11/4)\nu - 5}. \quad (3.13)$$

График функции (3.13) приведен на рис. 3.5. Видно, что наименьшее значение μ_{++} приходится на интервал $3 < \nu < 10$ и близко к критическому параметру $\mu_+ = 2,16$ в статическом случае, полученному при $N = 2$. Значения μ_+ также нанесены на графике. Возникновение вибрации затруднено при малой величине отношения массы стенки оболочки к массе вытесненной ею жидкости (значение μ_{++} велико в интервале $0 < \nu < 1$). Предельные значения $\mu_{++} = 13,65$ (при $\nu = 0$) и $\mu_{++} = 3,27$ (при $\nu \rightarrow \infty$).

При рассмотрении определителя третьего порядка (3.10) ($N = 3$) нахождение корней при разных ν проводилось численно. Для сравнения с

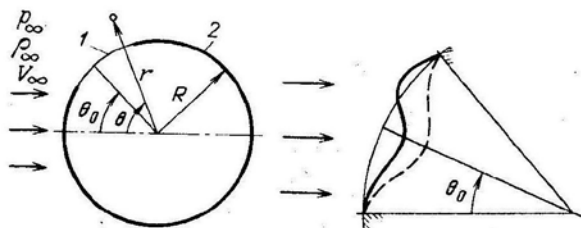


Р и с. 3.5. Критические параметры гидроупругости

результатами двухчленной аппроксимации (3.13) (взаимодействия форм колебаний $\cos \theta$ и $\cos 2\theta$) они также даны на рис. 3.5. Дальнейшее увеличение порядка определителя (3.10) (например, $N = 4$), т.е. рассмотрения взаимодействия первых четырех форм колебаний, не приводит к существенному изменению значения μ_{++} .

§ 4. Изгиб пологой цилиндрической панели в потоке

Рассматривается плоская деформация бесконечно длинной пологой цилиндрической панели 1 (рис. 3.6), являющейся частью цилиндрической поверхности, при безотрывном поперечном обтекании ее установившимся потоком неограниченной идеальной несжимаемой и невесомой жидкости. Остальная часть 2 поверхности считается абсолютно жесткой. Таким образом, ставится та же задача, что в § 1. При этом сохраняются принятые там допу-



Р и с. 3.6. Цилиндрическая панель в потоке жидкости

щения относительно движения жидкости. Что касается деформации пологой оболочки, то допускается возможность ее "прохлопывания". Поэтому привлекаются нелинейные уравнения, в которых учитываются мембранное усилие и изменение кривизны оболочки. В данном случае допущение о нерастяжимости срединной поверхности неприменимо и поэтому здесь не используется.

Учитывая известные упрощения для пологой оболочки, а именно возможность пренебрежения перерезывающей силой Q_θ в первом уравнении, производной от касательной составляющей v в выражении для изменения кривизны, и исходя из (3.8) – (3.10) гл. 1, записываем

$$\begin{aligned} \partial N_{\theta\theta} / \partial \theta &= 0, \\ \frac{\partial Q_\theta}{R \partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R^*} &= -Z_r, \quad \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - R Q_\theta = 0, \\ \frac{1}{R_*} &= \frac{1}{R} + \kappa_{\theta\theta} = \frac{1}{R} - \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2}, \\ N_{\theta\theta} &= B \epsilon_{\theta\theta} = B \left[\frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \right], \\ M_{\theta\theta} &= -\frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Интегрируя первое уравнение, находим

$$\frac{CR}{B} = \frac{\partial v}{\partial \theta} + w + \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2, \quad (4.2)$$

где C – константа интегрирования. Исключая из оставшихся соотношений $M_{\theta\theta}$, Q_θ и учитывая (4.2), получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{CR^3}{D} \left(1 - \frac{\partial^2 w}{R \partial \theta^2} \right) = \frac{R^4}{D} Z_r. \quad (4.3)$$

Предполагаем, что панель жестко закреплена по краям к жесткому цилиндру (рис. 3.6):

$$v = w = \partial w / \partial \theta = 0 \quad (\theta = \theta_1, \theta_2). \quad (4.4)$$

Для слабого изменения поля течения (как это можно заключить по § 1) и случая пологой оболочки кинематическое и динамическое условия в соответствии с оценками § 5 гл. 2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (r = R), \quad (4.5)$$

$$Z_r = p_i - p - w \frac{\partial p}{\partial r} \quad (r = R). \quad (4.6)$$

В том же смысле, что в (1.10), введем потенциалы φ_1 , φ_2 и давления p_1 , p_2 . Тогда задача относительно φ_1 , p_1 имеет вид (1.11) и (1.12). Что

касается задачи относительно φ_2 , p_2 , w , v , то (1.13) и (1.14) остаются неизменными, но в кинематическом условии будет разность, обусловленная неоднородностью поверхности:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - w \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} \quad (r=R, \theta_1 < \theta < \theta_2), \quad (4.7)$$

$$\partial \varphi_2 / \partial r = 0 \quad (r=R, \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi + \theta_1). \quad (4.8)$$

Вместо (1.16) имеем из (4.3) и (4.6) уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{CR^3}{D} \left(1 - \frac{\partial^2 w}{R \partial \theta^2} \right) = \frac{R^4}{D} \left(p_i - p_1 - p_2 - w \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) \quad (r=R, \theta_1 < \theta < \theta_2), \quad (4.9)$$

которое рассматривается совместно с (4.2).

Выражения для φ_1 и p_1 известны из (1.19), (1.20). При решении задачи относительно φ_2 , p_2 , w , v функцию w , удовлетворяющую последним двум условиям (4.4), представим в виде

$$-w = \frac{L^2}{R} \left\{ \sum_{i=1}^I f_i [1 + (-1)^{i-1} \cos i\pi\xi] + \sum_{j=1}^J q_j \sin j\pi\xi \cos j \frac{\pi}{2} \xi \right\}, \quad (4.10)$$

где первая сумма задает симметричную, а вторая — несимметричную форму прогиба панели. Здесь $\xi = (\theta - \theta_0)R/L$, $2L$ — длина дуги панели.

Потенциал φ_2 , удовлетворяющий уравнению Лапласа (1.13) и условию (1.14), запишем в виде

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^N \left(\frac{R}{r} \right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (4.11)$$

О такой форме потенциала свидетельствует выражение (1.22). Но, в отличие от рассмотренной там задачи, здесь отсутствует симметрия относительно линии, проходящей через точки 0; π , так как расположение панели по углу произвольно.

Подставляя выражения (1.19), (4.10), (4.11) в (4.7) и (4.8) и интегрируя последние методом Бубнова — Галеркина

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\partial w}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - w \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} \right) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} d\theta,$$

находим

$$A_n = \frac{2V_\infty L}{\pi n} \left(\sum_{i=1}^I C_{ni} f_i + \sum_{j=1}^J D_{nj} q_j \right), \quad (4.12)$$

$$B_n = \frac{2V_\infty L}{\pi n} \left(\sum_{i=1}^I F_{ni} f_i + \sum_{j=1}^J G_{nj} q_j \right).$$

Входящие сюда C_{ni} , D_{nj} , F_{ni} , G_{nj} имеют вид

$$C_{ni} = (i\pi)^2 n \left[\frac{\cos(n+1)\theta_0 \sin \beta_{n+1}}{(n+1)(\beta_{n+1}^2 - i^2 \pi^2)} - \frac{\cos(n-1)\theta_0 \sin \beta_{n-1}}{(n-1)(\beta_{n-1}^2 - i^2 \pi^2)} \right],$$

$$D_{nj} = \frac{(-1)^j}{2} \left[\left(\frac{l\beta_{n+1} + \alpha_{j+1}^2}{\beta_{n-1}^2 - \alpha_{j+1}^2} - \frac{l\beta_{n-1} + \alpha_{j-1}^2}{\beta_{n-1}^2 - \alpha_{j-1}^2} \right) \sin(n-1)\theta_0 \cos \beta_{n-1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{l\beta_{n+1} - \alpha_{j+1}^2}{\beta_{n+1}^2 - \alpha_{j+1}^2} - \frac{l\beta_{n+1} - \alpha_{j-1}^2}{\beta_{n+1}^2 - \alpha_{j-1}^2} \right) \sin(n+1)\theta_0 \cos \beta_{n+1} \right],$$

$$F_{ni} = (i\pi)^2 n \left[\frac{\sin(n+1)\theta_0 \sin \beta_{n+1}}{(n+1)(\beta_{n+1}^2 - i^2 \pi^2)} - \frac{\sin(n-1)\theta_0 \sin \beta_{n-1}}{(n-1)(\beta_{n-1}^2 - i^2 \pi^2)} \right],$$

$$G_{nj} = \frac{(-1)^j}{2} \left[\left(\frac{l\beta_{n-1} + \alpha_{j-1}^2}{\beta_{n-1}^2 - \alpha_{j-1}^2} - \frac{l\beta_{n+1} + \alpha_{j+1}^2}{\beta_{n-1}^2 - \alpha_{j+1}^2} \right) \cos(n-1)\theta_0 \cos \beta_{n-1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{l\beta_{n+1} - \alpha_{j-1}^2}{\beta_{n+1}^2 - \alpha_{j-1}^2} - \frac{l\beta_{n+1} - \alpha_{j+1}^2}{\beta_{n+1}^2 - \alpha_{j+1}^2} \right) \cos(n+1)\theta_0 \cos \beta_{n+1} \right].$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha_{j\pm 1} = (2j \pm 1)\pi/2, \quad \beta_{n\pm 1} = (n \pm 1)l, \quad l = L/R.$$

В выражении C_{ni} последний член в круглых скобках при $n = 1$ равен $-l/i^2 \pi^2$, а в F_{ni} последний член при $n = 1$ обращается в нуль.

Согласно (1.13), (1.19), (4.11), (4.12) формула для возмущения давления при $r = R$ имеет вид

$$p_2 = \frac{2\rho_\infty V_\infty^2 l}{\pi} \sum_{n=1}^N \left\{ \left(\sum_{i=1}^I C_{ni} f_i + \sum_{j=1}^J D_{nj} q_j \right) [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] + \right. \\ \left. + \left(\sum_{i=1}^I F_{ni} f_i + \sum_{j=1}^J G_{nj} q_j \right) [\sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta] \right\}. \quad (4.13)$$

В (4.9) и (1.20) разность $p_i - p_\infty$ представляет собой внутренний перепад статического давления. С целью сравнения расчетов с экспериментальными данными в дальнейшем будем считать, что этот перепад обусловлен гидростатическим давлением на панель, погруженную вместе с жесткой цилиндрической частью в воду. Если глубина погружения центра панели ($\xi = 0$) равна H , то

$$p_i - p_\infty = -\rho_\infty g \{ H - R[\sin(\theta_0 + l\xi) - \sin \theta_0] \}. \quad (4.14)$$

Из (4.2) и (4.10), удовлетворяя условию $v = 0$ при $\xi = \pm 1$, будем иметь

$$\sigma^2 = \frac{3k^2}{4} \left[\sum_{i=1}^I \left(1 - \frac{i^2 \pi^2}{4} \right) f_i - \frac{\pi^2}{32} \sum_{j=1}^J (4j^2 + 1) q_j^2 \right], \quad (4.15)$$

где введены обозначения безразмерных параметров кривизны и мембран-

ного усилия

$$k = 4L^2/Rh, \quad \sigma^2 = -CL^2/D.$$

Произведя интегрирование уравнения (4.9) с учетом (1.20), (4.10), (4.13), (4.14) по методу Бубнова – Галеркина, находим систему уравнений

$$\begin{aligned} m^4 \pi^4 f_m + (2 - m^2 \pi^2 f_m) \sigma^2 = \\ = -\gamma E_m + \mu \left[K_m + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i=1}^I P_{mni} f_i + \sum_{j=1}^J Q_{mnj} q_j \right) \right] \\ (m = 1, 2, \dots, I), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{16} \left\{ \frac{\pi^2}{4} [(2s+1)^4 + (2s-1)^4] - 2\sigma^2(4s^2+1) \right\} f_s = \\ = -\gamma H_s + \mu \left[T_s + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i=1}^I R_{mni} f_i + \sum_{j=1}^J S_{mnj} q_j \right) \right] \quad (s = 1, 2, \dots, J). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь введены параметры гидростатической нагрузки и гидроупругости

$$\gamma = -\rho_\infty g H R L^2 / D, \quad \mu = \rho_\infty V_\infty^2 R L^2 / 2D. \quad (4.18)$$

Коэффициенты E_m , K_m , H_s , T_s выражаются через относительную ширину панели l , угол ее установки θ_0 , глубину погружения H и параметры $\alpha_{i\pm 1}$. Что касается P_{mni} , Q_{mnj} , R_{mni} , S_{mnj} , то они кроме l , θ_0 , $\alpha_{i\pm 1}$ содержат также $\beta_{n\pm 1}$ и C_{ni} , D_{nj} , F_{ni} , G_{nj} . Эти коэффициенты не приводятся ввиду их громоздкости [6].

Система нелинейных алгебраических уравнений (4.15)–(4.17) относительно f_i , q_j решается при заданных значениях параметров гидростатической нагрузки и гидроупругости γ , μ . По найденным f_i , q_j определяются прогибы панели w и давление возмущения p_2 в соответствии с (4.10), (4.13). Система эта решена численно методом Ньютона [6]. При этом итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполняется условие

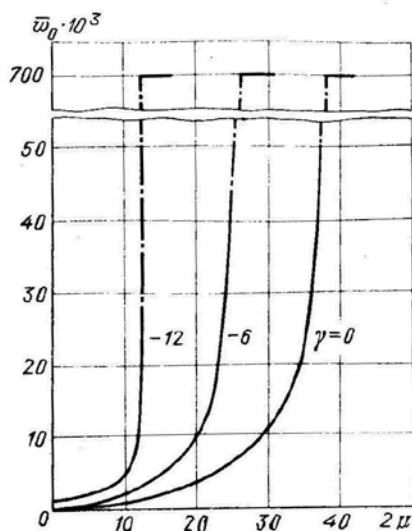
$$|(x_k^{(m+1)} - x_k^{(m)})/x_k^{(m+1)}| \leq 10^{-5},$$

где $x_k^{(m)}$ представляет собой m -е приближение одного из изолированных корней, соответствующего значениям параметров γ_k , μ_k .

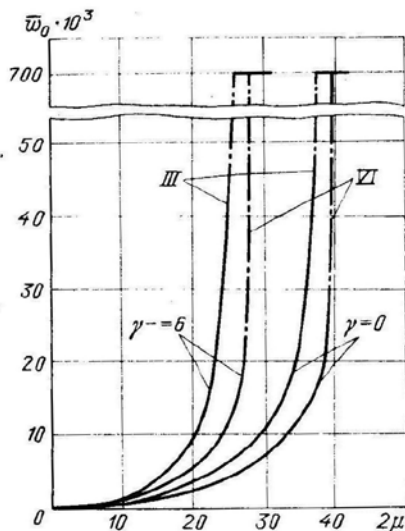
§ 5. Результаты исследования. Сравнение с экспериментом

Перейдем к результатам решения задачи. Процесс деформации панели в зависимости от параметра гидроупругости μ можно охарактеризовать изменением прогиба в отдельных характерных точках по длине панели. Проследим за тем, как меняется безразмерный прогиб в центре ее $\bar{w}_0 = w/R/L^2$ при трех значениях параметра гидростатической нагрузки $\gamma = 0$; -6 ; -12 (рис. 3.7).

Эти данные получены для варианта условий контакта, который мы обозначили в § 2 под номером III. При этом в (4.7) сохранены все члены, а в (4.9) последний член в правой части уравнения опущен. Далее приняты: параметр кривизны $k = 222$, угол установки $\theta_0 = 13^\circ$ и $L/R = 0,228$.



Р и с. 3.7. Зависимость прогиба панели от параметров гидроупругости



Р и с. 3.8. Влияние условий различной точности на значение прогиба панели

Как следует из графика, с увеличением параметра μ , так же как в случае замкнутой цилиндрической оболочки, прогибы возрастают. При приближении μ к некоторому μ_+ , зависящему от параметра γ , прогибы возрастают резко. Эта часть кривых нанесена штрихпунктирной линией. Так же, как выше при рассмотрении замкнутой оболочки, это значение условно назовем критическим. Процесс деформации сопровождается выворачиванием панели, ее "хлопком". С увеличением внешнего гидростатического давления — γ это состояние наступает при меньших значениях μ_+ .

При обтекании панели жидкостью, в отличие от случая заданного равномерного внешнего давления [18], она с самого начала воздействия потока (с малых значений μ) прогибается по несимметричной форме, как это изображено на рис. 3.6 сплошной линией. Там же состояние панели после выворачивания ее показано штриховой линией.

Кривые на рис. 3.7 построены при двухчленной аппроксимации симметричной части прогиба панели и одночленной — несимметричной части (4.10), т.е. $I = 2$ и $J = 1$. Как показывают многочисленные вычисления, такая аппроксимация достаточно точно описывает изгиб панели. Например, для панели с параметром $k = 175$ при угле установки $\theta_0 = 30^\circ$ и параметре гидростатического перепада давления $\gamma = -10,34$ учет по одному члену в (4.10) ($I = 1, J = 1$) дает критический параметр $\mu_+ = 10,55$; при $I = 3, J = 1$ получаем $\mu_+ = 10,40$; при $I = 2, J = 3$ — $\mu_+ = 10,38$. Таким образом, принятое число членов при получении результатов, приведенных на рис. 3.7, вполне достаточно. При этом к истинному значению μ_+ приближаемся монотонно сверху, как это имеет место при применении метода Бубнова —

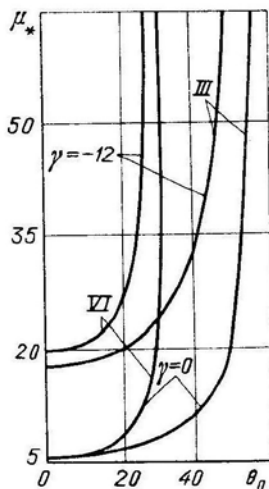
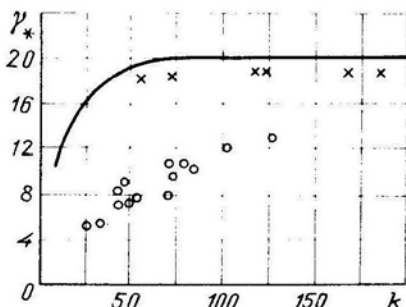


Рис. 3.9. Зависимость критического параметра гидроупругости от угла установки панели

Рис. 3.10. Сравнение расчетных и экспериментальных значений критического параметра гидростатической нагрузки



Галеркина в задаче нагружения панели равномерной нагрузкой [18]. Также численно проверялась практическая сходимость по n .

На рис. 3.8 приводится сравнение значений безразмерного прогиба в центре панели w_0 , полученных с использованием давления на панель без учета ее деформации (аналогично варианту VI в § 2), со значениями из рис. 3.7 (вариант III) при параметрах $\gamma = 0$; -6 . Так же, как и в случае слабого изгиба оболочки, разобранный в § 2, вариант VI условий контакта приводит к заниженным значениям прогиба. В силу учета нелинейностей в уравнениях оболочки в данной задаче прогибы являются конечными. Они определяются прощелкнутым положением панели. Это состояние является устойчивым.

Если считать гидростатическое давление (4.14) не зависящим от угла θ (т.е. $p_i - p_\infty = -\rho_\infty gH$), то при $\theta_0 = 0$ нагружение панели относительно ее центра будет симметричным. В частности, в отсутствие потока ($\mu = 0$) приходим к хорошо изученной задаче о выпучивании панели под равномерной заданной ("мертвой") нагрузкой. Как известно [18], выпучивание по симметричной форме может происходить только у весьма пологих панелей ($k < 20,17$).

Далее остановимся на результатах, представленных на рис. 3.9. Здесь приведены зависимости критического параметра гидроупругости μ_* от угла установки θ_0 панели на цилиндре при двух значениях параметра $\gamma = 0$; -12 . Эти данные справедливы для панелей с параметром кривизны $k \geq 70$. Как видно, при малых углах установки ($\theta_0 \leq 15^\circ$) и больших $|\gamma|$ (анализ показывает, что при $-\gamma \leq 8$) реализация обоих вариантов III и VI условий контакта дает практически одинаковые результаты. Следовательно, в этих случаях эффект взаимодействия деформации панели и потока жидкости отсутствует. С увеличением угла установки вариант VI значительно отличается от варианта III, являющегося более точным. Здесь эффект взаимодействия является сильным.

Возрастание критических значений параметра гидроупругости μ_+ с ростом угла установки θ_0 объясняется тем, что при движении от лобовой зоны цилиндра к сечению $\theta = \pi/2$; $3\pi/2$ давление падает, а перепад давления может стать отрицательным вследствие подсоса потока (распределение давления на жесткий цилиндр показано на рис. 3.2). В этих зонах панель стремится прогнуться в сторону внешней нормали. Так, в случае нулевого гидростатического перепада давления не происходит прощелкивания, если угол установки доходит до 55° (рис. 3.9). По приближенной теории (вариант VI) этот угол равен $\theta_0 = 30^\circ$.

Переходим к сравнению с экспериментальными результатами. Сначала рассмотрим потерю устойчивости панели под равномерной "мертвой" нагрузкой ($\mu = 0$). На рис. 3.10 приведены критические значения безразмерного давления или параметра гидростатической нагрузки — $\gamma_+ = (p_i - p_\infty) RL^2/D$ в зависимости от параметра кривизны $k = 4L^2/Rh$. Здесь точками указаны экспериментальные результаты из работы [18], а крестиками — из [3]. Хорошее совпадение расчетной кривой и экспериментальных данных, помеченных крестиками, свидетельствует о близости расчетной модели с испытываемым образцом и условиями проведения эксперимента (незначительные начальные неправильности геометрической формы образца, строгое соблюдение условий жесткой заделки и т.п.).

На рис. 3.11 приведены зависимости критической скорости обтекания V_∞^+ (в м/с), соответствующей параметру μ_+ , от угла установки панели θ_0 [3, 6]. Кружочками нанесены экспериментальные результаты, полученные при испытании образцов из меди M1 с размерами: $2L = 49$ мм, $R = 107,8$ мм, $h = 0,1$ мм. Длина панели $L_1 = 250$ мм, глубина погружения ее в воду $H = 200$ мм. Опытные данные для более длинных панелей ($L_1 = 400$ мм) нанесены на рисунке крестиками. Значения экспериментальных данных для образцов, изготовленных из стали 1X18H10T с размера-

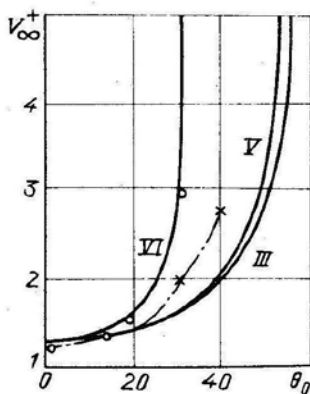


Рис. 3.11. Влияние угла установки панели из меди на критическое значение скорости обтекания

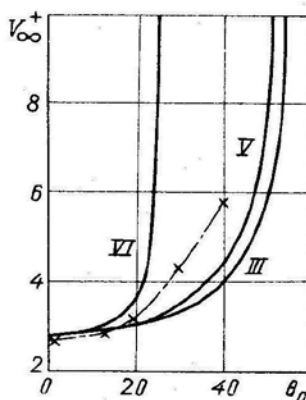


Рис. 3.12. Влияние угла установки стальной панели на критическое значение скорости обтекания

ми $2L = 49$ мм, $R = 107,8$ мм $h = 0,127$ мм, $L_1 = 400$ мм при $H = 600$ мм даны на рис. 3.12 крестиками.

Анализ полученных результатов показывает, что при малых углах установки панели и наличии гидростатического давления оба рассмотренных варианта условий контакта (*III* и *VI*) дают практически одинаковые результаты. Наблюдается хорошее совпадение их с экспериментальными результатами. С увеличением угла установки вариант *VI* значительно отличается от *III*. Это отличие начинает проявляться для углов $\theta_0 > \pi/9$. Здесь же нанесены результаты расчета с использованием условий контакта классической теории дивергенции (вариант *V* в § 2), которые мало отличаются от результатов варианта *III*.

Значение параметра удлинения панели $L_1/2L$, при котором ее можно считать бесконечно длинной, больше, чем в случае равномерного нагружения (в расчетах [18] получено $L_1/2L \geq 3$). Действительно, экспериментальные критические значения V_∞^+ при $L = 400$ мм ($L_1/2L = 8,15$) намного ближе к уточненным расчетным значениям (кривые *III* и *V*), нежели V_∞^+ для панели длиной $L = 250$ мм.

В заключение отметим, что мы не привели здесь экспериментальных и расчетных данных в том случае, когда панель располагается в донной зоне цилиндра ($\theta_0 > \pi/2$). В этой зоне имеют место отрыв потока, вибрации панели и другие сложные явления. Учету отрыва потока при обтекании цилиндра будет посвящен § 8.

§ 6. Сильный изгиб цилиндрической оболочки в потоке

Рассматривается плоская деформация бесконечно длинной толкостенной оболочки при ее поперечном обтекании потоком неограниченной идеальной несжимаемой и невесомой жидкости с параметрами на бесконечности p_∞ , ρ_∞ , V_∞ . Принимается модель безотрывного течения жидкости по поверхности. Предполагается, что в процессе деформации оболочки давление p_i внутри нее остается постоянным. Таким образом, часть задачи, касающаяся движения жидкости, та же, что в § 1. Отличие связано с описанием деформации оболочки. Считаем, что перемещение по нормали может быть сравнимо с радиусом, и потому привлекаем уравнения сильного изгиба. При этом так же, как в § 1, используем допущение о нерастяжимости срединной поверхности.

Задача относительно потенциала скорости φ , гидродинамического давления p сводится к решению системы (1.1), (1.2). Кинематическое условие

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) & \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + v \left(\frac{\partial^2 \varphi}{r \partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \right. \\ & + w \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} - \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \right) \left. \right] - \left(1 + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{w}{r} \right) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{v}{r} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} - \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \right) + \right. \\ & + w \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right] - \frac{w^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} = 0 \quad (r = R). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Динамическое условие дает

$$Z_r^* = p_i - p - \frac{v}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - w \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{w^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \quad (r = R). \quad (6.2)$$

В (6.1) и (6.2) подчеркнутые члены появляются в результате переноса условий контакта с деформированной поверхности на поверхность до деформации. В третьих членах разложения в ряды Тейлора сохранены только наиболее важные слагаемые $(w^2/2)\partial^3 \varphi / \partial r^3$ и $(w^2/2)\partial^2 p / \partial r^2$. Менее существенные члены того же порядка $(v^2/2r^2)\partial^3 \varphi / \partial \theta^2 \partial r, \dots$ не включены.

Уравнение сильного изгиба нерастяжимой оболочки (кольца) может быть записано относительно функции $U = R/R^*$ [37], где R, R^* — радиусы кривизны до и после деформации.

Связь между изгибающим моментом и изменением кривизны дает

$$M_{\theta\theta} = D\kappa_{\theta\theta} = \frac{D}{R} \left(\frac{R}{R^*} - 1 \right) = \frac{D}{R} (U - 1). \quad (6.3)$$

При этом уравнения изгиба записываются (§ 3 гл. 1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial N_{\theta\theta} / \partial \theta + U Q_{\theta} &= 0, \\ \partial Q_{\theta} / \partial \theta - U N_{\theta\theta} + R Z_r^* &= 0, \\ \partial M_{\theta\theta} / \partial \theta - R Q_{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Исключая из (6.3), (6.4) $M_{\theta\theta}, Q_{\theta}, N_{\theta\theta}$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{U} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} U^3 + \frac{R^3}{D} Z_r^* \right) \right] = 0,$$

откуда, с учетом (6.2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} U^3 + C U &= - \frac{R^3}{D} \left(p_i - p - \frac{v}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - w \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{w^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) \\ (r = R), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где C — постоянная интегрирования. Она определяется интегрированием уравнения (6.5). При этом учтем, что $R d\theta = R^* d\theta^*$, где $d\theta^*$ — изменение угла в результате изменения кривизны, и

$$\int_0^{2\pi} U d\theta = \int_0^{2\pi} (R/R^*) d\theta = \int_0^{2\pi} (d\theta^*/d\theta) d\theta = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} (d^2 U / d\theta^2) d\theta = (dU/d\theta)_0^{2\pi} = 0.$$

Тогда

$$C = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} U^3 d\theta - \frac{R^3}{2\pi D} \int_0^{2\pi} \left(p_i - p - \frac{v}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - w \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{w^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) d\theta. \quad (6.6)$$

В силу того что в правых частях (6.5) и (6.6) содержатся компоненты перемещения v , w , необходимо установить связь между ними и функцией U . Для этого привлечем выражение для полной безразмерной кривизны $U = 1 + R\kappa_{\theta\theta}$. В случае плоской деформации имеем (§ 3 гл. 1).

$$\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{R} \left(E_2 \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial \theta} + E_3 \frac{\partial \omega_{\theta}}{\partial \theta} \right), \quad e_{\theta\theta} = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R},$$

$$\omega_{\theta} = \frac{\partial w}{R \partial \theta} - \frac{v}{R},$$

$$E_2 = -\omega_{\theta}, \quad E_3 = 1 + e_{\theta\theta}.$$

Следовательно,

$$U = 1 + \frac{1}{R} \left[\left(1 + \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (6.7)$$

Связь между компонентами v и w устанавливается из условия нерастяжимости срединной поверхности

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = 0. \quad (6.8)$$

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи взаимодействия, рассмотрим вспомогательную задачу для установления необходимого числа членов в выражении для функции U . С этой целью исследуем статический сильный изгиб оболочки при заданном давлении по закону

$$(R^3/D)(p_i - p) = -\bar{p}_0(1 + q \cos 2\theta). \quad (6.9)$$

Такое распределение давления имеет место при безотрывном обтекании абсолютно жесткого цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью.

Рассмотрим уравнения (6.5), (6.6) без подчеркнутых членов в правых частях. Для решения их с помощью метода Бубнова – Галеркина примем трехчленную аппроксимацию

$$U = U_0 + U_2 \cos 2\theta + U_4 \cos 4\theta. \quad (6.10)$$

В силу допущения о нерастяжимости срединной поверхности оболочки $U_0 = 1$. Полученная относительно U_2 , U_4 система двух нелинейных алгебраических уравнений решена численно. Изменение кривизны (6.10)

в точках $\theta = 0$ и $\pi/2$ в зависимости от $\bar{p}_0$, q показано на рис. 3.13 и 3.14 штриховыми линиями.

Уравнение (6.5) при заданном давлении (6.9) с высокой точностью было решено методом конечных разностей в работе [37]. Соответствующие результаты приведены на рис. 3.13 и 3.14 сплошными линиями. Как видно, аппроксимация (6.10) оказывается достаточной даже при появлении отрицательной кривизны около точки $\theta = 0$ и при более чем двукратном увеличении кривизны около точки $\theta = \pi/2$. Соответствующий максимальный прогиб оболочки достигает $1/3$ ее радиуса. Основной является

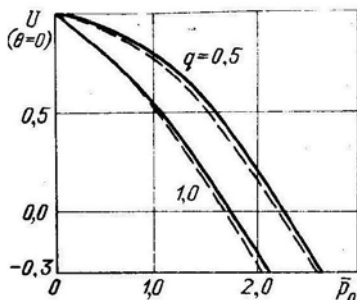


Рис. 3.13. Зависимость относительной кривизны лобовой точки оболочки от параметров нагрузки

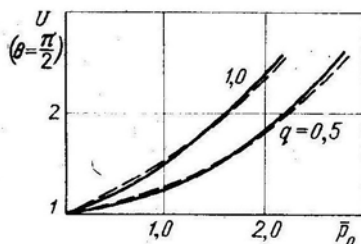


Рис. 3.14. Зависимость относительной кривизны периферийной точки оболочки от параметров нагрузки

амплитуда U_2 , а U_4 носит поправочный характер. Если, например, $U_2 = -1$, то $U_4 \approx 0.05$. Исходя из результатов решения этой вспомогательной задачи в дальнейшем будем брать изменение кривизны в форме (6.10) при $U_0 = 1$.

В предыдущих разделах поле скоростей и давления описывалось суммами (1.10), причем предполагалось, что $p_2 \ll p_1$, $\partial \varphi_2 / \partial \theta \ll \partial \varphi_1 / \partial \theta$, ..., и условия контакта относительно p_2 , φ_2 , w , v линейризовались. Такое предположение оправдано, если возмущения в потоке, вызываемые изгибом оболочки, малы по сравнению с параметрами потока вокруг недеформируемого цилиндра. Это в свою очередь имеет место, если прогибы оболочки малы по сравнению с ее радиусом. В данной задаче прогибы сравнимы с радиусом цилиндра, следовательно, нужно отказаться от указанного подхода и применять условия в виде (6.1), (6.2).

С учетом симметрии картины течения и деформации оболочки относительно линий $\theta = 0$; π и $\theta = \pi/2$; $3\pi/2$, в полной задаче статического взаимодействия, кроме (6.10), примем

$$\begin{aligned} v &= V_2 \sin 2\theta + V_4 \sin 4\theta, \\ w &= W_0 + W_2 \cos 2\theta + W_4 \cos 4\theta, \\ \varphi &= \Phi_0 + \Phi_1 \cos \theta + \Phi_3 \cos 3\theta. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Подстановка выражения для φ из (6.11) в уравнение Лапласа (1.1) дает обыкновенные уравнения относительно $\Phi_0(r)$, $\Phi_1(r)$, $\Phi_3(r)$. Решения их содержатся в (1.18):

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= A_0 \ln r + B_0, \\ \Phi_1 &= A_1 r^{-1} + B_1 r, \quad \Phi_3 = A_3 r^{-3} + B_3 r^3.\end{aligned}\quad (6.12)$$

По условию (1.2) имеем $B_0 = B_3 = 0$, $B_1 = -V_\infty$. Для определения A_0 , A_1 , A_3 служит кинематическое условие (6.1). Прежде необходимо установить зависимости между U_2 , U_4 , V_2 , V_4 , W_0 , W_2 , W_4 .

Подставляя (6.11) в (6.8) и сравнивая члены при 1, $\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$, выражаем W_0 , V_4 , W_4 через V_2 , W_2 . Исходя из вышеприведенных оценок U_2 и U_4 заключаем, что основными являются величины V_2 , W_2 , а W_0 , V_4 , W_4 носят поправочный характер. Поэтому в выражениях для W_0 , V_4 , W_4 учтем лишь главные члены, обрасывая W_0 , $4V_4 + W_4$ по сравнению с R и величину $(2V_2 + W_2)^2$ по сравнению с $(V_2 + 2W_2)^2$. При этом

$$\begin{aligned}4w_0 &= -(v_2 + 2w_2), \\ v_4 + 4w_4 &= -2(v_2 + w_2)(v_2 + 2w_2)^{-1}, \\ 4(v_4 + w_4) &= (v_2 + 2w_2)^2.\end{aligned}\quad (6.13)$$

Здесь введены обозначения $w_0 = W_0 R^{-1}$, $v_2 = V_2 R^{-1}$, $v_4 = V_4 R^{-1}$, $w_2 = W_2 R^{-1}$, $w_4 = W_4 R^{-1}$.

Связь между коэффициентами U_2 , U_4 из (6.10) и w_0 , v_2 , v_4 , w_2 , w_4 устанавливается из формулы для кривизны (6.7). Подставляя в нее выражения (6.10), (6.11) и отделяя члены при 1, $\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$, с использованием (6.13) можно получить приближенные выражения

$$\begin{aligned}w_0 &= -\frac{1}{16} U_2^2 \left(1 - \frac{1}{16} U_4\right), \\ v_2 &= -\frac{1}{6} U_2 \left(1 - \frac{1}{8} U_2^2 + \frac{7}{32} U_4\right), \\ w_2 &= \frac{1}{3} U_2 \left(1 - \frac{1}{32} U_2^2 + \frac{1}{32} U_4\right), \\ v_4 &= -\frac{1}{60} U_4, \quad w_4 = \frac{1}{15} U_4.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Здесь учтено, что $U_0 = 1$. Из выражения для w_2 в (6.14) следует, что при $U_2 = -1$ и $U_4 \ll 1$ (когда в точках $\theta = 0$; π полная кривизна (6.10) близка нулю, а в точках $\theta = \pi/2$; $3\pi/2$ — удваивается) перемещение по нормали w достигает $1/3$ радиуса цилиндра, т.е. имеет место сильный изгиб оболочки. В дальнейшем предполагается, что прогибы не превышают значения $R/3$, а $|U_2| \leq 1$ и $|U_4| < 0.1$.

Теперь из условия (6.1) при $\partial w / \partial t = 0$ и учете (6.11), (6.12) и (6.14) коэффициенты A_0, A_1, A_3 можно выразить через U_2, U_4 :

$$A_1 = -V_\infty R \left(1 - \frac{1}{3} U_2 - \frac{9}{70} U_2^2 + \frac{2}{47} U_2^3 - \frac{1}{28} U_2 U_4 + \frac{1}{48} U_2^2 U_4 \right),$$

$$A_3 = -\frac{1}{3} V_\infty R \left(U_2 - \frac{21}{72} U_2^2 - \frac{2}{3} U_2^3 - \frac{1}{5} U_4 + \frac{1}{60} U_2 U_4 + \frac{3}{23} U_2^2 U_4 \right).$$

Эти коэффициенты подставим в выражения для потенциала (6.12) и давления (1.1). В последнем необходимо положить $\partial \varphi / \partial t = 0$. После этого может быть вычислена правая часть уравнения изгиба (6.5) и коэффициент (6.6). В результате (6.5) с учетом (6.10) приводится к двум нелинейным уравнениям

$$\left(\frac{3}{8} + \frac{19}{20} \mu \right) U_2^3 + \frac{11}{30} \mu U_2^2 + \left(3 + \gamma - \frac{1}{3} \mu \right) U_2 - \frac{9}{10} \mu U_2^2 U_4 -$$

$$- \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{9} \mu \right) U_2 U_4 + \frac{3}{10} \mu U_4 + 2\mu = 0, \quad (6.15)$$

$$\frac{13}{10} \mu U_2^3 + \frac{1}{4} (3 - \mu) U_2^2 - \mu U_2 - \frac{17}{20} \mu U_2^2 U_4 + \frac{4}{5} \mu U_2 U_4 -$$

$$- \left(15 + \gamma + \frac{13}{15} \mu \right) U_4 = 0,$$

где так же, как выше, введены обозначения

$$\mu = \rho_\infty V_\infty^2 R^3 / 2D, \quad (6.16)$$

$$\gamma = (p_i - p_\infty) R^3 / D.$$

При получении системы (6.15) учитываются члены с U_4 только в первой степени, а с U_2 — не выше третьей. Решение ее получено численно.

На рис. 3.15 и 3.16 кривая I показывает зависимость полной безразмерной кривизны $U = 1 + U_2 + U_4$ и $U = 1 - U_2 + U_4$ в точках $\theta = 0; \pi/2$ от параметра гидроупругости μ при нулевом гидростатическом перепаде давления ($\gamma = 0$).

По известным значениям U_2, U_4 компоненты перемещения определяются согласно формулам (6.11), (6.13), (6.14).

На значения параметра γ ставятся следующие ограничения. Из условия устойчивости от равномерного внешнего перепада давления необходимо

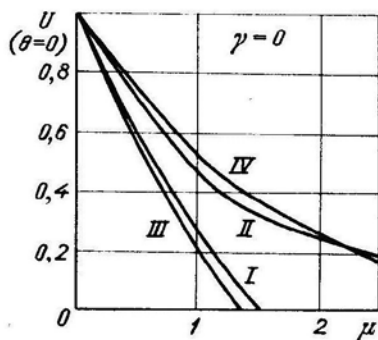


Рис. 3.15

Рис. 3.15. Зависимость относительной кривизны лобовой точки оболочки от параметра гидроупругости

Рис. 3.16. Зависимость относительной кривизны периферийной точки оболочки от параметра гидроупругости

Рис. 3.17. Зависимость относительной кривизны лобовой точки оболочки от параметров гидроупругости и гидростатической нагрузки

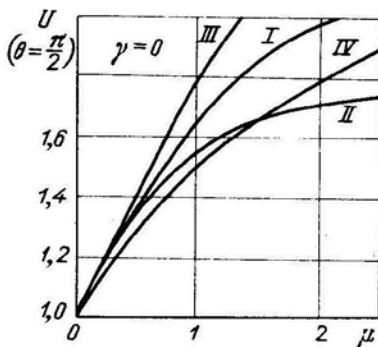


Рис. 3.16

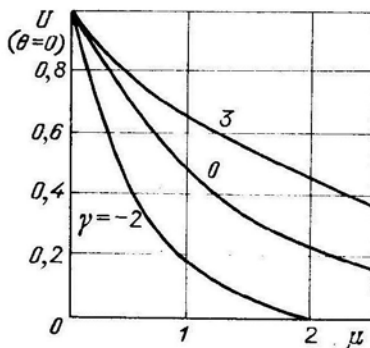


Рис. 3.17

считать $\gamma > -3$, а из условия прочности на разрыв оболочки $(p_i - p_\infty)R < \sigma_n h$, где σ_n — предел прочности материала. Поэтому

$$-3 < \gamma < 12(\sigma_n/E)(R/h)^2.$$

Должны быть поставлены ограничения и на значения μ . Одним из них является принятое выше ограничение на прогибы и изменение кривизны ($w < R/3$, $|U| < 1$), а другим — сохранение сплошности жидкости (отсутствие отрицательных давлений) вблизи зон $\theta = \pi/2$; $3\pi/2$, где возникают большие скорости и отсос потока.

Далее снова рассмотрим некоторые оценки влияния подчеркнутых нелинейных членов в (6.1), (6.5), (6.6), обусловленных переносом условий контакта на поверхность до деформации. Система (6.15) и приведенные выше результаты относятся к случаю, когда в правых частях уравнений (6.5), (6.6), а также в кинематическом условии (6.1) сохраняются все члены. Это наиболее точное решение обозначено номером I.

Если в правых частях (6.5), (6.6) опустить член $(w^2/2)\partial^2 p/\partial r^2$, а кинематическое условие (6.1) использовать в полном виде, то вместо

(6.15) получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{8} + \frac{93}{35} \mu \right) U_2^3 + \frac{1}{30} \mu U_2^2 + \left(3 + \gamma - \frac{1}{3} \mu \right) U_2 - \frac{20}{25} \mu U_2^2 U_4 - \\ & - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \mu \right) U_2 U_4 + \frac{3}{10} \mu U_4 + 2\mu = 0, \\ & \frac{16}{7} \mu U_2^3 + \frac{1}{4} (3 - \mu) U_2^2 - \mu U_2 - \frac{19}{50} \mu U_2^2 U_4 + \frac{13}{15} \mu U_2 U_4 - \\ & - \left(15 + \gamma + \frac{13}{15} \mu \right) U_4 = 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Этот менее точный вариант решения обозначим номером II. На рис. 3.15 приводится сравнение его с вариантом I. С увеличением μ разница между ними возрастает и при $\mu = 2$ достигает значительной величины.

Зависимость решения (6.17) (вариант II) от параметра гидростатической нагрузки γ (6.16) показана на рис. 3.17. Кривизны оболочки при положительных значениях γ (внутреннем перепаде) с увеличением μ изменяется плавно. С появлением внешнего перепада давления ($\gamma < 0$) и особенно при приближении его к критическому значению $\gamma = -3$, когда происходит статическая потеря устойчивости круговой формы под равномерным давлением, эта зависимость становится более крутой. Даже при малых скоростях обтекания возникают упругие перемещения точек оболочки.

Отбрасывая в (6.1), (6.5), (6.6) все подчеркнутые члены и принимая выражения для U, v, w, φ по-прежнему в виде (6.10), (6.11), вместо систем (6.15), (6.17) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (3 + \mu) U_2^3 - \frac{1}{3} \mu U_2^2 + 2(3 + \gamma - \mu) U_2 - \frac{2}{75} \mu U_2^2 U_4 - \\ & - \left(3 - \frac{27}{50} \mu \right) U_2 U_4 + \mu U_4 + 4\mu = 0, \\ & \frac{1}{24} \mu U_2^3 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \mu \right) U_2^2 - \mu U_2 - \frac{10}{25} \mu U_2^2 U_4 + \\ & + \frac{22}{25} \mu U_2 U_4 - \left(15 + \gamma + \frac{1}{2} \mu \right) U_4 = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Решение системы (6.18) обозначим номером III. Оно получено, таким образом, для случая отождествления деформированной и недеформированной поверхностей при записи условий контакта.

Если провести дальнейшие упрощения условий контакта, а именно (6.1) свести к условию $\partial \varphi / \partial r = 0$ ($r = R$), а в (6.5), (6.6) опустить подчеркнутые члены, то по (1.1) получится давление на абсолютно жесткий цилиндр (1.20). При этом изгиб оболочки под заданным давлением опре-

делится из системы уравнений

$$\begin{aligned} (3/8) U_2^3 + (3 + \gamma + \mu) U_2 - (3/2) U_2 U_4 + 2\mu &= 0, \\ (15 + \gamma + \mu) U_4 - (3/4) U_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Здесь так же, как выше при получении (6.15), (6.17), (6.18), учитываются члены с U_4 только в первой степени, а с U_2 — не выше третьей. Решение системы (6.19) обозначим номером *IV*.

Безразмерная функция перепада давления на абсолютно жесткий цилиндр $Z = \gamma + \mu + 2\mu \cos 2\theta$. Поэтому рассматриваемое приближение совпадает со вспомогательной задачей с заданным давлением (6.9). Только здесь коэффициенты γ, μ выражены через параметры потока.

Результаты численного решения *I, II, III, IV* систем уравнений (6.15), (6.17), (6.18), (6.19) для нулевого перепада среднего давления ($\gamma = 0$) приведены на рис. 3.15 (для точки $\theta = 0$) и на рис. 3.16 ($\theta = \pi/2$). Видно, что все четыре варианта решения при малых значениях параметра μ и изменении кривизны U дают практически одинаковые результаты. С увеличением μ и U варианты *II, III, IV* значительно отличаются от варианта *I*, являющегося более точным, чем остальные.

В заключение вернемся к оценке членов U_2 и U_4 и обоснуем принятые допущения об их порядках. Для этого рассмотрим приближенное аналитическое решение системы (6.19). Исключив в ней U_4 , получаем

$$\frac{12 + \gamma + \mu}{15 + \gamma + \mu} U_2^3 + \frac{8}{3} (3 + \gamma + \mu) U_2 = -\frac{16}{3} \mu.$$

Подставляя первое приближение корня

$$U_2 = -2\mu (3 + \gamma + \mu)^{-1} \quad (6.20)$$

в кубический член, находим второе приближение в виде

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{2\mu}{3 + \gamma + \mu} + \frac{3(12 + \gamma + \mu)\mu^3}{(15 + \gamma + \mu)(3 + \gamma + \mu)^4}, \\ U_4 &= \frac{3\mu^2}{(15 + \gamma + \mu)(3 + \gamma + \mu)^2}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Эти приближения весьма быстро сходятся. В самом деле, уже найденное второе приближение (6.21) дает хорошее согласие с кривыми *IV* на рис. 3.15 и 3.16. Из (6.21) составим отношение

$$|U_4/U_2| \approx (3/2) \mu (15 + \gamma + \mu)^{-1} (3 + \gamma + \mu)^{-1}.$$

Например, при $\mu = 2, \gamma = 0$ это отношение $|U_4/U_2| \approx 1/30$. Следовательно, в приведенных выше решениях было оправдано сохранение членов с U_4 только в первой степени.

Решение (6.20) следует сравнить с (2.10). В отличие от (2.10) здесь учитывается влияние гидростатического перепада давления γ . Но даже при $\gamma = 0$ решение (6.20) в отличие от (2.10) не растет неограниченно с

увеличением параметра μ , а имеет конечный предел. Это объясняется фактором ужесточающего оболочку влияния внешнего потока, которое учитывается в уравнениях (6.5), (6.6) членом CU , а именно увеличением подсоса с ростом скорости потока.

§ 7. Динамическое поведение системы.

Учет начального искривления оболочки

В § 3 взаимодействие между оболочкой и потоком жидкости рассматривалось в динамической постановке. При этом, однако, исходное изогнутое состояние оболочки отождествлялось с недеформированным состоянием. В данном разделе это допущение снимается. Таким образом, в представлениях (3.1), к которым нужно теперь присоединить $v_* = v_0(\theta) + v(\theta, t)$, $U_* = U_0(\theta) + U(\theta, t)$, функции $w_0(\theta)$, $v_0(\theta)$, $U_0(\theta)$ принимаются из предыдущего раздела. В остальном физическая постановка задачи такая же, как в § 3.

Возмущения потенциала скорости и давления подчиняются уравнению (3.3) и условию на бесконечности (3.4), только в первом из них вместо φ_1 необходимо подразумевать φ_0 .

Весьма сложный вид приобретает кинематическое условие на поверхности $r = R$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial w_0}{R^2 \partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_0}{R^2 \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \\ - \frac{\partial \varphi_0}{R \partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) - w_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} w - \frac{v_0}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta \partial r} \frac{v}{R} + F = 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

В выражение F входят члены, состоящие из произведений функций v_0 , w_0 , φ и их производных, например $v_0 w_0 \partial \varphi / \partial \theta$; кроме того, — произведения функций v_0 , φ_0 , w и w_0 , φ_0 , v и их производных. Явный вид F легко получается из (6.1) и представления φ_* , v_* , w_* в виде сумм (3.1). Следует отметить, что в (7.1) эффекты изменения нормали к срединной поверхности при деформации оболочки и переноса кинематического условия на поверхность до деформации частично учитываются и в случае, когда для упрощения вычислений принимаем $F = 0$.

Будем предполагать, что инерционность системы определяется только инерционностью жидкости. Это допущение справедливо, если коэффициент $\nu = 2\rho h / \rho_\infty R$, введенный в (3.11), мал. Для тонкостенных оболочек, изготовленных из неметаллических легких материалов, и для случая воды ν — всегда малая величина по сравнению с единицей. Тогда в нашей задаче можно привлечь уравнения статического изгиба (6.5), (6.6). Итак, уравнение движения статически деформированной под действием потока безынерционной оболочки имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + (3/2) U_0^2 U + C_0 U + U_0 C = \\ = \frac{R^2}{D} \left(p + \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{v}{R} + \frac{v_0}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial p_0}{\partial r} w + w_0 \frac{\partial p}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Входящий сюда коэффициент C_0 дается выражением (6.6), где вместо p, v, w, U необходимо подставить p_0, v_0, w_0, U_0 . Возмущение этого коэффициента равно

$$C = \frac{R^3}{2\pi D} \int_0^{2\pi} \left(p + \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{v}{R} + \frac{v_0}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial p_0}{\partial r} w + w_0 \frac{\partial p}{\partial r} \right) d\theta - \\ - \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} U_0^2 U d\theta. \quad (7.3)$$

В правой части (7.2) и в (7.3) члены от $(w_*^2/2)\partial^2 p_*/\partial r^2$ опущены.

Изменение безразмерной кривизны согласно (6.7) равно

$$U = \frac{1}{R^2} \left[\left(R + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \left(v_0 - \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right], \quad (7.4)$$

а выражения для деформации —

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R^2} \left[\left(R + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \left(v_0 - \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (7.5)$$

В предыдущем параграфе было показано, что при относительно малых изменениях кривизны вариант IV незначительно отличается от более точных (рис. 3.15 и 3.16). Поэтому для приближенного анализа динамических явлений в системе величины с нуликом могут быть взяты для наиболее простого случая статического изгиба, когда давление на оболочку определяется без учета ее деформации (вариант IV). Кроме того, в (6.10), (6.11), (6.14) опускаем члены с U_4, V_4, W_4 ввиду их малости. Таким образом, решение для U_0 может быть взято в виде $U_0 = 1 + U_2 \cos 2\theta$, где U_2 определяется из (6.21); решения для v_0, w_0 определяются из (6.14).

Решение относительно возмущений разыскивается в классе функций

$$v = e^{\lambda t} \sum_{n=1}^N V_n \sin n\theta, \quad w = e^{\lambda t} \sum_{n=1}^N W_n \cos n\theta, \\ U = e^{\lambda t} \sum_{n=1}^N \bar{U}_n \cos n\theta, \quad \varphi = e^{\lambda t} \sum_{n=0}^N \Phi_n \cos n\theta. \quad (7.6)$$

Из уравнения Лапласа (3.3) следует, что функции Φ_n имеют тот же вид (1.18), что в статической задаче. В них, согласно условию на бесконечности (3.4), $B_n = 0$.

Дальнейший ход выкладок такой же, что в § 3. В расчетах ограничиваемся числом членов в (7.6), равным $N = 3$. Вводя параметр χ согласно (3.11) ($\nu = 0$ ввиду предположения о безынерционности оболочки), получаем следующее условие существования ненулевого решения:

$$K_0 \chi^6 + K_2 \chi^4 + K_4 \chi^2 + K_6 = 0, \quad (7.7)$$

где коэффициенты K_i равны

$$K_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} U_2 + \frac{3}{4} U_2^2, \quad K_2 = 14 - \frac{11}{3} U_2 - \frac{25}{6} U_2^2 - \frac{19}{4} U_2^3,$$

$$K_4 = 12 + 35 U_2 + \frac{12}{5} U_2^2 + 22 U_2^3 -$$

$$- \frac{3}{\mu} \left[20 + 6 U_2 + 5 U_2^2 + (\gamma + \mu) \left(7 + \frac{5}{9} U_2 - \frac{20}{9} U_2^2 \right) \right] +$$

$$+ \frac{3}{\mu^2} \left[144 - 24 U_2 + 59 U_2^2 + (\gamma + \mu) \left(66 - 11 U_2 + \frac{18}{10} U_2^2 \right) + \right.$$

$$\left. + (\gamma + \mu)^2 \left(6 - U_2 - \frac{3}{40} U_2^2 \right) \right],$$

$$K_6 = -9 U_2 + 30 U_2^2 + 14 U_2^3 + \frac{9}{\mu} \left[12 + 5 U_2 + 9 U_2^2 + \frac{33}{7} U_2^3 + \right.$$

$$\left. + (\gamma + \mu) \left(4 + \frac{1}{2} U_2 - \frac{19}{6} U_2^2 \right) \right] -$$

$$- \frac{18}{\mu^2} \left[24 + 8 U_2 + 38 U_2^2 + (\gamma + \mu) \left(11 - \frac{5}{3} U_2 + 4 U_2^2 \right) + \right.$$

$$\left. + (\gamma + \mu)^2 \left(1 - \frac{1}{3} U_2 - \frac{15}{12} U_2^2 \right) \right].$$

Здесь опущены члены $A U_2^3$ с коэффициентом A , малым по сравнению с главными членами в составе K_i . Кроме того, проведено округление некоторых коэффициентов с незначительными изменениями их величин. Содержащиеся в K_i величины U_2 представляют собой функции μ и γ , как это видно из (6.21).

Вещественная часть одного из корней уравнения (7.7) будет положительной, если в кубическом уравнении

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0,$$

$$z = \chi^2, \quad a = K_2/K_0, \quad b = K_4/K_0, \quad c = K_6/K_0,$$

выполняется условие

$$\left(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9} \right)^3 + \left(\frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2} \right)^2 > 0. \quad (7.8)$$

Из этого условия найдены критические значения параметра гидроупругости μ_{++} в зависимости от параметра перепада давления $-\gamma$ (знак минус указывает на внешний перепад). Они представлены на рис. 3.18 кривой 1. Значение перепада давления $\gamma = -3$, при котором μ_{++} снижается до нуля, соответствует критическому давлению статической потери устой-

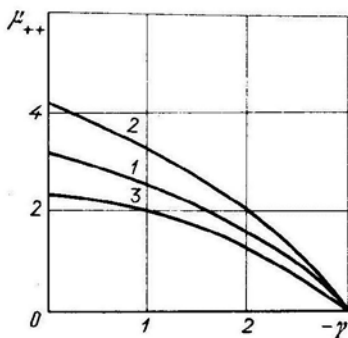


Рис. 3.18. Зависимость динамического критического значения параметра гидроупругости от параметра гидростатической нагрузки

чивости оболочки с образованием двух волн по окружности оболочки. Отметим, что при $\gamma > 0$ кривая продолжается в левую часть рисунка, причем значения μ_{++} возрастают, что объясняется ужесточающим влиянием внутреннего перепада давления.

Представляет интерес выяснить, какое влияние оказывает на динамическую устойчивость учет статической деформации оболочки, а также мембранных усилий. Если исходное статическое состояние оболочки отождествить с недеформированным состоянием ($U_2 = 0$ в коэффициентах K_i , следовательно, $U_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$), то приходим к задаче, аналогичной рассмотренной в § 3. Соответствующая кривая $\mu_{++}(\gamma)$ обозначена на рис. 3.18 цифрой 2.

Таким образом, разница между кривыми 1 и 2 характеризует влияние на критическое значение параметра гидроупругости начальной статической деформации оболочки. Учет этой деформации приводит к снижению указанного значения параметра гидроупругости.

Кривые 1 и 2 получены, когда в уравнении (7.2) сохраняются члены $C_0 U + U_0 C$, характеризующие взаимодействие мембранных усилий и кривизны оболочки. Если их не учитывать, как это сделано в § 3, то получаем кривую 3 на рис. 3.18 (но при этом учитывается начальная деформация, $v_0 \neq 0$, $w_0 \neq 0$, $U_2 \neq 0$). Отметим, что для исключения влияния начальной деформации в составе K_i параметр μ внутри скобок $(\gamma + \mu)$ следует полагать равным нулю. Эффект увеличения критического значения μ_{++} при учете мембранных усилий (кривые 1 и 3) обусловлен увеличением среднего перепада давления за счет подсоса при обтекании цилиндра (уменьшение среднего по внешней поверхности оболочки давления в потоке).

§ 8. Учет отрыва потока с поверхности оболочки

Если при рассмотрении поперечного обтекания оболочки попытаться учесть отрыв потока с ее поверхности, то задача принципиально усложняется.

В предыдущих разделах основным допущением, позволившим относительно просто рассмотреть физически сложные задачи, явилось предположение о безотрывности потока жидкости с поверхности оболочки. Такое допущение во многих практически важных и часто встречающихся случаях

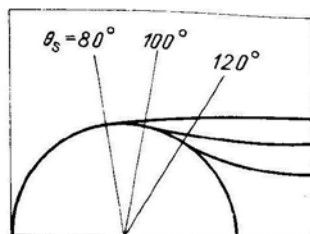


Рис. 3.19. Углы отрыва потока

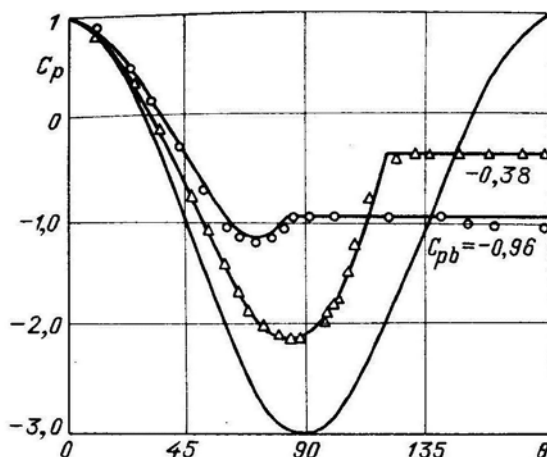


Рис. 3.20. Распределение давления на поверхности жесткого цилиндра

формы оболочки, обтекаемой жидкостью и газом, вполне оправдано. Однако круговой цилиндр является плохообтекаемым телом, и, как показывает эксперимент, с его поверхности происходит отрыв потока. Причина состоит в том, что образовавшийся из-за внутреннего трения в жидкости пограничный слой не выдерживает восстановления давления в кормовой части цилиндра.

Введем число Рейнольдса и коэффициент давления

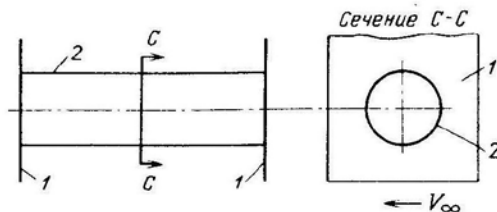
$$Re = 2R\rho_\infty V_\infty / \mu_0, \quad C_p = 2(p - p_\infty) / (\rho_\infty V_\infty^2),$$

где μ_0 — коэффициент вязкости.

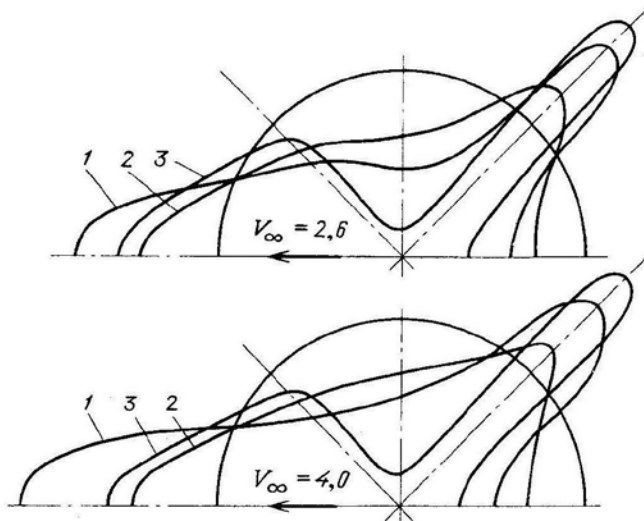
Экспериментально установлено, что имеются два основных режима обтекания кругового цилиндра, реализующиеся при разных числах Рейнольдса. При $Re < 2 \cdot 10^5$ имеет место докритический режим обтекания с углом отрыва $\theta_s \approx 80^\circ$ и коэффициентом давления $C_{pb} = -0,96$ в донной зоне, а при $Re > 2 \cdot 10^5$ — закритический режим обтекания с углом отрыва $\theta_s \approx 120^\circ$ и донным давлением $C_{pb} = -0,38$. Донная зона $\theta_s < \theta \leq \pi$, занимающая область между линиями отрыва, показана на рис. 3.19. Здесь же показан угол отрыва $\theta_s \approx 100^\circ$ (более точное его значение равно 104°) при транскритическом режиме обтекания ($C_{pb} = -0,86$).

На рис. 3.20 приведены теоретическая кривая C_p для поверхности недеформированного цилиндра по модели безотрывного обтекания согласно (1.20) и распределение давления в указанных режимах отрывного обтекания. Экспериментальные результаты взяты из работ [35, 36].

Существует ряд теорий разной точности и разной сложности для описания отрывного обтекания кругового цилиндра. Расчеты по модели Паркинсона — Яндали [35] дают удовлетворительное согласие в распределении давления с опытом, если значения угла отрыва и давления в донной зоне взять из эксперимента.



Р и с. 3.21. Схема эксперимента (1 — тонкие пилонны, 2 — испытываемая оболочка)



Р и с. 3.22. Относительные удлинения при обтекании оболочки

Выражение для давления на цилиндр в интервале $0 \leq \theta \leq \theta_s$ имеет вид [35]

$$p = p_\infty + \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} C_p, \quad C_p = 1 - \frac{A^6 \sin^2 \theta / 2}{(\cos \alpha \cos \delta - 1 + A \cos \theta / 2)^2}. \quad (8.1)$$

Здесь

$$A = \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_s},$$

$$\cos \delta = \cos \alpha + k^{-1} \sin^3 \alpha, \quad 2\alpha = \pi - \theta_s,$$

а коэффициент $k = 1,40$ при угле отрыва $\theta_s = 80^\circ$, $k = 1,36$ при $\theta_s = 100^\circ$, $k = 1,17$ при $\theta_s = 120^\circ$.

Для получения давления в донной части $\theta_s < \theta \leq \pi$ в (8.1) вместо C_p необходимо подставить указанные выше значения коэффициентов $C_p = C_{pb}$ для разных режимов обтекания.

При отрывном обтекании тела потоком идеальной жидкости равнодействующая давления на него не равна нулю, как в случае безотрывного обтекания (парадокс Даламбера не имеет места). Поэтому нужно вводить в рассмотрение опоры, удерживающие оболочку в потоке. В работах [29–31] вводилась опора в лобовой точке оболочки.

Применялась модель Паркинсона — Яндали в сочетании с методом Бубнова — Галеркина, а также с методами последовательных приближений. Рассматривались случаи малых и больших статических перемещений контура оболочки в плоской постановке. В экспериментальной работе [4] удерживающие опоры ставились в точках $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$.

В [5] экспериментально и теоретически рассматривался изгиб цилиндрической оболочки конечной длины. Она крепилась по торцам к двум жестким тонким пилонам (рис. 3.21), двигающимся вместе с тележкой в бассейне с водой. Замер деформаций оболочки проводился тензодатчиками, наклеенными на ее внутренней поверхности. На рис. 3.22 кривыми 1 представлены показания этих тензодатчиков при разных скоростях движения тележки.

В приближенном теоретическом описании этого эксперимента перетекание жидкости вдоль оболочки за счет ее деформации, а также вследствие возмущения пилонами, не учитывается. В случае слабого изгиба оболочки и малой толщины пилонов это не вносит в расчеты заметной погрешности. Таким образом, гидродинамическая часть вычислений может быть приведена к плоской задаче, в то время как расчет оболочки конечной длины нужно производить как пространственной конструкции.

Соответствующие расчеты проведены в работе [5] в двух приближениях. Сначала давление на цилиндр определяется в предположении о его абсолютной жесткости, т.е. оно дается формулами (8.1). Далее рассматривается линейный изгиб оболочки под действием этого давления со стороны жидкости. Во втором приближении определяется поле течения с учетом деформации контура и уточняются перемещения и напряжения. Показано [9], что такой метод последовательных приближений сходится, причем существуют способы усиления сходимости.

На рис. 3.22 приведены значения окружной деформации на внутренней поверхности стенки. Кривая 2 указывает результат первого, а кривая 3 — второго приближения. Эти данные приведены для среднего сечения оболочки ($C-C$ на рис. 3.21).

Изложенный расчет в двух приближениях дает качественно правильную картину деформации оболочки и течения жидкости. Разница между экспериментом и расчетом по абсолютной величине обусловлена как погрешностями в замере деформаций и недостаточным числом приближений в теории, так и неполным соответствием между условиями проведения эксперимента и теоретической моделью обтекания и деформации.

Статическое выпучивание цилиндрической оболочки конечной длины от изгиба в потоке жидкости экспериментально и теоретически рассмотрено в работе [2].

В [34] рассматривается динамическая устойчивость цилиндрической оболочки в потоке в той же постановке, что в § 3, но учитывается отрыв.

Угол отрыва, распределение давления на поверхности жесткого цилиндра принимаются в соответствии с моделью Паркинсона – Яндали (8.1). Если в [5] распределение (8.1) аппроксимируется тригонометрическими функциями, то в [34] – полиномами четвертой степени. Теоретическая часть выполнена в плоской постановке, однако эксперимент на флаттер проведен с цилиндрической оболочкой конечной длины. Получено качественное согласие расчета с данными эксперимента.

В заключение главы еще раз подчеркнем, что применение модели безотрывного обтекания позволило наглядно показать роль впервые учтенных в этой книге нелинейностей в контактных условиях. Наряду с условием отсутствия опорных реакций на оболочку применение этой модели приводит к решению, когда однородная цилиндрическая оболочка симметрично вытягивается поперек потока (§ 1, 2, 6). Этот парадокс в гидроупругости является аналогом широко известного парадокса Даламбера в гидромеханике. Связанные с последним особенности решения имеют место и в других задачах, например в модельном примере безотрывного поперечного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью проницаемой цилиндрической оболочки (§ 4 гл. 4).

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОНИЦАЕМОЙ ОБОЛОЧКИ
С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются общие соотношения в задаче взаимодействия проницаемой оболочки с потоком жидкости и газа. Они могут быть использованы для определения формы и напряженного состояния проницаемых (перфорированных) обечаек и панелей, парашюта, рыболовных сетей и т.д. и поля давления и скорости в жидкости около них. Излагается совместный эйлерово-лагранжев способ описания взаимодействия.

При формулировке условий на контактной поверхности принимаются следующие основные допущения: стенка тонкая, вследствие чего поверхность контакта отождествляется со срединной поверхностью оболочки; перемещения ее могут быть сравнимы с характерными размерами, но деформации малы по сравнению с единицей; проникание жидкости сквозь оболочку происходит только по нормали к деформированной поверхности; геометрические и механические параметры и свойства проницаемости непрерывны по поверхности; жидкость идеальная и сжимаемая.

Условия, налагаемые на движение жидкости на неконтактных границах, а также на граничных срезах срединной поверхности, не отличаются от общепринятых и здесь не приводятся. Некоторые из них были рассмотрены в предыдущей главе.

В конце главы приводится решение плоской задачи о поперечном обтекании упругой цилиндрической оболочки. Здесь демонстрируется влияние проницаемости на картину течения и на изгиб.

Различные аспекты проблемы рассмотрены в [1–26]. Так же, как в других главах, этот список литературы является далеко не полным.

§ 1. Условия на поверхности контакта

В момент времени $t = 0$ оболочка находится в ненапряженном состоянии под действием поверхностных и массовых сил. Если она не сопротивляется изгибу и сжатию (мягкая оболочка), за начальное принимается некоторое распрямленное, "замороженное" состояние.

При $t = 0$ назначаются также условия относительно скорости движения оболочки и жидкости.

Так же как в гл. 2, движение жидкости описывается в системе ортогональных криволинейных координат Эйлера x_1, x_2, x_3 . Оси x_1, x_2 на срединной поверхности σ в момент времени $t = 0$ направлены по линиям

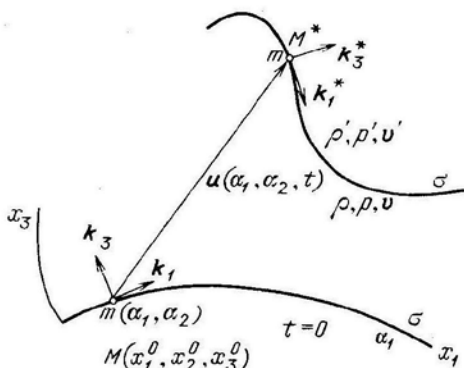


Рис. 4.1. Два положения оболочки в пространстве. В начальный момент времени лагранжева и эйлера системы координат совпадают

кривизны, а ось x_3 — по внешней нормали (рис. 4.1). Таким образом, оболочка занимает в пространстве положение $x_3 = x_3^0 = \text{const}$. Деформация ее описывается в системе криволинейных координат Лагранжа α_1, α_2 , которые на поверхности σ при $t = 0$ совпадают с осями x_1, x_2 . Поэтому коэффициенты Ляме и орты локального триэдра k_1, k_2, k_3 в обеих системах координат одни и те же (более подробно об этом сказано в гл. 2, § 1).

Орты $k_i(\alpha_1, \alpha_2)$ и орты на деформированной поверхности $k_i^*(\alpha_1, \alpha_2, t)$ связаны между собой по формулам (3.2) гл. 1.

Обозначим через ρ, p, v и ρ', p', v' значения плотности, давления и вектора скорости с двух сторон поверхности σ (рис. 4.1).

Относительно неподвижной системы координат Эйлера скорости по нормали с двух сторон σ равны $v \cdot k_3^*$ и $v' \cdot k_3^*$. Нормальная скорость, с которой частицы жидкости пересекают движущуюся со скоростью $\partial u / \partial t$ поверхность, равна $(v - \partial u / \partial t) \cdot k_3^*$. Соответствующий массовый расход $\rho(v - \partial u / \partial t) \cdot k_3^*$ равняется величине $\rho V \cdot k_3^*$, где V — вектор скорости протекания жидкости сквозь оболочку в точке M^* . По предположению, приведенному в начале этой главы, он всегда перпендикулярен движущейся поверхности: $V = V_3^* k_3^*$. Таким образом, v, v' являются векторами абсолютных скоростей, а V — вектором относительной скорости жидкости (относительно движущейся оболочки).

Может быть введена в рассмотрение также скорость протекания V' . Очевидно, имеет место равенство $\rho V k_3^* = \rho' V' k_3^*$. Мы будем пользоваться параметрами V и V_3^* .

Итак, будем иметь равенство

$$\rho(v - \partial u / \partial t) k_3^* = \rho'(v' - \partial u / \partial t) k_3^* = \rho V k_3^*, \quad (M^*) \quad (1.1)$$

которое представляет собой закон сохранения массы для струйки идеальной жидкости, протекающей через единичную площадку по нормали в единицу времени (уравнение (5.4) гл. 1).

При переходе через поверхность σ тангенциальные составляющие скорости, вообще говоря, терпят разрыв

$$(v - \partial u / \partial t) k_i^* \neq (v' - \partial u / \partial t) k_i^* \quad (M^*) \quad (1.2)$$

или

$$v k_i^* \neq v' k_i^* \quad (i = 1, 2).$$

В (1.1), (1.2) и далее знак (M^*) по-прежнему указывает на то, что соответствующие уравнения записаны для точки M^* пространства, с которой совпадает фиксированная точка m оболочки на поверхности σ в текущий момент.

Уравнение (1.1) может быть записано в скалярной форме по-разному. Представляя v, v', V, u в компонентах основного базиса k_1, k_2, k_3

$$\begin{aligned} v &= v_i k_i, \quad v' = v'_i k_i, \quad V = V_i k_i, \\ u &= u_i k_i, \quad \partial u / \partial t = (\partial u_i / \partial t) k_i, \end{aligned} \quad (1.3)$$

с учетом (1.1) гл. 2, получаем следующие уравнения в скалярной форме:

$$\begin{aligned} [\rho (v_i - \partial u_i / \partial t) - \rho' (v'_i - \partial u_i / \partial t)] E_i &= 0, \\ (v_i - V_i - \partial u_i / \partial t) E_i &= 0. \end{aligned} \quad (M^*) \quad (1.4)$$

В формулах (1.3), (1.4) производится суммирование по повторяющимся индексам.

Система (1.4) представляет собой кинематические условия в задаче взаимодействия проницаемой оболочки и идеальной сжимаемой жидкости.

Далее получим кинематические условия относительно компонент скорости жидкости в деформированном базисе k_1^*, k_2^*, k_3^* . Представим $v = v_i^* k_i^*, v' = v'_i k_i^*, V = V_i^* k_i^*$. В последнем выражении учтено, что скорость протекания через поверхность σ всегда направлена по нормали. При этом, однако, будем оперировать компонентами перемещения u_i в основном базисе k_1, k_2, k_3 , т.к. в теории оболочек компоненты перемещения в деформированных координатах не применяются. Применение их в данном случае привело бы к усложнению производной по времени $\partial u / \partial t = \partial (u_i^* k_i^*) / \partial t$, где $u_i^*(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и $k_i^*(\alpha_1, \alpha_2, t)$.

Первые члены в (1.1) представляем в виде $v_i^* k_i^* k_3^*$, а вторые — так же, как при получении (1.4), в виде

$$(\partial u_i / \partial t) k_i (E_j k_j).$$

Следовательно, кинематические условия, содержащие компоненты скорости жидкости в деформированных координатах оболочки, приобретают вид

$$\begin{aligned} \rho v_3^* - \rho' v_3'^* - (\rho - \rho') E_i \partial u_i / \partial t &= 0, \\ v_3^* - V_3^* - E_i \partial u_i / \partial t &= 0. \end{aligned} \quad (M^*) \quad (1.5)$$

Они особенно просты в случае, когда изгиб оболочки можно считать статическим ($\partial u_i / \partial t = 0$).

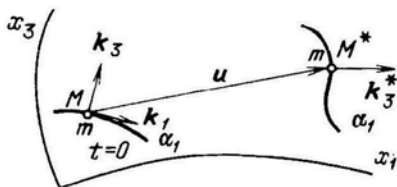
Динамические условия на контактной поверхности получаем, исходя из уравнения (5.5) гл. 1. Уравнение сохранения количества движения струйки идеальной сжимаемой жидкости, протекающей через единичную

площадку поверхности в точке M^* пространства в единицу времени

$$p k_3^* + \rho v \left[\left(v - \frac{\partial u}{\partial t} \right) k_3^* \right] - Z = p' k_3^* + \rho' v' \left[\left(v' - \frac{\partial u}{\partial t} \right) k_3^* \right]. \quad (M^*) \quad (1.6)$$

Здесь $(-Z)$ вектор сил, действующих на жидкость со стороны оболочки. На последнюю действует сила Z .

Отсюда получим выражения для компонент сил Z_m и Z_m^* в проекциях на оси в начальный (k_1, k_2, k_3) и текущий (k_1^*, k_2^*, k_3^*) моменты времени.



Р и с. 4.2. Два положения оболочки в пространстве. В начальный момент времени лагранжева и эйлера системы координат не совпадают

Последние входят в правые части уравнений движения оболочки (1.2) и (1.3) в гл. 2. С учетом первых условий в (1.4) и (1.5) будем иметь

$$Z_m = (p - p') E_m + \rho (v_m - v'_m) (v_i - \partial u_i / \partial t) E_i, \quad (M^*) \quad (1.7)$$

$$Z_m^* = (p - p') \delta_{3m} + \rho (v_m^* - v'^*_m) (v_3^* - \partial u_i / \partial t \cdot E_i). \quad (1.8)$$

Здесь так же, как выше, по двойным индексам ($i = 1, 2, 3$) производится суммирование, δ_{3m} — символ Кронекера.

Согласно (1.7) и (1.8), правые части указанных выше уравнений изгиба содержат компоненты скорости перемещения u_i . Их можно исключить из состава Z_m и Z_m^* при помощи последних условий в (1.4) и (1.5). Тогда (1.7) и (1.8) будут выражены через компоненты скорости протекания

$$Z_m = (p - p') E_m + \rho V_i E_i (v_m - v'_m), \quad (M^*) \quad (1.9)$$

$$Z_m^* = (p - p') \delta_{3m} + \rho V_3^* (v_m^* - v'^*_m). \quad (1.10)$$

Таким образом, в уравнениях изгиба $L_m = R_m + Z_m$, полученных проектированием всех сил на направления k_1, k_2, k_3 , могут быть использованы Z_m как в форме (1.7), так и (1.9). Аналогично, уравнения изгиба $L_m^* = R_m^* + Z_m^*$, полученные проектированием всех сил на направления k_1^*, k_2^*, k_3^* , рассматриваются совместно с (1.8) или (1.10). Преимущество разных вариантов записи кинематических и динамических условий зависит от решаемой конкретной задачи.

Как следует из (1.7)–(1.10), проницаемость приводит к появлению касательных сил на оболочку даже в случае идеальной жидкости. Они равны нулю лишь в режиме обтекания с одинаковыми значениями касательных составляющих скорости жидкости на поверхности σ ($v_1^* - v_1'^* = 0$, $v_2^* - v_2'^* = 0$). В этом состоит одна из основных особенностей задачи взаимо-

действия проницаемой оболочки по сравнению со случаем непроницаемой оболочки.

В заключение параграфа дадим одно обобщение постановки задачи. Оно состоит в следующем.

При решении некоторых конкретных задач удобнее оперировать системой координат Эйлера x_1, x_2, x_3 , не совпадающей в начальный момент $t = 0$ с системой $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (рис. 4.2). Обозначим через a_1, a_2, a_3 орты по криволинейным ортогональным линиям x_1, x_2, x_3 в точке M пространства. Связь их с ортами k_1, k_2, k_3 по линиям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в той же точке M выражается формулой

$$a_j = c_{ji} k_i. \quad (1.11)$$

Тогда, представляя v, v' в компонентах базиса a_1, a_2, a_3 ($v = v_j a_j$), а также учитывая $u = u_i k_i$, вместо (1.4) можно получить (по i и j — суммирование)

$$\begin{aligned} [\rho (c_{ji} v_j - \partial u_i / \partial t) - \rho' (c_{ji} v'_j - \partial u_i / \partial t)] E_i &= 0, \\ (c_{ji} v_j - \partial u_i / \partial t) E_i &= 0 \end{aligned} \quad (M^*) \quad (1.12)$$

Аналогично можно записать другие варианты кинематических условий, а также выражений для усилий. Например, вместо (1.9) будем иметь

$$Z_m = (p - p') E_m + \rho V_3^* c_{jm} (v_j - v'_j). \quad (M^*) \quad (1.13)$$

Здесь также учтено, что $V_3^* = V_i E_i$.

В случае, когда при $t = 0$ оболочка занимает положение $x_3 = x_3^0$, а координаты x_1, x_2 совпадают с α_1, α_2 , имеем $c_{ii} = 1$, $c_{ij} = 0$ ($i \neq j$) и $a_i = k_i$. При этом приходим к условиям (1.4) и (1.9).

§ 2. Зависимости для скорости протекания и жесткости оболочки

Вопросам экспериментального определения скорости протекания воздуха и воды сквозь ткань, перфорированные металлические пластины, проволочную сетку, слой сыпучей среды и т.д. в литературе уделялось значительное внимание [5, 6, 10, 12–14, 18–26]. Она зависит от ряда факторов — перепада давления $p - p'$, плотности и вязкости жидкости, перфорации и деформации оболочки и т.д.

Наиболее часто использовались зависимости

$$p - p' = a V_3^* + b V_3^{*2}, \quad V_3^* = \alpha (p - p')^\beta, \quad (M^*) \quad (2.1)$$

где a, b, α, β — экспериментальные коэффициенты.

На рис. 4.3 кривыми 1, 2, 3 даны графические зависимости V_3^* от перепада $p - p'$ для трех сортов капроновых тканей, применяемых для куполов парашютов. В том же порядке 1, 2, 3 в таблице 1 приводятся значения коэффициентов a, b, α, β .

Общие оценки для натуральных тканей [21] $\beta = 0,59 \div 0,7$, а для искусственных $\beta = 0,55$. На основании этих данных можно утверждать, что

для тканей $1/2 \leq \beta \leq 2/3$. В более широких пределах меняются другие коэффициенты, особенно a и b .

Соотношения (2.1) обладают тем недостатком, что при изменении знака перепада давления не изменяется знак скорости V_3^* и наоборот. Поэтому можно предложить следующую форму их записи:

$$p - p' = a V_3^* + b V_3^{*2} \operatorname{sign} V_3^*, \quad (M^*)$$

$$V_3^* = \alpha (p - p')^\beta \operatorname{sign} (p - p'). \quad (2.2)$$

В более общих соотношениях проницаемости должно учитываться также влияние деформации срединной поверхности оболочки [7, 8] и

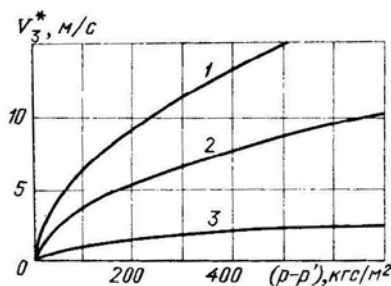


Рис. 4.3. Соотношения проницаемости для капроновых тканей

ряда других факторов, часто очень сложных [5, 6, 12–14, 21], в которые мы не будем углубляться.

Отметим лишь, что зависимости между скоростью протекания жидкости и перепадом давления (градиентом давления) типа (2.1) широко используются и в других областях механики и техники. Например, в теории фильтрации жидкостей и газов в пористых средах применяется закон Дарси, который получается из (2.1), если положить в них $b = 0$, $\beta = 1$. В этом случае величина a называется коэффициентом фильтрации и характеризует пористость среды и свойства жидкости. Учет вязкости жид-

Таблица 1

Номера кривых	a , $\frac{\text{кгс} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}$	b , $\frac{\text{кгс} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^4}$	α , $\frac{\text{м}}{\text{с}} \left(\frac{\text{м}^2}{\text{кгс}} \right)^\beta$	β (безразм.)
1	3,7	2,0	0,49	0,55
2	21,7	3,7	0,38	0,50
3	55,0	76,0	0,09	0,52

кгс — килограмм-сила. $1 \text{ кгс} = 9,8 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 9,8 \text{ Н}$, где кг — килограмм-масса, Н — ньютон.

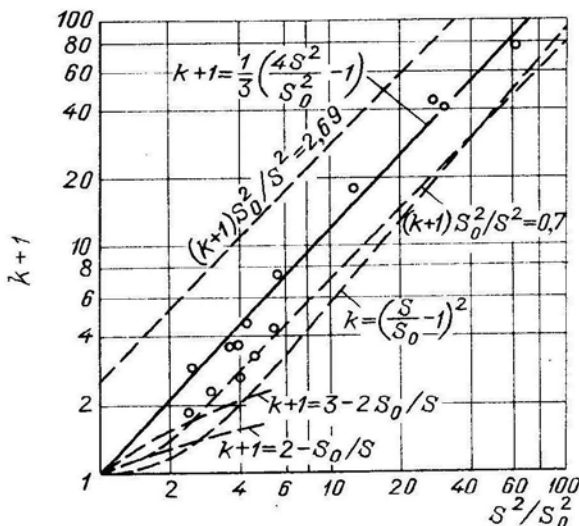


Рис. 4.4. Зависимость характеристики проницаемости пластины от ее степени перфорации

кости, а также инерционности течения в порах среды приводит к квадратическому закону

$$\text{grad } p = a \left(1 + \frac{b}{a} |V_3^*| \right) V_3^*.$$

Имеются исследования особенностей проницаемости металлических перфорированных пластин и проволочных сеток. В работе [20] для последних также получены зависимости вида (2.1). Указывается, что они справедливы в интервале $0,1 \leq \text{Re} \leq 1000$, когда пористость колеблется в пределах от 0,35 до 0,76. Здесь число Рейнольдса Re определяется как $\rho V_3^* / (\mu_0 d^2 D)$, где ρ , μ_0 — плотность и вязкость жидкости, d , D — отношение площади поверхности к единице объема проволоки экрана и средний диаметр пор. В [5, 18, 20] приводится также соответствующая библиография.

Экспериментально устанавливается связь скорости протекания V_3^* также от отношения площади отверстий S_0 в пластине к ее общей площади S .

Остановимся на одном из первых примеров определения такой зависимости для перфорированной пластины и металлической сетки, поставленной поперек потока [26]. Принята линейная связь V_3^* от скорости V_∞ на бесконечности

$$V_3^* = 4V_\infty / (4 + k). \quad (2.3)$$

На рис. 4.4, взятом из [26], нанесены экспериментальные точки, а штриховыми линиями даны аналитические зависимости $k = f(S/S_0)$. По-

следние установлены на основе определенных гипотез. Однако ни одна из них удовлетворительно не описывает эксперимент. Была предложена также зависимость [4]

$$k + 1 = \frac{1}{3} (4S^2/S_0^2 - 1), \quad (2.4)$$

показанная на рис. 4.4 сплошной линией.

Из (2.3) и (2.4) имеем

$$V_3^* = \frac{3V_\infty}{2 + (S/S_0)^2}. \quad (2.5)$$

Согласно (2.5) для непроницаемой пластины ($S_0/S \rightarrow 0$) скорость протекания равна нулю, в другом предельном случае ($S_0/S \rightarrow 1$) $V_3^* = V_\infty$. Если $S_0/S = 1/2$, то $V_3^* = (4/7)V_\infty$. Следует отметить, что V_3^* — это скорость, приходящаяся на единицу общей площади пластины, а не реальная скорость протекания через отверстие.

На основе экспериментальных данных работы [26] в статье [4] была предложена следующая формула для перепада давления:

$$p - p' = \frac{2}{3} \rho_\infty V_\infty^2 \left(1 - \frac{S_0^2}{S^2}\right). \quad (2.6)$$

При этом принято, что перепад на непроницаемой пластине равняется $(2/3)\rho_\infty V_\infty^2$. Не учитывается в этом гидравлическом приближении эффект сжимаемости струйки через отверстие, возможность отклонения направления ее истечения, заклинивания и т.д. Эти вопросы рассматриваются в специальной литературе.

Перфорированная пластина испытывает изгиб под действием давления Z_3^* , примерно равного $(1 - S_0/S)(p - p')$, т.е. в соответствии с (2.6)

$$Z_3^* = \frac{2}{3} \rho_\infty V_\infty^2 \left(1 - \frac{S_0^2}{S^2}\right) \left(1 - \frac{S_0}{S}\right). \quad (2.7)$$

По аналогии с (2.7) в общие формулы для действующих на оболочку сил (1.7) — (1.10) также вводим коэффициент ϵ , имеющий смысл отношения площади непротекаемой части к площади всей пластины $(1 - S_0/S)$:

$$Z_m = \epsilon [(p - p') E_m + \rho V_i E_i (v_m - v'_m)], \quad (M^*) \quad (2.8)$$

$$Z_m^* = \epsilon [(p - p') \delta_{3m} + \rho V_3^* (v_m^* - v'_m^*)]. \quad (2.9)$$

Строго говоря, по каждому направлению должны быть разные значения ϵ (т.е. ϵ_m , причем все ϵ_m меньше единицы). Кроме того, в уравнениях (2.8) и (2.9) они также должны отличаться (в последнем, ϵ_m^*). Однако мы ограничиваемся случаем $\epsilon_m = \epsilon_m^* = \epsilon$. Отметим, что коэффициент ϵ в общем случае связан с параметрами a , b , α , β в соотношениях (2.1) и (2.2).

Коснемся вопроса о жесткости оболочки. По сравнению со случаем теплоизолированной сплошной стенки здесь изменение жесткости связано с нагревом материала и перфорацией.

Введем обозначения: $\tilde{W}$ — отток (приток) энергии от стенки к жидкости; $i, q, \tilde{\sigma}$ — удельные внутренняя энергия, поток энергии и энтропия в жидкости; $i', q', \tilde{\sigma}'$ — то же с другой стороны стенки. При этом уравнение сохранения энергии струйки жидкости, протекающей через единичную площадку в точке M^* пространства, имеет вид (уравнение (5.6) гл. 1)

$$\begin{aligned} p v k_3^* + q + \rho \left[\left(v - \frac{\partial u}{\partial t} \right) k_3^* \right] \left(\frac{v^2}{2} + i \right) - Z \left(v - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \tilde{W} = \\ = p' v' k_3^* + q' + \rho' \left[\left(v' - \frac{\partial u}{\partial t} \right) k_3^* \right] \left(\frac{v'^2}{2} + i' \right). \end{aligned} \quad (M^*) \quad (2.10)$$

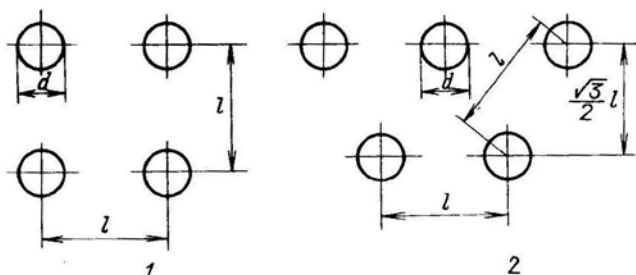
Как в предыдущем параграфе, будем оперировать компонентами скорости движения жидкости по эйлеровым координатам x_1, x_2, x_3 и компонентами вектора перемещения оболочки по лагранжевским координатам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в начальном положении. При этом удобнее сохранить величину скорости протекания по нормали к деформированной поверхности V_3^* , так как она непосредственно связана с перепадом давления. Тогда с учетом (1.1), (1.4) уравнение (2.10) можно записать

$$\tilde{W} = (p v_i - p' v'_i) E_i + q - q' + \rho V_3^* \left[\frac{1}{2} (v^2 - v'^2) + i - i' \right] - Z_m \left(v_m - \frac{\partial u_m}{\partial t} \right). \quad (2.11)$$

Скачок энтропии в струйке жидкости равен

$$\Omega = \rho V_3^* (\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}'). \quad (M^*) \quad (2.12)$$

Он обусловлен изменением энтропии за счет притока тепла со стороны



Р и с. 4.5. Два вида перфорации

стенки и необратимого роста энтропии. В (2.11) и (2.12) также может быть введен поправочный коэффициент, связанный с пористостью поверхности.

По (2.11) и уравнению теплопроводности определяется температура стенки. Далее, исходя из температурной диаграммы, находится соответствующее значение модуля упругости материала.

Аналізу жесткости на растяжение и изгиб перфорированных пластин и оболочек посвящена значительная литература [3].

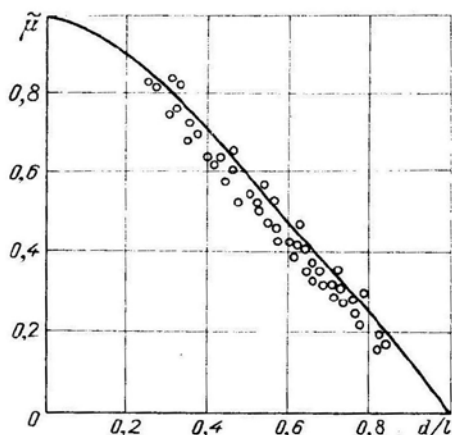


Рис. 4.6. Зависимость изгибной жесткости пластины от степени ее перфорации

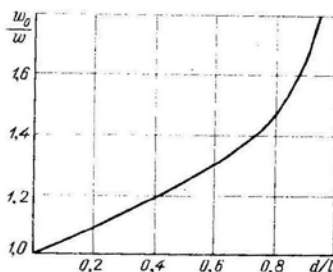


Рис. 4.7. Изменение максимального прогиба пластины в зависимости от степени ее перфорации

Уменьшение изгибной жесткости характеризуется коэффициентом $\tilde{\mu} = D^*/D$, где D^* — приведенная цилиндрическая жесткость перфорированной оболочки, а D — жесткость сплошной оболочки той же толщины из того же материала. Специальные исследования показывают, что коэффициент $\tilde{\mu}$ слабо зависит от вида перфорации. На рис. 4.5 показаны два вида перфорации, а на рис. 4.6 приведен график зависимости $\tilde{\mu}$ от отношения диаметра отверстий к расстоянию между ними d/l [3]. Сплошной линией показаны расчетные, а точками — экспериментальные значения.

Увеличение перфорации стенки приводит к уменьшению как действующей со стороны потока силы, так и жесткости. Для того, чтобы оценить, какой из этих факторов преобладает, рассмотрим цилиндрический изгиб длинной пластины со свободно опертыми краями, поставленной поперек потока. При этом для давления на пластину воспользуемся формулой (2.7). Уравнение изгиба

$$D\tilde{\mu}d^4w/dx^4 = Z^*. \quad (2.13)$$

Принимая $w = W\sin(\pi x/L)$ и интегрируя (2.13) по методу Бубнова — Галеркина, получаем значение W . Отношение прогибов перфорированной (w_0) и сплошной (w) пластины равно (в (2.7) учтено, что $S_0/S = \pi d^2/4l^2$)

$$\frac{w_0}{w} = \frac{1}{\tilde{\mu}(d/l)} \left(1 - \frac{\pi^2}{16} \frac{d^4}{l^4}\right) \left(1 - \frac{\pi}{4} \frac{d^2}{l^2}\right). \quad (2.14)$$

Здесь $\tilde{\mu}(d/l)$ берется из графика рис. 4.6.

На рис. 4.7 построено это отношение прогибов. Видно, что с увеличением перфорации пластины прогиб ее возрастает. При $d/l \rightarrow 1$ согласно рис. 4.6 и формулам (2.7), (2.14) давление на пластину имеет конечную величину, а жесткость на изгиб стремится к нулю. Поэтому отношение w_0/w неограниченно возрастает.

§ 3. Частные случаи

Условия (1.4), (1.5), (1.7)–(1.10), (2.1), (2.2) ставятся в точке M^* пространства, с которой совпадает в данное время фиксированная точка m оболочки. Приведение их к точке M пространства с известными эйлеровыми координатами на недеформированной поверхности путем аналитического продолжения функций, описывающих движение жидкости, может быть сделано, как в гл. 2. Однако такое приведение в общем виде вызывает в задаче взаимодействия проницаемой оболочки чрезмерное усложнение. Это целесообразнее делать в конкретных задачах. Способ приведения и анализ подробно изложен в гл. 2.

Однако даже в частных случаях решение задачи с указанным приведением условий к поверхности до деформации не всегда возможно аналитическими методами. Основными являются численные методы, когда условия на контактной поверхности могут ставиться с учетом ее перемещения на каждом шаге по времени. Ниже ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев условий, которые ставятся в точке M^* .

1. Важным частным случаем является приближение несжимаемости жидкости, что справедливо, например, при скоростях обтекания, много меньших скорости распространения возмущений в ней. Полагая $\rho = \rho'$, из (1.4) получаем кинематические условия

$$\begin{aligned} (v_i - v'_i)E_i &= 0, \\ (v_i - V_i - \partial u_i / \partial t)E_i &= 0, \end{aligned} \quad (M^*) \quad (3.1)$$

а из (1.5) –

$$\begin{aligned} v_3^* - v_3'^* &= 0, \\ v_3^* - V_3^* - E_i \partial u_i / \partial t &= 0. \end{aligned} \quad (M^*) \quad (3.2)$$

Эти условия легко могут быть записаны в параметрах течения в областях с каждой стороны от стенки. Например, из последних условий следует

$$\begin{aligned} v_3^* &= V_3^* + E_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + E_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + E_3 \frac{\partial u_3}{\partial t}, \\ v_3'^* &= V_3^* + E_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + E_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + E_3 \frac{\partial u_3}{\partial t}. \end{aligned} \quad (M^*)$$

Соотношения проницаемости (2.1), (2.2) и выражения для усилий (2.8), (2.9) остаются в той же форме.

2. При медленной деформации оболочки (по сравнению со скоростями в жидкости), когда можно принять $\partial u_i / \partial t \ll v_i, v'_i$, контактные условия имеют вид

$$\begin{aligned} (\rho v_i - \rho' v'_i)E_i &= 0, \quad (v_i - V_i)E_i = 0, \\ \rho v_3^* - \rho' v_3'^* &= 0, \quad v_3^* - V_3^* = 0, \\ Z_m &= \epsilon [(p - p')E_m + \rho v_i E_i (v_m - v'_m)], \\ Z_m^* &= \epsilon [(p - p')\delta_{3m} + \rho v_3^* (v_m^* - v_m'^*)]. \end{aligned} \quad (M^*) \quad (3.3)$$

Выражения Z_m , Z_m^* через скорость протекания (2.8), (2.9), а также соотношения проницаемости остаются без изменения.

В данном случае вопрос о пренебрежении инерционными членами в уравнениях, описывающих деформацию оболочки, требует дополнительного рассмотрения.

В отличие от компонент перемещения u_i , входящих в состав E_i , в $\partial u_i / \partial t$ может подразумеваться и скорость движения стенки как жесткого тела относительно неподвижной в пространстве эйлеровой системы координат. Поэтому при равномерном движении стенки как твердого тела инерционные члены в уравнениях ее изгиба равны нулю, но в кинематических условиях члены $\partial u_i / \partial t$ сохраняются.

3. В предположении об абсолютной жесткости оболочки имеем $E_1 = E_2 = 0$, $E_3 = 1$, $v_i^* = v_i$, $V_3^* = V_3$, $Z_m^* = Z_m$. При этом уравнения (1.4), (2.8) совпадают с (1.5) и (2.9) и приобретают вид

$$\begin{aligned} \rho v_3 - \rho' v_3' - (\rho - \rho') \partial u_3 / \partial t &= 0, \quad v_3 - V_3 - \partial u_3 / \partial t = 0, \\ Z_m &= \epsilon [(p - p') \delta_{3m} + \rho V_3 (v_3 - v_3')]. \end{aligned} \quad (M^*) \quad (3.4)$$

Здесь $\partial u_3 / \partial t$ представляет собой нормальную к срединной поверхности компоненту скорости движения абсолютно жесткой оболочки.

4. Оболочка непроницаема: $V_3^* = 0$ или $a = \infty$, $\alpha = 0$ в соотношениях (2.1), (2.2). Кинематические условия приобретают вид

$$\begin{aligned} (v_i - \partial u_i / \partial t) E_i &= 0, \quad (v_i' - \partial u_i' / \partial t) E_i = 0, \\ v_3^* - E_i \partial u_i / \partial t &= 0, \quad v_3'^* - E_i \partial u_i' / \partial t = 0, \end{aligned} \quad (M^*) \quad (3.5)$$

т.е. они формулируются отдельно для каждой области с двух сторон стенки. При этом плотности терпят произвольный разрыв ($\rho \neq \rho'$).

Давление на оболочку со стороны жидкости равно

$$Z_m = (p - p') E_m, \quad Z_m^* = (p - p') \delta_{3m}. \quad (M^*) \quad (3.6)$$

Здесь отсутствуют касательные к деформированной поверхности составляющие сил, а $\epsilon = 1$.

Детальный анализ этого случая дан в главе 2.

5. Рассмотрим случай $\rho = \rho'$, $(v_i, v_i') \leq \partial u_i / \partial t$, который реализуется, например, при движении оболочки с большой проницаемостью (сети) в покоящейся воде. Из (3.1), (3.2) получим

$$\begin{aligned} (v_i - v_i') E_i &= 0, \quad (V_i + \partial u_i / \partial t) E_i = 0, \\ v_3^* - v_3'^* &= 0, \quad V_3^* + E_i \partial u_i / \partial t = 0. \end{aligned} \quad (M^*) \quad (3.7)$$

Выражение для Z_m имеет вид

$$Z_m = \epsilon [(p - p') E_m - \rho E_i \partial u_i / \partial t (v_m - v_m')]. \quad (M^*) \quad (3.8)$$

Значительные упрощения достигаются при ограничениях на отдельные компоненты векторов перемещения в оболочке и скорости в жидкости, на их показатели изменчивости по координатам и т.д. Некоторые другие упрощения даны в гл. 2 и 3.

Остановимся лишь на примере взаимодействия пологой панели, обтекаемой дозвуковым потоком сжимаемой жидкости под малым углом

атаки (углом между хордой панели и направлением скорости вдали от нее). В этом случае происходит плавное изменение параметров потока по координатам. Числа в (5.1) гл. 2 равны $m = 1$, $n = 1/2$, $k = -1/2$, $\lambda, \mu \geq 1$. Поэтому при приведении кинематических и динамических условий (1.4), (1.5), (2.8), (2.9), соотношений проницаемости (2.2) к недеформированной поверхности вторые члены в разложениях в ряд Тейлора $v_{(M^*)} = v_{(M)} + [(u \cdot \nabla) v]_{(M)}$, $\rho_{(M^*)} = \rho_{(M)} + [(u \cdot \nabla) \rho]_{(M)}$, ... малы по сравнению с первыми. В силу этого при записи всех контактных условий деформированная поверхность отождествляется с недеформированной (или с хордой).

Как известно из гл. 2, в случае пологой оболочки $u_1 \sim \omega_1 w$, $u_2 \sim \omega_2 w$, $\omega_1 = \partial w / \partial x$, $\omega_2 = \partial w / \partial y$, $E_1 = -\omega_1$, $E_2 = -\omega_2$, $E_3 = 1$. Учитывая, что $V_i = V_3^* E_i$ и производя оценки членов (1.4) подобно тому, как это делалось в гл. 2, получаем кинематические условия

$$v_3 = \frac{\partial w}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w}{\partial y} + V_3^*, \quad (M) \quad (3.9)$$

$$\rho v_3 - \rho' v_3' - (\rho - \rho') \frac{\partial w}{\partial t} - (\rho v_1 - \rho' v_1') \frac{\partial w}{\partial x} - (\rho v_2 - \rho' v_2') \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Последнему из них можно также придать вид закона сохранения массы струйки жидкости через поверхность

$$\rho \left(v_3 - \frac{\partial w}{\partial t} - v_1 \frac{\partial w}{\partial x} - v_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \rho' \left(v_3' - \frac{\partial w}{\partial t} - v_1' \frac{\partial w}{\partial x} - v_2' \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (3.10)$$

Из (2.8), (2.9) получаем

$$Z_1 = Z_2 = 0, \quad Z_3 = Z_3^* = \epsilon(p - p'), \quad (M) \quad (3.11)$$

а соотношения проницаемости (2.2) сохраняют свой вид.

В случае несжимаемой жидкости ($\rho = \rho'$) к первому условию (3.9) нужно присоединить уравнение

$$v_3 - v_3' = (v_1 - v_1') \frac{\partial w}{\partial x} + (v_2 - v_2') \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (M)$$

либо

$$v_3' = \frac{\partial w}{\partial t} + v_1' \frac{\partial w}{\partial x} + v_2' \frac{\partial w}{\partial y} + V_3^*. \quad (M)$$

Соотношения (3.11) не изменяются.

§ 4. Изгиб цилиндрической оболочки в потоке несжимаемой жидкости

Рассматривается плоская задача о статическом изгибе тонкой упругой цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании потоком идеальной несжимаемой жидкости [9]. Такая задача в линейной постановке была решена в § 1 гл. 3. Единственным отличием здесь является введение в рассмотрение заданной равномерной проницаемости стенки. При

этом принимается линейная связь скорости протекания и перепада давления, т.е. $\beta = 1$ во втором соотношении (2.1).

Предполагается, что введение проницаемости не нарушает потенциальности течения; параметры потока и оболочки таковы, что последняя далека от пределов упругого выпучивания. Далее, предельными случаями задачи являются равномерное течение жидкости при абсолютной проницаемости поверхности (в законе $V_3^* = \alpha(p - p')$ коэффициент $\alpha = \infty$) и безотрывное обтекание непроницаемой оболочки ($\alpha = 0$). В последнем случае более близкой к действительности была бы модель отрывного обтекания, но она здесь нами не рассматривается. Поэтому данное решение носит в основном методический характер и не претендует на описание реальной картины.

При записи условий сопряжения решений на срединной поверхности оболочки деформированная поверхность отождествляется с недеформированной. Влияние разделения их изучено в гл. 3. Здесь внимание сосредоточиваем лишь на приближенном учете проницаемости.

Обозначения давления и потенциала скорости жидкости внутри оболочки снабдим штрихом. На большом удалении от нее параметры равны p_∞ , ρ_∞ , V_∞ . Согласно интегралу Лагранжа—Коши для установившегося движения несжимаемой жидкости

$$\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho_\infty} = C. \quad (4.1)$$

Отсюда получаем

$$p = p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2} [V_\infty^2 - (\nabla \varphi)^2], \quad (4.2)$$

$$p' = p'_0 - \frac{\rho_\infty}{2} (\nabla \varphi')^2, \quad (4.3)$$

где параметр p'_0 определяется из решения задачи.

Решения уравнений

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \varphi' = 0 \quad (4.4)$$

должны удовлетворять условиям

$$\varphi = -V_\infty r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty), \quad \varphi' \neq \infty \quad (r = 0) \quad (4.5)$$

и в соответствии с изложенным в предыдущих параграфах — равенству $(\partial u_i / \partial t = 0, v_\theta = \partial \varphi / r \partial \theta, v_r = \partial \varphi / \partial r)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \omega_\theta = \frac{\partial \varphi'}{\partial r} - \frac{\partial \varphi'}{r \partial \theta} \omega_\theta \quad (r = R). \quad (4.6)$$

Как известно из гл. 1, в данном случае поворот нормали к поверхности оболочки равен $\omega_\theta = (\partial w / \partial \theta - v) / R$, где v, w — компоненты перемещения.

Закон проницаемости

$$V_3^* = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \omega_\theta = \alpha(p - p') \quad (r = R) \quad (4.7)$$

и уравнения изгиба оболочки

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{b^2 R^4}{D} Z_\theta \quad (r = R), \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + w + b^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right) w = -\frac{b^2 R^4}{D} Z_r \quad (r = R). \quad (4.9)$$

Здесь α — коэффициент пропорциональности, $b^2 = h^2/12R^2$, $D = (\tilde{\mu}/\epsilon) E h^3/12(1-\nu^2)$. Смысл коэффициентов $\tilde{\mu}$ и ϵ известен из § 2 данной главы.

Согласно изложенному в предыдущих параграфах

$$Z_\theta = \alpha \rho_\infty (p' - p) \left(\frac{\partial \varphi'}{R \partial \theta} + \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \omega_\theta - \frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \omega_\theta \right), \quad Z_r = p' - p, \quad (4.10)$$

где учтено (4.7) и включение ϵ в состав D в системе (4.8), (4.9).

Приближенное решение задачи проведем в два этапа. На первом определим действующие на оболочку силы в предположении ее абсолютной жесткости. На втором из них определим изгиб оболочки под действием этих сил.

Как известно из гл. 3, решение уравнения Лапласа (4.4) для внешней области (удовлетворяющее первому условию (4.5)) имеет вид

$$\varphi = -V_\infty r \cos \theta + \sum_{n=1}^N B_n r^{-n} \cos n\theta. \quad (4.11)$$

Для внутренней области запишем

$$\varphi' = K_0 + \sum_{n=1}^N K_n r^n \cos n\theta. \quad (4.12)$$

В случае абсолютно жесткой ($v = w = 0$, $\omega = 0$) проницаемой оболочки из (4.11), (4.12), (4.6) находим

$$K_n = -(\delta_{1n} V_\infty + B_n R^{-2n}), \quad (4.13)$$

где δ_{1n} — символ Кронекера.

Подставляя (4.11)–(4.13), (4.2), (4.3) в (4.7) и приравнявая коэффициенты при косинусах одинаковых аргументов, получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} p'_0 &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 (1 + 2D_1) \quad (n=0), \\ \kappa D_1 - D_2 &= -\kappa \quad (n=1), \quad D_{n-1} + \kappa D_n - D_{n+1} = 0 \quad (2 \leq n \leq N-1), \\ D_{N-1} + \kappa D_N &= 0 \quad (n=N). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь обозначено

$$\kappa = \frac{1}{\alpha \rho_\infty V_\infty}, \quad D_n = \frac{n B_n}{R^{n+1} V_\infty}. \quad (4.15)$$

Решение системы (4.14) дает

$$D_1 = -\kappa \kappa_N, \quad D_n = (-1)^n \kappa \prod_{k=N-(n-1)}^N \kappa_k, \dots, \quad (4.16)$$

$$D_N = (-1)^N \kappa \prod_{k=1}^N \kappa_k,$$

где κ_k представляет собой последовательность

$$\kappa_1 = \kappa^{-1}, \quad \kappa_k = (\kappa + \kappa_{k-1})^{-1} \quad (k \geq 2). \quad (4.17)$$

Можно показать [9], что ряды (4.11), (4.12) с коэффициентами (4.16), (4.17) сходятся абсолютно и равномерно. Сходимость рядов тем лучше, чем больше значение κ (4.15), т.е. чем менее проницаема оболочка.

Согласно (4.10), (4.2), (4.3), (4.11), (4.12), (4.14), (4.15) усилия равны

$$Z_\theta = -\rho_\infty V_\infty^2 \left\{ \sum_{n=1}^N D_n [\sin(n-1)\theta + \sin(n+1)\theta] + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^N \sum_{s=1}^N D_m D_s \sin(m+s)\theta \right\}, \quad (4.18)$$

$$Z_r = p' - p = -\kappa \rho_\infty V_\infty^2 \left(\cos \theta + \sum_{n=1}^N D_n \cos n\theta \right).$$

Для абсолютно непроницаемой поверхности ($\kappa = \infty$) из (4.16), (4.17) следует $D_1 = -1, D_2 = \dots = D_N = 0$, а для абсолютно проницаемой ($\kappa = 0$) — $D_1 = D_2 = \dots = D_N = 0$. В первом предельном случае получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = V_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta, \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{r \partial \theta} = 0, \quad p = p_\infty - \rho_\infty V_\infty^2 \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{R^2}{2r^2} - \cos 2\theta \right), \quad (4.19)$$

$$p' = p'_0 = p_\infty - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2, \quad Z_\theta = 0, \quad Z_r = -\rho_\infty V_\infty^2 \cos 2\theta,$$

а во втором получаем плоско-параллельное течение жидкости сквозь оболочку ($\partial \varphi / \partial r = \partial \varphi' / \partial r, \dots, p = p' = p_\infty, Z_\theta = Z_r = 0$).

Отметим, что из (4.19) получается для давления p' в полости вполне определенная связь с параметрами внешнего течения. Это является следствием предельного способа решения задачи; в силу того, что при $\alpha \rightarrow 0$ ($\kappa \rightarrow \infty$) соотношение (4.7) вырождается в условие непроницаемости $\partial \varphi / \partial r = 0$, нет влияния p' на внешний поток. В случае решения задачи с условием $\partial \varphi / \partial r = 0$ давление внутри оболочки может быть произвольным.

На рис. 4.8 построено распределение по углу безразмерных значений перепада давления $\bar{Z}_r = (p' - p) / \rho_\infty V_\infty^2$, а на рис. 4.9 — касательных уси-

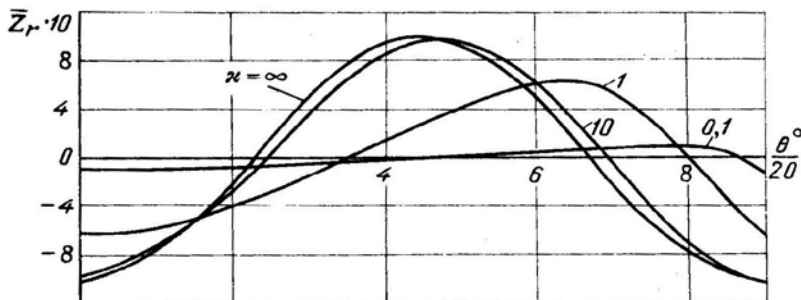


Рис. 4.8. Распределение перепада давления по окружности недеформируемой проницаемой цилиндрической оболочки

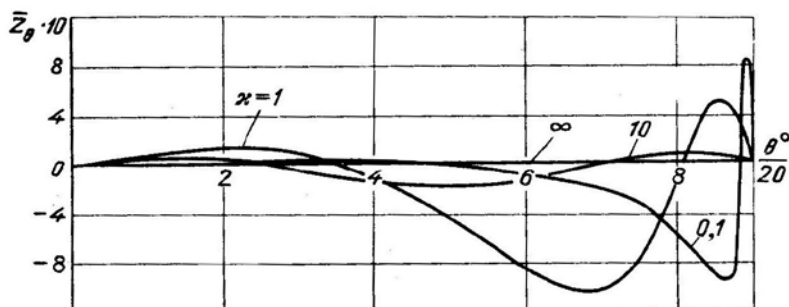


Рис. 4.9. Распределение касательного усилия по окружности недеформируемой проницаемой цилиндрической оболочки

лий $\bar{Z}_\theta = Z_\theta / \rho_\infty V_\infty^2$. Значения параметра проницаемости k принимались равными 0,1; 1; 10; ∞ .

Из них следует, что при $k \geq 10$ нормальные и касательные усилия приближаются к соответствующим их значениям в случае непроницаемой оболочки (последние равны нулю при $k \rightarrow \infty$). С увеличением проницаемости (уменьшением k) нормальные усилия монотонно падают, касательные сначала возрастают, потом также падают до нуля. Отметим, что эти результаты даны для $\epsilon = 1$ или произвольного значения $\epsilon < 1$, но включенного в состав D в системе (4.8), (4.9).

Для построения линий тока пользуемся соотношениями Коши–Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Учитывая полученные выше значения потенциалов φ , φ' и принимая, что углу $\theta = 0$ соответствует нулевая линия тока $\psi = \psi' = 0$, будем иметь

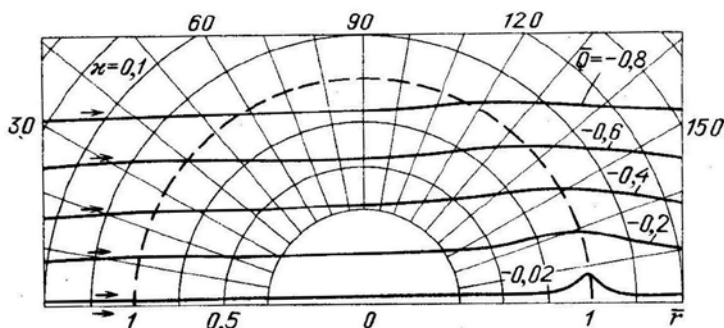
$$\psi = -RV_\infty \left[\frac{r}{R} \sin \theta + \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{n} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sin n\theta \right]. \quad (4.20)$$

Такое же выражение получается для функций тока ψ' .

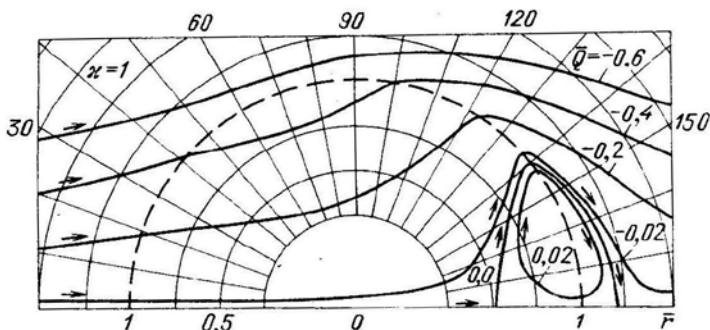
Полагая $\psi = \psi' = Q = \text{const}$, где абсолютное значение Q определяет расход жидкости между рассматриваемой и нулевой линией тока $\theta = 0$, можно построить линии тока. Для ряда значений $\bar{Q} = Q/RV_\infty$ они показаны на рис. 4.10–4.12. При этом значения параметра проницаемости k принимались равными 0,1; 1; 10. Введен безразмерный радиус $\bar{r} = r/R$. Жирная штриховая полуокружность соответствует проницаемой поверхности ($\bar{r} = 1$).

Из рисунков видно значительное влияние проницаемости поверхности на характер обтекания. При малых значениях k происходит малое возмущение заданного однородного потока. При $k \geq 10$ линии тока, не пересекающие поверхность оболочки, близки к соответствующим линиям в случае непроницаемого цилиндра.

В донной части оболочки существует зона, в которой частицы движутся по замкнутым траекториям. Это — следствие принятия нами модели безотрывного обтекания (в предельном случае непроницаемой поверхности), когда в донной части давление в жидкости повышается. На поверхности контакта касательные составляющие скорости с двух сторон терпят



Р и с. 4.10. Линии тока при сильной проницаемости поверхности



Р и с. 4.11. Линии тока при средней проницаемости поверхности

есть

$$\begin{aligned}
 W_0 &= 0, \\
 V_n &= -\frac{1}{n} W_n - \frac{2b^2 \mu R}{n^2} [D_{n-1} + \sum_{s=1}^{n-1} D_{n-s} D_s + (1 - \delta_{nN}) D_{n+1}], \\
 W_n &= \frac{2\mu R}{(n^2 - 1)^2} \left\{ \frac{1}{n} [D_{n-1} + \sum_{s=1}^{n-1} D_{n-s} D_s + (1 - \delta_{nN}) D_{n+1}] - \kappa D_n \right\} \\
 (2 \leq n \leq N).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Так же, как в гл. 3, здесь введен параметр гидроупругости $\mu = \rho_\infty V_\infty^2 R^3 / 2D$. При этом в D входят теперь параметры $\tilde{\mu}$ и ϵ , характеризующие проницаемость поверхности.

Амплитуды V_1, W_1 связаны с поступательным перемещением оболочки как абсолютно твердого тела.

Для случая $\kappa = \infty$, как было показано выше, $D_1 = -1, D_2 = D_3 = \dots = 0$, и вместо (4.22) получаем

$$\begin{aligned}
 W_0 &= 0, \quad V_2 = \mu R / 9, \quad W_2 = -2\mu R / 9, \\
 V_3 &= \dots = 0, \quad W_3 = \dots = 0.
 \end{aligned}$$

Это решение совпадает со случаем (2.10) в гл. 3.

Компоненты перемещения v и w определяются из (2.21) и (4.22).

§ 5. Изгиб цилиндрической оболочки с сосредоточенной перфорацией

В той же физической постановке, что в предыдущем параграфе, рассмотрим изгиб цилиндрической оболочки с малыми отверстиями в ее стенке. Они располагаются вдоль образующей цилиндра через небольшие интервалы, поэтому задачу приближенно можно считать плоской.

Предполагаем, что площадь отверстий мала настолько, что их наличие не приводит к изменению изгибной жесткости и внешнего поля течения по сравнению со случаем целой непроницаемой оболочки. Не учитывается сопротивление, создаваемое этими отверстиями. Пренебрегаем влиянием на решение слабого движения жидкости внутри полости, поскольку скорости здесь на несколько порядков меньше, чем во внешней области.

Таким образом, здесь учитывается лишь особенность, связанная с изменением внутреннего давления из-за наличия малого отверстия. Будем рассматривать линейный изгиб.

Отметим, что в § 1–3 гл. 3 и в предыдущем параграфе не учитывалось взаимодействие мембранных сил (зависящих от перепада давления) и изменения кривизны срединной поверхности оболочки. Здесь учтем этот фактор.

Уравнение линейного изгиба можно получить из (6.5)–(6.8) гл. 3. Из (6.8) в линейном случае находим $\partial v / \partial \theta = -w$. С учетом этого согласно

(6.7) и (6.6)

$$U = 1 - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)$$

$$C = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) d\theta - \frac{R^3}{2\pi D} \int_0^{2\pi} \left(p' - p - w \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) d\theta.$$

Интеграл от изменения кривизны во втором члене C равен нулю. Поэтому из (6.5) гл. 3 получаем следующее линеаризованное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w - \frac{R^3}{2\pi D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \int_0^{2\pi} (p' - p_1) d\theta = \\ = \frac{R^4}{D} \left[p' - p_1 - p_2 - w \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(p' - p_1 - p_2 - w \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) d\theta \right] \quad (r = R). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Так же, как в гл. 3, здесь p_1 — давление внешнего потока на недеформируемый цилиндр, p_2 — возмущение за счет его деформации. При принятых допущениях p' не зависит от изгиба оболочки.

В соответствии с указанным выше допущением о внешнем поле давление p_1 дается выражением (1.20) из гл. 3

$$p_1 = p_\infty - \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \cos 2\theta \right). \quad (5.2)$$

В случае расположения отверстий в лобовой точке ($\theta = 0$) внутри оболочки устанавливается давление полного торможения

$$p' = p_1(\theta = 0) = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2 / 2. \quad (5.3)$$

Подставляя (5.2), (5.3) в (5.1), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w - 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) = -2\mu R \cos 2\theta + f(w), \\ \mu = \rho_\infty V_\infty^2 R^3 / (2D), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где через $f(w)$ обозначены члены, содержащие p_2 и $w \partial p_1 / \partial \theta$ в правой части уравнения (5.1).

Для определения $f(w)$ необходимо решить задачу взаимодействия внешнего потока с деформацией оболочки. В дальнейшем мы воспользуемся решением, приведенным в § 1 гл. 3. Было показано, что основной является гармоника $\cos 2\theta$. Ограничимся этим приближением. Тогда, повторяя необходимые выкладки, вместо (1.21), (1.26) из гл. 3 будем иметь

$$w = W_2 \cos 2\theta = -\frac{2\mu R}{9 + 2\mu} \cos 2\theta. \quad (5.5)$$

Это же выражение ввиду линейности задачи проще может быть получено из решения уравнения (5.4) при $f(w) = 0$

$$w = -\frac{2\mu R}{9 + 6\mu} \cos 2\theta \quad (5.6)$$

и из первой формулы (1.26) гл. 3, где необходимо отбросить малое слагаемое в знаменателе.

Отметим, что без учета влияния мембранных сил, обусловленных средним перепадом давления, выражение (5.6) совпадает с формулами, приведенными в конце предыдущего параграфа и в (2.10) гл. 3. Следовательно, указанный фактор имеет тот же порядок, что и влияние связности внешнего потока и деформации оболочки.

Теперь рассмотрим случай расположения отверстий в периферийных точках ($\theta = \pi/2$; $3\pi/2$). В соответствии с (5.2) внутреннее давление будет равно

$$p' = p_1(\theta = \pi/2) = p_\infty - 3\rho_\infty V_\infty^2/2. \quad (5.7)$$

Тогда в уравнения (5.4) вместо множителя (-2μ) в левой части будет входить $(+2\mu)$, а вместо решений (5.5), (5.6) будем иметь

$$w = -\frac{2\mu R}{9 - 10\mu} \cos 2\theta, \quad w = -\frac{2\mu R}{9 - 6\mu} \cos 2\theta. \quad (5.8)$$

Таким образом, наличие малых отверстий в разных местах оболочки приводит к прогибам одинаковой формы, но значительно отличающимся по величине. Отношение первого выражения (5.8) к (5.5) равно $(9 + 2\mu)/(9 - 10\mu)$. Следовательно, при $\mu = 1/2$ прогиб оболочки с отверстиями в периферийных точках ($\theta = \pi/2$; $3\pi/2$), в два с половиной раза больше, чем в случае расположения отверстий в лобовой точке ($\theta = 0$). Наибольший прогиб оболочки достигается именно при расположении отверстий в периферийных точках. "Критическое" значение параметра в смысле, указанном в § 1 гл. 3, при этом равняется $\mu_+ = 0,9$. В то время как решение (5.5) ограничено при любом значении μ . Это объясняется повышением внутреннего перепада давления с увеличением скорости и его ужесточающим оболочку влиянием.

При тех же допущениях, что выше, обобщим задачу на тот случай, когда отверстия имеются как в лобовой, так и в периферийных точках. Отверстия в последних примем одинаковыми, чтобы сохранить симметричность задачи. Отметим, однако, что при принятых в начале параграфа допущениях это ограничение несущественно.

Из (2.1) имеем соотношения проницаемости ($\beta = 1$)

$$\begin{aligned} V_3^* &= \alpha_A (p_1 - p') & (\theta = 0), \\ V_3^* &= \alpha_B (p_1 - p') & (\theta = \pi/2; 3\pi/2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

В соответствии с законом сохранения массы

$$(\rho_\infty V_3^*)_{\theta=0} = 2(\rho_\infty V_3^*)_{\theta=\pi/2},$$

и с учетом (5.9) находим

$$p' = \frac{\alpha_A p_1(\theta = 0) + 2\alpha_B p_1(\theta = \pi/2)}{\alpha_A + 2\alpha_B}.$$

Подстановка сюда значения p_1 из (5.2) дает следующее значение внутреннего давления:

$$p' = p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \alpha, \quad \alpha = \frac{\alpha_A - 6\alpha_B}{\alpha_A + 2\alpha_B}. \quad (5.10)$$

Отсюда при $\alpha_B = 0$, $\alpha_A \neq 0$ и $\alpha_A = 0$, $\alpha_B \neq 0$ получаются выражения (5.3) и (5.7). В случае, когда пропускная способность лобовых и периферийных отверстий одинакова ($\alpha_A = 2\alpha_B$), из (5.10) следует $p' = p_\infty - \rho_\infty V_\infty^2/2$. Это давление равно значению полного давления (4.19) при равномерной проницаемости, стремящейся к нулю.

Подставив (5.2) и (5.10) в (5.1) и снова принимая одночленное выражение для прогиба, получаем в связанной задаче (с учетом $f(w)$)

$$w = -\frac{2\mu R}{9 - \mu(1 - 3\alpha)} \cos 2\theta. \quad (5.11)$$

Так как коэффициенты α_A , α_B являются только положительными, то в соответствии с (5.10) коэффициент α меняется в пределах $-3 \leq \alpha \leq 1$. При крайних значениях α (5.11) дает величины прогибов по (5.5) и по первой формуле (5.8).

"Критическое" значение параметра гидроупругости μ существует при $-3 \leq \alpha < 1/3$. Левый предел соответствует рассмотренному выше случаю $\alpha_A = 0$ ($\alpha_B \neq 0$, отсутствие отверстий в лобовой точке), а правый — соотношению между коэффициентами $\alpha_A < 10\alpha_B$. Следовательно, неограниченное решение по (5.11) получается в том случае, когда пропускная способность отверстий в лобовой точке в 5 раз меньше, чем пропускная способность отверстий в периферийных точках $\theta = \pi/2$; $3\pi/2$. При $\alpha_A \geq 10\alpha_B$ решение (5.11) ограничено при всех значениях параметра гидроупругости.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ОБОЛОЧКОЙ
И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В предыдущих главах рассматривались формулировка и решение задач взаимодействия непроницаемой и проницаемой оболочки с идеальной жидкостью. Применялся эйлерово-лагранжев способ описания взаимодействия. В данной главе с помощью того же способа описания рассматривается постановка и решение задач в случае вязкой жидкости. Оболочка предполагается непроницаемой.

Очевидно, здесь можно дать общий анализ, аналогичный случаю идеальной жидкости. Однако ограничимся рассмотрением условий контакта в случае цилиндрической системы координат и слабого изгиба оболочки. Последнее ограничение, как это следует из гл. 2, позволяет не делать различия между лагранжевыми координатами на поверхности оболочки и эйлеровыми координатами в области, занятой жидкостью, при записи условий контакта. Однако необходимо различать деформированную поверхность от недеформированной. В задаче об изгибе цилиндрической оболочки в потоке идеальной жидкости (§ 2 гл. 3) это дает двукратное отличие для критического значения параметра гидроупругости μ_+ .

В данной главе мы рассматриваем задачу, где учет деформированной поверхности в условиях контакта приводит к качественно иному результату по сравнению с применением классических условий флаттера несущей поверхности. При этом максимально упрощаем задачу. Для описания движения вязкой жидкости будем пользоваться приближением Стокса, а деформацию пластины и оболочки будем считать заданной. В этом случае нет необходимости рассматривать уравнение изгиба оболочки и динамическое условие на контактной поверхности.

§ 1. Условия на поверхности контакта

Предположения относительно начального состояния оболочки и жидкости, координатных систем для двух сред те же, что при формулировании контактных условий в случае идеальной жидкости (§ 1 гл. 2). В частности, принимаем, что лагранжевы координаты α_1, α_2 , связанные со срединной поверхности, совпадают в начальный момент с эйлеровыми координатами в жидкости x_1, x_2 , причем оболочка занимает положение $x_3 = 0$.

Условия на контактной поверхности могут быть получены из уравнений сохранения на скачке в случае вязкой жидкости. Однако в случае непрони-

даемой поверхности они могут быть записаны просто, так как представляют собой условия прилипания частиц вязкой жидкости к стенке и равенства векторов напряжений.

Фиксированная точка m оболочки с радиусом-вектором r в начальный момент времени ($t = 0$) совпадает с точкой M пространства. В произвольный момент времени ($t > 0$) эта точка m приходит в совпадение с точкой M^* пространства с радиусом-вектором $r + u$, где u — по-прежнему вектор перемещения фиксированной точки m (рис. 2.1).

Условие прилипания сводится к равенству

$$v = \partial u / \partial t. \quad (M^*) \quad (1.1)$$

Динамические условия

$$Z = p_3 - p'_3. \quad (M^*) \quad (1.2)$$

В (1.1) и (1.2) v , p_3 , p'_3 — векторы скорости и поверхностных напряжений в жидкости, Z — вектор усилий, действующих на оболочку, в точке M^* пространства.

Применяя разложения (2.1) из гл. 2, приближенно выразим значение вектора скорости v , определенной в точке M^* пространства, через значение вектора скорости в окрестности точки M пространства. В случае цилиндрической системы координат ($h_1 = 1$, $x_1 = x$, $h_2 = r$, $x_2 = \theta$, $h_3 = 1$, $x_3 = r$) имеем приближенные значения компонент V_m вектора скорости по направлениям ортов k_m (формулы (2.7) из гл. 2)

$$V_m = v_m + u_x \frac{\partial v_m}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial v_m}{r \partial \theta} + u_r \frac{\partial v_m}{\partial r} \quad (m = x, \theta, r). \quad (1.3)$$

Третьи члены разложения в ряд Тейлора не принимаем во внимание ввиду малости компонент перемещения пластины.

С учетом сказанного векторное равенство (1.1) приводится к следующим кинематическим условиям:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - V_x = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial t} - V_\theta = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} - V_r = 0, \quad (M) \quad (1.4)$$

где значения V_x , V_θ , V_r из (1.3) вычисляются в точке M пространства.

В отличие от случая идеальной жидкости при приведении динамических условий (1.2) к недеформированной поверхности нужно пользоваться формулой разложения векторной функции (2.1) из гл. 2

$$Z = p_r + (u \cdot \nabla) p_r + \dots \quad (M) \quad (1.5)$$

Здесь без ущерба для общности опущен член p'_r .

Теперь в правых частях уравнений движения обоих вариантов будут ненулевые правые части. Уравнения движения (1.2) из гл. 2, полученные проектированием всех сил на направления осей до деформации, с учетом (1.5) принимают вид

$$L_m(u_x, u_\theta, u_r) = p_{rm} + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \right) p_{rm} \quad (m = x, \theta, r). \quad (1.6)$$

К ним должны быть присоединены уравнения движения жидкости, неразрывности и уравнение состояния. Естественно, ставятся соответствующие условия на бесконечности или на ограничивающих поле течения поверхностях.

В качестве простейшего примера взаимодействия вязкой жидкости и оболочки рассмотрим задачу Тейлора [59]. Бесконечно протяженная пластина находится в неограниченной вязкой жидкости и совершает колебательное движение в виде бегущей волны. Пластина приводится в колебание с помощью каких-то внутренних силовых факторов; конкретная природа их в данном случае нас не интересует. Рассмотрим задачу в плоской постановке и взаимодействие только по одной стороне пластины ($-\infty < x < \infty$, $z \geq 0$).

Пусть фиксированные точки пластины совершают установившиеся колебания только по нормали к исходной прямолинейной поверхности

$$u_x = 0, \quad u_z = b \sin(\alpha x - \omega t). \quad (1.7)$$

Здесь $\alpha = 2\pi/\lambda$, $\omega = c\alpha$; λ, c — длина и скорость изгибной волны; она распространяется в положительную сторону оси x .

Жидкость считаем несжимаемой, число Рейнольдса малым по сравнению с единицей. Последнее допущение позволяет пренебречь с уравнениях движения жидкости инерционными членами по сравнению с вязкостными членами (стоксовское приближение). Тогда уравнения Навье—Стокса и неразрывности (4.13) из гл. 1 принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu_0 \nabla^2 v_x, & \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu_0 \nabla^2 v_z, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Вводя функцию тока по формулам

$$v_x = -\partial\psi/\partial z, \quad v_z = \partial\psi/\partial x,$$

удовлетворяем уравнению неразрывности (1.8). Далее, исключая давление p из уравнений движения (1.8), получаем

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (1.9)$$

Функция

$$\psi = (Az + B) e^{-\alpha z} \sin(\alpha x - \omega t) - V_0 z, \quad (1.10)$$

удовлетворяющая условиям $v_x = V_0$, $v_z = 0$ при $z \rightarrow \infty$, является частным решением уравнения (1.9). Здесь V_0 — независящая от времени скорость движения жидкости относительно неподвижной системы координат xz . Ее необходимо определить из сформулированной задачи наряду с коэффициентами A и B .

Поскольку колебание пластины задано, то динамические условия (1.6) не применяются. Кинематические условия (1.3), (1.4) имеют вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = v_x + u_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = v_z + u_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + u_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (z=0)$$

или в функции тока ψ (если учесть $u_x = 0$)

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + u_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + u_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad (z=0). \quad (1.11)$$

Подставляя (1.7) и (1.10) в (1.11), получаем

$$A = -b\omega, \quad B = -b\omega/\alpha, \quad V_0 = b^2\alpha\omega/2. \quad (1.12)$$

Следовательно, компоненты скорости равны

$$v_x = -b\omega\alpha z e^{-\alpha z} \sin(\alpha x - \omega t) + \frac{1}{2} b^2 \alpha \omega, \\ v_z = -b\omega(\alpha z + 1) e^{-\alpha z} \cos(\alpha x - \omega t). \quad (1.13)$$

Колебательные составляющие скорости убывают по удалении от пластины ($z > 0$). Видно также, что постоянная часть продольной составляющей скорости направлена в сторону распространения волны. Поступательная скорость движения пластины относительно неподвижной на бесконечности жидкости равна $-V_0$ или $-b^2\alpha\omega/2$.

Выражение для V_0 можно записать также

$$V_0 = 2c(\pi b/\lambda)^2. \quad (1.14)$$

Если, например, $\lambda/b = 10$, то $V_0 \approx 0,2c$. Характерно, что при принятых допущениях значение V_0 зависит только от параметров заданной волны. Следовательно, скорость поступательного движения при указанных выше допущениях пропорциональна скорости и квадрату амплитуд бегущей волны по пластине и обратно пропорциональна квадрату длины волны. Как видно из (1.13), колебания скорости в жидкости прямо пропорциональны первой степени амплитуды.

Таким образом, появление не зависящих от времени течений при возбуждении на границе жидкости бегущих волн обусловлено нелинейными эффектами. Действительно, если в кинематических условиях (1.11) опустить члены с множителями u_z , что соответствует отождествлению деформированной и недеформированной поверхностей, то $V_0 \equiv 0$.

Этот простой пример показывает принципиальную важность более общих нелинейных контактных условий.

Если в (1.11) учитывать члены, соответствующие третьим членам в разложении Тейлора (с множителем u_z^2), то скорость V_0 получается равной

$$V_0 = \frac{1}{2} \alpha \omega b^2 (1 - \alpha^2 b^2).$$

Отметим, что после указанной работы [59], а также [60], [48], было выполнено большое количество исследований по движению тел в жидкости при волнообразной деформации их поверхности. Краткий обзор их приводится в § 4 настоящей главы.

§ 2. Перистальтическое движение

Несколько усложним задачу, приведенную во второй части предыдущего параграфа, а именно, вместо колебаний пластины рассмотрим распространение волны вдоль бесконечно длинной цилиндрической оболочки, внутри которой содержится вязкая жидкость. Все предположения относительно величин компонент перемещения оболочки и механизма его возбуждения, числа Рейнольдса и т.д. оставим без изменения. Под действием заданной бегущей волны по стенке цилиндра вязкая жидкость, так же, как в случае пластины, получает среднее движение; происходит перистальтическое прокачивание жидкости. В физиологии под перистальтикой понимают волнообразное поступательное перемещение сокращений трубчатых объектов: кровеносных сосудов, желчного протока и т.д. Предполагаем, что в жидкости нет градиента среднего давления по длине трубы.

Рассмотрим распространение осесимметричной волны вдоль оболочки в виде (1.7). В этом случае ($u_x = u_\theta = 0$, $u_r \neq 0$) кинематические условия (1.4) с учетом (1.3) и соотношений $rv_x = -\partial\psi/\partial r$, $rv_r = \partial\psi/\partial x$ принимают вид

$$\frac{\partial\psi}{r\partial r} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial\psi}{r\partial r} \right) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{r\partial x} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial\psi}{r\partial x} \right) = \frac{\partial u_r}{\partial t} \quad (r=R). \quad (2.1)$$

Исключая из уравнений (1.8) давление p и учитывая, что теперь в них $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + r^{-1}(\partial/\partial r)(r\partial/\partial r)$, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{r\partial r} \right)^2 \psi = 0. \quad (2.2)$$

Решение его представим в виде

$$\psi(x, r, t) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(r) \sin n(\alpha x - \omega t) + \Psi_0(r). \quad (2.3)$$

С учетом (2.3) получаем из (2.2)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - n^2 \alpha^2 \right)^2 \Psi_n = 0.$$

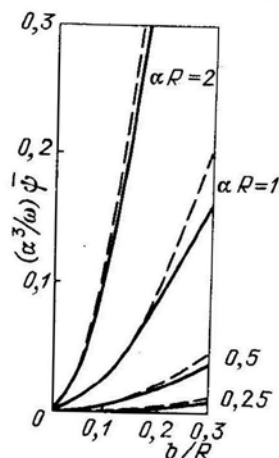
Из (2.2) и (2.3) будем иметь

$$\psi = B_0 r^2 + \sum_{n=1}^N [A_n r^2 I_0(n\alpha r) + B_n r I_1(n\alpha r)] \sin n(\alpha x - \omega t), \quad (2.4)$$

где $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода.

Рис. 5.1. Зависимость функции тока от относительной амплитуды и волнового числа

Произвольные константы A_n, B_n определяются из кинематических условий (2.1) при заданном законе движения стенки (1.7). Так же, как в предыдущем параграфе, основной интерес представляют постоянные значения функции тока и скорости. Усредненная безразмерная функция тока $(\alpha^3/\omega)\bar{\psi}$ в зависимости от относительной амплитуды b/R и волнового числа αR показана на рис. 5.1, заимствованном из работы [34]. Для него видно, что если отношение b/R постоянно, поток через трубу со средним радиусом R приблизительно пропорционален R^2 , т.е. площади поперечного сечения. Если амплитуда b постоянна, то поток почти не зависит от R .



Далее ограничимся указанием на оригинальную литературу по перистальтическому движению вязкой жидкости, не претендуя на его полноту.

Первые теоретические работы [16, 26, 34, 37, 39, 56] относятся ко второй половине шестидесятых годов. Обзор ранних исследований дан, например, в [44]. Определяющими задачу параметрами являются частотное число Рейнольдса $Ru = \omega b^2 \rho / \mu_0$, относительная амплитуда b/R и волновое число αR . В зависимости от них строится математическая модель задачи различной сложности и точности [35, 38, 46, 49, 50, 51, 61, 64, 66]. Рассматривались, главным образом, случаи движения жидкости между двумя пластинами и внутри цилиндра при его осесимметричной деформации. В них большей частью задавались монохроматические волны.

В [17] рассмотрены волны переменной амплитуды в проницаемом цилиндре, в [1] — случай турбулентного течения жидкости. Применительно к транспорту крови в сердечно-сосудистой системе выполнены работы [2, 18] и другие.

В последние годы широко применяются численные методы, когда можно учитывать большие перемещения границы [32, 1]. В [52, 55] и других учитывается взаимодействие с оболочкой, когда задается не движение ее, а действующие внешние силы.

Экспериментальному исследованию посвящены работы [63, 65]. Найдено, что в случае частотных чисел $Ru \sim 1$ и при $b/R \leq 0,3$ разница между расчетными и экспериментальными значениями средней скорости V_0 потока практически отсутствует.

Во всех этих работах показано, что появление потоков, не зависящих от времени, так же, как в задаче из предыдущего параграфа, носит вторичный характер. Их скорости пропорциональны квадрату отношения амплитуды к поперечному размеру трубы или канала.

§ 3. Скорость продольного движения цилиндра в вязкой жидкости

При тех же допущениях, что выше, рассмотрим задачу в случае, когда бесконечно длинный цилиндр находится в вязкой жидкости. Снова нас будет интересовать часть V_0 скорости движения жидкости, которая не зависит от времени. Относительно жидкости цилиндр будет перемещаться со скоростью $-V_0$.

Зададим форму колебаний поверхности оболочки в более общем виде, чем в (1.7):

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{n=1}^N a_n \cos n(\alpha x - \omega t), \\ u_r &= \sum_{n=1}^N b_n \sin n(\alpha x - \omega t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение уравнения (2.2) в данном случае имеет вид

$$\psi = B_0 r^2 + \sum_{n=1}^N [A_n r^2 K_0(n\alpha r) + B_n r K_1(n\alpha r)] \sin n(\alpha x - \omega t), \quad (3.2)$$

где $K_0(z)$, $K_1(z)$ — функции Макдональда.

Вместо условий (2.1) теперь имеем в соответствии с (1.3) и (1.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{r \partial r} + \frac{u_x}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{r \partial r} \right) &= - \frac{\partial u_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial \psi}{r \partial x} + \frac{u_x}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{r \partial x} \right) &= \frac{\partial u_r}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

($r = R$).

Подставим (3.1) и (3.2) в (3.3) и произведем необходимые выкладки [28]. Интересующая нас постоянная часть скорости равна ($B_0 = V_0$)

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{2} \alpha \omega \sum_{n=1}^N n^2 \left\{ \frac{1}{f} [(K_1^2(n\alpha R) - K_0^2(n\alpha R)) n \alpha R b_n^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 K_1^2(n\alpha R) b_n a_n] - a_n^2 \right\}, \\ f(n\alpha R) &= 2 K_0(n\alpha R) K_1(n\alpha R) + n \alpha R [K_0^2(n\alpha R) - K_1^2(n\alpha R)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При больших значениях аргумента $n\alpha R$, используя асимптотические значения функций

$$K_0(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left(1 - \frac{1}{8z} \right), \quad K_1(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{3}{8z} \right),$$

можно получить из (3.4) значение V_0 для пластины:

$$V_0 = \frac{1}{2} \alpha \omega \sum_{n=1}^N n^2 (b_n^2 + 2a_n b_n - a_n^2). \quad (3.5)$$

Взяв отсюда член, соответствующий $n = 1$, и положив $a_n = 0$, получаем результат (1.12). Если в условиях (3.3) учитывать члены с множителями u_x^2 , u_r^2 , $u_x u_r$, то находим ($b_1 = b$, $a_1 = a$)

$$V_0 = \frac{1}{2} \alpha \omega \left[(b^2 + 2ba - a^2) - \alpha^2 \left(b^4 + \frac{1}{2} b^3 a - 2b^2 a^2 + \frac{1}{2} b a^3 \right) \right].$$

На рис. 5.2 приведен график изменения безразмерной скорости

$$\bar{V}_0 = \frac{V_0}{\frac{1}{2} c (\omega b)^2}$$

в зависимости от радиуса цилиндра R . Он построен для случая чисто поперечных колебаний ($a = 0$, $b \neq 0$). При увеличении радиуса цилиндра скорость стремится к значению скорости для пластины. Как видно из (3.4), при чисто продольных колебаниях поверхности ($a_n \neq 0$, $b_n = 0$) не происходит изменения скорости в зависимости от радиуса.

Отметим любопытную особенность полученных решений. Если при возбуждении в оболочке и пластине только поперечных волн ($a = 0$, $b \neq 0$) направления распространения волны и движения жидкости (его постоянной части) совпадают, то при возбуждении только продольных волн ($a \neq 0$,

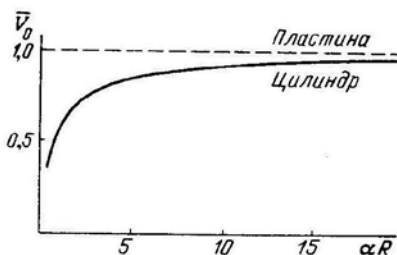


Рис. 5.2. Зависимость скорости продвижения цилиндра от его радиуса

$b = 0$) они противоположны. Соответственно, в первом случае перемещение оболочки (пластины) в вязкой жидкости противоположно направлению волн, во втором — они совпадают. При возбуждении волн, например, с помощью давления с другой стороны стенки и в оболочках из реальных материалов одновременно присутствуют обе составляющие волнового перемещения ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Первый из указанных случаев реализуется при $b^2 + 2ab > a^2$ или $b > 0,4a$, а второй — при $b < 0,4a$.

В литературе, посвященной разбираемому вопросу, указывается, что эти результаты объясняют механизм перемещения микроорганизмов в жидкости. Некоторые из них перемещаются в направлении, противоположном распространению волны, другие — в направлении волны.

Из уравнений движения (1.8) можно найти давление

$$p = \mu_0 \int \nabla^2 v_x dx = -\mu_0 \int \nabla^2 (\partial \psi / r \partial r) dx. \quad (3.6)$$

Напряжения на цилиндрической поверхности равны

$$p_{rx} = -2\mu_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right), \quad p_{rr} = -p + 2\mu_0 \partial v_r / \partial r. \quad (3.7)$$

Мощность, развиваемая подвижной поверхностью цилиндра единичной ширины и одной длины волны, равна

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [v_x p_{rx} + v_r p_{rr}] d(\alpha x - \omega t). \quad (3.8)$$

Проведя необходимые выкладки с выражениями (3.2), (3.6), (3.7), (3.8), при $n = 1$ ($a_1 = a$, $b_1 = b$), находим [28]

$$E = \mu_0 \omega^2 \alpha \left\{ \frac{b^2}{\alpha R} - 2ba + \frac{1}{f(\alpha R)} [K_0(\alpha R) \cdot b + K_1(\alpha R) \cdot a]^2 \right\}. \quad (3.9)$$

При больших значениях аргумента αR , пользуясь асимптотическими выражениями для функций K_0 , K_1 , получаем значение мощности для пластины

$$E = \mu_0 \omega^2 \alpha (b^2 + a^2). \quad (3.10)$$

Тянущая сила, приходящая на рассматриваемую площадку поверхности пластины, приблизительно равна [28]

$$T = 2\mu_0 \alpha V_0. \quad (3.11)$$

Помимо развиваемой скорости V_0 и тяги T важной характеристикой волнового движителя является коэффициент полезного действия. Средний по времени гидродинамический коэффициент полезного действия определяется выражением

$$\eta = V_0 T / E.$$

Подставляя сюда значения (3.5), (3.8) и (3.11), получаем

$$\eta = \frac{\alpha^2}{2} \frac{(b^2 + 2ab - a^2)^2}{b^2 + a^2}. \quad (3.12)$$

Сюда входит только отношение амплитуд к длине волны $\alpha b = 2\pi b/\lambda$, $\alpha a = 2\pi a/\lambda$.

Максимальное значение η по (3.12) реализуется при $a = 0,6b$ (или $b = -0,6a$). Если при этом принять $\alpha b = 1/2$, то коэффициент полезного действия будет равен 31%. Отметим, что максимальная скорость V_0 движения пластины согласно (3.5) получается при $b = |a|$. При этом $\eta = 25\%$ (если снова принять $\alpha b = 1/2$). Значения V_0 и η обращаются в нуль при отношении амплитуд колебаний $b = -2,41a$, $b = 0,41a$.

§ 4. Краткий обзор исследований волнового способа продвижения тел

В предыдущем параграфе приведены результаты анализа задачи о продвижении тел в сильновязкой жидкости (малые скорости движения, малые размеры тела или длины волны), когда число Рейнольдса мало по сравнению с единицей. Эти результаты относятся, главным образом, к начальному этапу исследований волнового способа продвижения [40, 47, 59, 60 и др.]. Рассматривались наиболее простые случаи бесконечно протяженных пластины и цилиндра, малых амплитуд бегущих волн. Имеется обобщение на случай не малых амплитуд волн [40].

На рис. 5.3 приведен график зависимости скорости продвижения цилиндра V_0 , отнесенной к скорости осесимметричной волны по цилиндру c , от величины относительной амплитуды $\alpha b = 2\pi b/\lambda$, где b , λ — амплитуда и длина волны. Минус перед V_0 означает, что направления перемещения тела и волны противоположны. Показано удовлетворительное соответствие этих результатов с данными экспериментов. Изучено влияние изменения амплитуды и длины волны вдоль пластины и цилиндра на скорость их продвижения [43].

Эффект среднего движения тела вследствие его колебаний был использован во многих работах для описания перемещения микроорганизмов. Значительное внимание было уделено описанию движения жгутиковых и ресничатых организмов [27–31, 41, 42, 45, 48 и др.]. Действие ресничек на теле заменяются волнообразными деформациями некоторой эффективной поверхности (например, поверхности, огибающей концы ресничек). Учтена

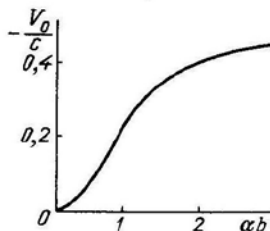
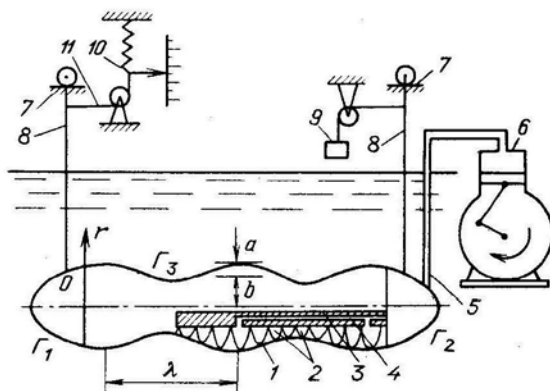


Рис. 5.3. Зависимость скорости продвижения цилиндра от относительной амплитуды волны

сложная форма, а также конечность тела и т.д. Основными формами являются цилиндр конечной длины, сфера, эллипсоид.

Учет сил инерции в уравнениях движения вязкой жидкости, некоторых других неучтенных факторов осуществлен в работах [6, 33, 62]. В первой из них в случае деформации поверхности специального вида задача решена с точным удовлетворением кинематических контактных условий.

Анализ среднего течения вязкой жидкости, вызванного бегущими по бесконечной пластине волнами, дан в работах [57, 58]. Рассмотрены случаи малых частотных чисел Рейнольдса ($Ru \ll 1$); средних чисел ($0(\alpha b) < 0(\delta)$, где $\delta = (Ru)^{-1/2}$ — безразмерная толщина пограничного слоя); очень больших чисел Ru . В последнем случае амплитуда волн превышает толщину пограничного слоя около стенки ($0(\alpha b) > 0(\delta)$). Решение



Р и с. 5.4. Волновой двигатель

этой задачи дано с помощью введения подвижной ортогональной координатной системы, деформирующейся в зависимости от движения пластины. В первых двух случаях решение находится методом сращиваемых асимптотических разложений.

В серии работ [3–5, 19–24] экспериментально и теоретически изучались значения развиваемой тяги и скорости продвижения конкретных физических моделей в виде конечного цилиндрического тела, произвольного тела вращения, эллипсоида. К решению привлекались полные уравнения Навье–Стокса. Изучено, в частности, влияние ограниченности поля течения (осесимметричный волновой двигатель расположен концентрически в жесткой круглой трубе; то же при свободной поверхности). Наличие жесткой внешней границы потока приводит к существенному увеличению значений скорости продвижения тела по сравнению со случаем неограниченной области. Свободная поверхность жидкости оказывает обратное влияние.

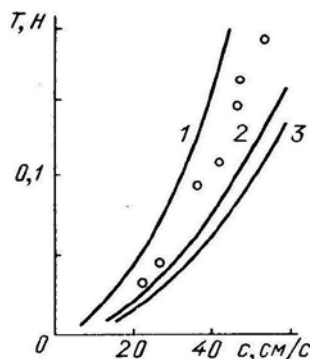
Более подробно остановимся на результатах одного эксперимента и сравнении их с расчетами [5].

Модель волнового двигателя представляет собой удлиненное тело вращения с закругленными концами (рис. 5.4). Деформируемая цилиндрическая часть тела состоит из резиновой рубашки 1, натянутой на ряд торoidalных оболочек 2 из того же материала, пенопластового корпуса 3 и воздушных коммуникаций 4. Оболочки 2 изолированы друг от друга. Под давлением воздуха, подаваемого от цилиндров генератора волн 6 по каналам 4 и 5, одни торoidalные оболочки расширяются с некоторым сдвигом фаз по длине конструкции, в то время как другие вследствие отбора воздуха сжимаются. Таким образом, на внешней поверхности создаются бегущие волны. Амплитуду и скорость волны в процессе эксперимента можно менять. Длина волны задается конструктивно и для каждой модели неизменна.

Простейший эксперимент с моделью состоит в определении силы тяги, развиваемой ею в швартовом режиме. Для этого модель помещается в водный бассейн. Подвесная система 8, к которой крепится модель, может передвигаться по монорельсу 7 на роликах. Нить 11 через блок соединяет подвесную систему с силомером 10. С другой стороны она оттягивается грузом 9.

На рис. 5.5 кружочками указаны значения силы тяги T , развиваемой моделью длиной цилиндрической части 72 см, радиусом 6 см, длиной волны 12 см и средней амплитудой 0,6 см, в зависимости от скорости

Рис. 5.5. Изменение силы тяги в зависимости от скорости волны



распространения волны c . Видно, что с увеличением c в рассматриваемых пределах тяга возрастает примерно по квадратическому закону.

Решение, найденное использованием уравнений Навье—Стокса и методом сращиваемых асимптотических разложений, на рис. 5.5 показано цифрой 2. Здесь же кривой 1 дано решение, полученное методом конечных разностей. Изменение тяги во времени носит пульсирующий характер. На рисунке приводится среднее значение тяги. Можно отметить в целом удовлетворительное согласие между расчетными и экспериментальными данными. Разница между кривыми 1 и 2 объясняется не только применением различных методов решения. Главная причина состоит в том, что кривая 1 получена из рассмотрения модели конечной длины, соответствующей экспериментальному образцу, а кривая 2 представляет собой приближенный результат T , полученный с использованием решения для цилиндра бесконечной длины.

Величины V_0 , T и коэффициент полезного действия η пропорциональны квадрату амплитуды, V_0 — пропорциональна скорости поверхностной волны, а тяга T — квадрату скорости волны. С увеличением радиуса цилиндра величины V_0 , η возрастают и стремятся к соответствующим значениям для бесконечной пластины.

В заключение кратко остановимся на случае идеальной жидкости ($Re \rightarrow \infty$). Движение, вызванное бегущими волнами, происходит без образования вихрей или с вихреобразованием, когда с задних кромок тела сходит вихревая пелена.

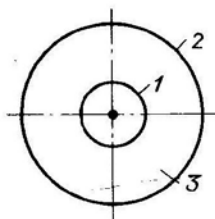
На возможность создания тянущей силы при определенных режимах колебания тел в идеальной жидкости было указано значительно раньше [8], чем в вязкой жидкости. В послевоенные годы было выполнено большое количество исследований в этом направлении. Был предложен принцип создания тяговой силы для движения гибкого тела в сплошной среде (в жидкости, в твердом канале). Он нашел применение для описания движения водных животных, пресмыкающихся [10, 11, 12, 25]. О них можно составить представление по обзорным работам [9, 14, 15, 36, 54] и другим.

Суть явления состоит в том, что "среда, в силу своей инерционности при достаточно быстром воздействии практически не смещается от первоначального положения за время, в течение которого происходит существенное перемещение самого организма" [12].

ЕДИНЫЙ ЛАГРАНЖЕВ СПОСОБ

Как указывалось в гл. 1, в этом способе обе взаимодействующие среды описываются в лагранжевых переменных. Здесь частично устраняются недостатки совместного эйлерово-лагранжевого способа. Применение единого лагранжевого способа является более удобным во многих задачах. К ним относятся, главным образом, случаи, в которых движение жидкости и оболочки происходит преимущественно по нормали к недеформированной поверхности, точнее, когда мало взаимное скольжение между ними.

Рис. 6.1. Радиальное взаимодействие сред



Такие виды движения обычно реализуются в динамических задачах, в которых нет средней составляющей скорости (колебания, ударные волны и т.д.). Например, при радиальном движении оболочек 1 и 2 (рис. 6.1) отсутствует взаимное скольжение между ними и газом 3.

Так же заранее можно сказать, в каких задачах применение этого способа связано с большими затруднениями. Это, например, случаи проникаемой оболочки, течения жидкости и газа с большими относительными перемещениями, наличия средних по времени составляющих движения их. В частности, способ неприменим в задачах взаимодействия при обтекании, рассмотренных в гл. 3, 4.

В этой главе рассматривается постановка задачи в едином лагранжевом способе, а в следующей — его применение. При изложении материала гл. 6 мы следуем работам [1, 4]. Указанное в § 1 гл. 2 различие в математической формулировке условий сопряжения, ориентированной на применение аналитических и численных методов, остается в силе и в данном способе.

§ 1. Специфика единого лагранжевого представления

Некоторые особенности единого лагранжевого способа описания взаимодействия обсуждались в § 2 гл. 1. Продолжим дальнейшее их рассмотрение.

Для более детальной иллюстрации записи условий стыкования рассмотрим сильный изгиб стержня постоянной во времени силой интенсивности p с фиксированной линией действия в пространстве (рис. 6.2). Пусть это будет, например, вес штока, свободно перемещающегося в жестких направляющих. Трение между стержнем и штоком отсутствует. В этом

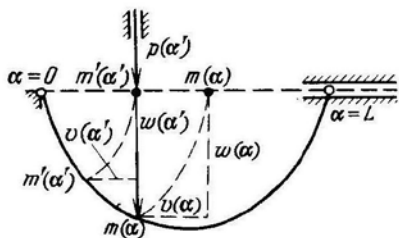


Рис. 6.2. Сильный изгиб упругого стержня

простом примере такая система штоков играет роль среды, взаимодействующей со стержнем.

При изгибе точка m стержня с лагранжевой координатой α оказывается в некоторой точке пространства под силой p , находящейся до деформации над точкой m' с координатой α' . Последняя займет новое положение в пространстве, однако сохранит численно то же значение координаты α' . Сила $p(\alpha')$ также будет иметь лагранжеву координату α' .

Сила по нормали к изогнутой оси равна

$$Z_3^* = \frac{p(\alpha')}{\cos(k_3 k_3^*)} = \frac{p(\alpha')}{E_3},$$

где k_3 и k_3^* — орты по нормали в точке $m(\alpha)$ до деформации и после. Как известно из § 3 гл. 1, косинус угла между этими ортами представляет собой величину E_3 , которая в соответствии с формулами (3.3), (3.4) гл. 1 равна $1 + du/d\alpha$. Здесь и далее через $u(\alpha)$, $w(\alpha)$ и $u(\alpha')$, $w(\alpha')$ обозначаются проекции перемещения точек $m(\alpha)$ и $m'(\alpha')$ стержня по ортам k_1 , k_3 .

Следовательно, уравнения изгиба при распределенной системе сил $p(\alpha')$ будут иметь вид

$$L_m^*[u(\alpha), w(\alpha)] = \delta_{3m} \left[1 + \frac{du(\alpha)}{d\alpha} \right]^{-1} p(\alpha') \quad (m = 1, 3), \quad (1.1)$$

где L_1^* , L_3^* — нелинейные дифференциальные операторы уравнений сильного изгиба, полученных проектированием всех сил по ортам k_1^* , k_3^* , δ_{3m} — символ Кронекера.

Таким образом, поведение рассматриваемой системы обладает основными свойствами взаимодействия упругого тела и жидкости: величина

давления и проскальзывание между средами зависят от деформации упругого тела. В правой части (1.1) значение $p(\alpha')$ приближенно выразим через силу в точке $m(\alpha)$ путем разложения в ряд Тейлора

$$p(\alpha') \approx p(\alpha) + (\alpha' - \alpha) \frac{\partial p(\alpha)}{\partial \alpha} + \dots \quad (1.2)$$

Из рис. 6.2 следует $\alpha - \alpha' = -u(\alpha)$, поэтому (1.1) можно привести к виду

$$L_m^* [u(\alpha), w(\alpha)] = \delta_{3m} \left[1 + \frac{\partial u(\alpha)}{\partial \alpha} \right]^{-1} \left[p(\alpha) + u(\alpha) \frac{\partial p(\alpha)}{\partial \alpha} \right] \quad (m = 1, 3). \quad (1.3)$$

Таким образом, здесь все величины являются функциями координаты α . Правая часть (1.3) в отличие от правой части (1.1) будет достаточно точной при небольших по сравнению с длиной стержня прогибах.

Другое ограничение связано с особенностями данной задачи. Уравнение (1.3) остается справедливым до тех пор, пока наибольшее значение α' удовлетворяет условию $\alpha' < L + u(L)$, где L — длина балки. При $\alpha' \geq L + u(L)$ выражение в последней скобке в правой части (1.3) обращается в нуль (в рассматриваемом примере $u(L) < 0$), что соответствует сходу части сил (штоков) со стержня в результате перемещения его конца $\alpha = L$.

Граничные условия

$$\begin{aligned} u(\alpha) = w(\alpha) = M(\alpha) = 0 \quad (\alpha = 0), \\ w(\alpha) = M(\alpha) = 0, \quad N(\alpha) \cos(k_3 k_3^*) - Q(\alpha) \sin(k_3 k_3^*) = 0 \quad (\alpha = L), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где N, M, Q — осевое усилие, изгибающий момент и перерезывающая сила. Угол $(k_3 k_3^*)$ также является функцией α .

В случае, когда сила $p(\alpha')$ является быстроизменяющейся вдоль стержня, происходит потеря точности в правой части (1.3). Поэтому уравнение (1.1) желательно представить в отличном от (1.3) виде.

Если перемещения стержня и производные от них изменяются плавно по его длине несмотря на быстрое изменение силы (например, сосредоточенной), параметры $u(\alpha), w(\alpha)$ можно приближенно выразить через функции $u(\alpha'), w(\alpha')$. Итак, приближенная связь между компонентами перемещений точек $m(\alpha)$ и $m'(\alpha')$ может быть представлена

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= u(\alpha') + (\alpha - \alpha') \frac{\partial u(\alpha')}{\partial \alpha'}, \\ w(\alpha) &= w(\alpha') + (\alpha - \alpha') \frac{\partial w(\alpha')}{\partial \alpha'}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из рис. 6.2 следует, что $-u(\alpha') = mm' \cos(k_3 k_3^*)$. Так как $mm' = \alpha - \alpha'$ и в точке α' косинус $(k_3 k_3^*)$ равен E_3 или $1 + \frac{\partial u(\alpha')}{\partial \alpha'}$, то

$$\alpha - \alpha' = -u(\alpha') \left[1 + \frac{\partial u(\alpha')}{\partial \alpha'} \right]^{-1}. \quad (1.6)$$

С учетом (1.6) соотношения (1.5) и любую функцию $N(\alpha)$ с принятой точностью можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= u(\alpha') - u(\alpha') \frac{\partial u(\alpha')}{\partial \alpha'}, \dots, \\ N(\alpha) &= N(\alpha') - u(\alpha') \frac{\partial N(\alpha')}{\partial \alpha'}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Производные будут

$$\frac{\partial w(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial w(\alpha')}{\partial \alpha'} - u(\alpha') \frac{\partial^2 w(\alpha')}{\partial \alpha'^2}, \dots,$$

поэтому в операторах L_m^* уравнения (1.1), приведенных к виду

$$\begin{aligned} L_m^* \left[u(\alpha') - u(\alpha') \frac{\partial u(\alpha')}{\partial \alpha'}, w(\alpha') - u(\alpha') \frac{\partial w(\alpha')}{\partial \alpha'} \right] = \\ = \delta_{3m} \left[1 + \frac{\partial u(\alpha')}{\partial \alpha'} \right]^{-1} p(\alpha') \end{aligned} \quad (1.8)$$

операции дифференцирования производятся по α' . В скобках правой части (1.8) величины второго порядка отброшены.

Для значений $\alpha' \geq L + u(L)$ силу $p(\alpha')$ следует приравнять нулю.

У закрепленного конца балки ($\alpha' = \alpha = 0$) нет взаимного скольжения, поэтому условия (1.4) сохраняют прежний вид

$$u(\alpha') = w(\alpha') = M(\alpha') = 0 \quad (\alpha' = 0), \quad (1.9)$$

в то время как условия на скользящей опоре ($\alpha = L$) запишутся так:

$$\begin{aligned} w(\alpha') - u(\alpha') [\partial w(\alpha') / \partial \alpha'] &= 0, \\ M(\alpha') - u(\alpha') [\partial M(\alpha') / \partial \alpha'] &= 0, \\ N(\alpha') - u(\alpha') [\partial N(\alpha') / \partial \alpha'] &= 0, \\ (\alpha' = L + u(L)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Последнее выражение приведено для случая, когда член $Q \sin(k_3 k_3^*)$ в (1.4) мал по сравнению с первым. Легко записать его также в полном виде.

Важно отметить, что условия (1.10) должны удовлетворяться при переменном значении $\alpha' = L + u(L)$.

Приведенные рассуждения будут использованы далее при записи общих условий контакта.

§ 2. Постановка задачи. Условия на поверхности контакта

Уравнения движения жидкости в форме Лагранжа получаются из (4.15) гл. 1 при введении подвижной системы координат, имеющей скорость движения фиксированных частиц среды $v_0 = v$. В них фигурируют давление, плотность и вектор скорости p , ρ , v . В (4.18), (4.19) гл. 1 приведены двумерные уравнения относительно тех же величин p , ρ , v и в произвольных подвижных координатах β_1, β_2 . Если положить $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2$, то они будут представлять уравнения Лагранжа.

Подобно (1.9) гл. 1 применяются также уравнения относительно p , ρ и вектора перемещения фиксированных частиц U в трехмерном случае. Так как при этом вводятся компоненты перемещения, то при их выводе можно воспользоваться соотношениями нелинейной теории упругости.

В случае идеальной жидкости из всех компонент тензора напряжения присутствует только давление. Тогда уравнениям движения в отсутствие массовых сил можно придать вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} (1 + E_{11}) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \Theta_{12} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \Theta_{31} &= - \frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial p}{\partial \alpha_1}, \\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \Theta_{21} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} (1 + E_{22}) + \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \Theta_{23} &= - \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial p}{\partial \alpha_2}, \\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \Theta_{13} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \Theta_{32} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} (1 + E_{33}) &= - \frac{1}{\rho H_3} \frac{\partial p}{\partial \alpha_3}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь U_1, U_2, U_3 — компоненты вектора перемещения по направлениям ортов k_1, k_2, k_3 начального положения. Уравнения (2.1) представляют собой проекции всех сил, действующих на деформированный элемент, на направления ортов k_1^*, k_2^*, k_3^* после деформации.

Величины Θ_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= \frac{1}{2} E_{12} + \Omega_3, & \Theta_{21} &= \frac{1}{2} E_{12} - \Omega_3, \\ \Theta_{13} &= \frac{1}{2} E_{13} + \Omega_2, & \Theta_{31} &= \frac{1}{2} E_{13} - \Omega_2, \\ \Theta_{23} &= \frac{1}{2} E_{23} + \Omega_1, & \Theta_{32} &= \frac{1}{2} E_{23} - \Omega_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Параметры E_{ij}, Ω_k имеют тот же смысл, что в теории упругости [3]:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1} U_2 + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} U_3, \\ E_{12} = E_{21} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{U_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{U_1}{H_1} \right), \\ 2\Omega_1 &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 U_3) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_2 U_2) \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ляме. Остальные параметры получаются циклической перестановкой индексов. Выражения (2.2) с помощью (2.3) можно выразить также через компоненты вектора перемещения

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} - \frac{U_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}, \\ \Theta_{13} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_3} - \frac{U_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1}, \\ \Theta_{23} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} - \frac{U_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3}. \end{aligned}$$

Остальные величины Θ_{21} , Θ_{32} , Θ_{31} получаются из выражений для Θ_{12} , Θ_{13} , Θ_{23} перестановкой только индексов 1 и 2.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\rho \Delta = \rho_0, \quad (2.4)$$

где обозначено

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + E_{11} & \Theta_{21} & \Theta_{13} \\ \Theta_{12} & 1 + E_{22} & \Theta_{32} \\ \Theta_{31} & \Theta_{23} & 1 + E_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.1) – (2.5) совместно с физическим законом

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma \quad (2.6)$$

образуют замкнутую систему. Положив в ней $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\alpha_3 = z$, $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, получим уравнения движения в декартовых координатах, которые приведены в книге [2].

Рассмотрим далее условия на поверхности контакта σ . Их запишем для случая, когда деформируемое твердое тело представляет собой трехмерный массив. Параметры, определяющие его геометрию и деформацию, обозначим так же, как для области, занятой жидкостью, но малыми буквами: h_i , u_i , e_{ij} , ω_k , θ_{ij} . Это позволит единообразно записать далее два варианта контактных условий. В случае, когда упругое тело является тонкостенным, легко перейти в них к соответствующим упрощениям.

Предполагаем, что поверхность контакта непроницаемая, геометрические параметры ее изменяются плавно, частицы жидкости не отрываются. Проскальзывание между средами может быть обусловлено деформацией

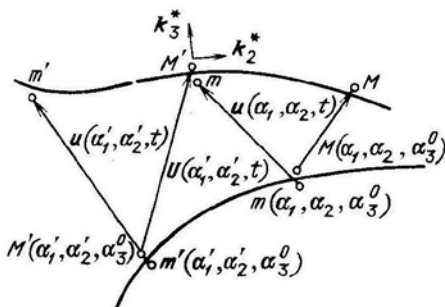


Рис. 6.3. Два положения контактной поверхности

тела, как в предыдущем параграфе, и независимым движением жидкости. В дальнейших построениях суммарная величина проскальзывания принимается малой по сравнению с длиной, на которой происходит значительное изменение полей деформаций и давления в средах (например, с длиной волны).

В момент времени $t = 0$ ортогональная криволинейная система координат Лагранжа α_1 , α_2 , α_3 принимается общей для обеих сред. Контакт между ними осуществляется по поверхности $\alpha_3 = \alpha_3^0$. Если тело является тонко-

стенным, то за нее, так же как в предыдущих главах, принимается его срединная поверхность. Координаты α_1, α_2 направлены по линиям кривизн σ .

За момент времени $t = 0$ может быть принято недеформированное состояние упругого тела.

Таким образом, в начальный момент соседним точкам с двух сторон σ приписываются одни и те же значения лагранжевых координат. Хотя в дальнейшем эти материальные частицы расходятся, оставаясь на той же поверхности σ , и двигаются по разным траекториям, численно значения их координат будут одинаковыми. Поэтому условия контакта при наличии проскальзывания будут составляться для точек, имеющих разные значения лагранжевых координат на σ , например $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0)$ и $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3^0)$.

Итак, точка $m(\alpha_1, \alpha_2)$ упругого тела в момент $t > 0$ совпадает с частицей жидкости M' , находящейся на той же поверхности σ , но имеющей при $t = 0$ координаты α'_1, α'_2 (рис. 6.3). Новые положения точек $m'(\alpha'_1, \alpha'_2)$ и $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0)$ также показаны на рис. 6.3. Кинематическое условие будет состоять в равенстве

$$r(\alpha_1, \alpha_2) + u(\alpha_1, \alpha_2, t) = r(\alpha'_1, \alpha'_2) + U(\alpha'_1, \alpha'_2, t) \quad (\alpha_3 = \alpha_3^0). \quad (2.7)$$

Здесь r — радиус-вектор, u, U — векторы перемещения частиц упругого тела и жидкости.

Динамические условия в случае идеальной жидкости имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_n(\alpha_1, \alpha_2, t) \cdot k_i^*(\alpha_1, \alpha_2, t) &= 0, \quad (i = 1, 2) \\ \sigma_n(\alpha_1, \alpha_2, t) \cdot n^*(\alpha_1, \alpha_2, t) &= -p(\alpha'_1, \alpha'_2, t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где σ_n — вектор напряжения; k_i^* — орты по касательным к координатным линиям α_i в точке m после деформации; n^* — орт по нормали.

Если упругое тело представляет собой тонкостенную оболочку, то (2.7) не изменится, а вместо (2.8) будут иметь место уравнения

$$L_m^*[u_1(\alpha_1, \alpha_2, t), u_2, u_3] = \delta_{3m} p(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3^0, t) \quad (m = 1, 2, 3), \quad (2.9)$$

полученные проектированием всех сил по направлениям ортов k_m^* (§ 3 гл. 1). Перемещения могут быть порядка характерного размера оболочки, деформации полагаются малыми по сравнению с единицей. Согласно гипотезе Кирхгофа — Лива $n^* = k_3^*$.

На граничных срезах оболочки задаются условия

$$l_n^*[u_1(\alpha_1, \alpha_2, t), u_2, u_3] = 0 \quad (n = 1, 2, 3, 4; \alpha_1 = \alpha_1^0). \quad (2.10)$$

Приведенные выше уравнения совместно с условиями для жидкости на неконтактных поверхностях и с начальными условиями представляют собой математическую формулировку задачи гидроупругости в едином лагранжевом способе. Она может считаться окончательной, если для решения задачи применяются дискретные методы. Здесь на каждом шаге по времени в силу малости разницы между α_i и α'_i их можно отождествлять. Если решение ведется с помощью аналитических методов, то необходимо установить связь между α_i и α'_i .

В (2.7) — (2.9) правые части могут быть выражены через функции, определенные в окрестности точки $m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0)$ с локальным триэдром

$k_i(\alpha_1, \alpha_2)$ до деформации. При этом компоненты u_i, U_i вводятся в форме

$$\begin{aligned} u &= k_i(\alpha_1, \alpha_2) \cdot u_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0, t), \\ U &= k_i(\alpha_1, \alpha_2) \cdot U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0, t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где нужно производить суммирование по i ($i = 1, 2, 3$).

Другой вариант условий на контактной поверхности получается, если левые части (2.7)–(2.9) выразить через функции, заданные в точке $m'(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$. В этом случае

$$\begin{aligned} u &= k_i(\alpha'_1, \alpha'_2) \cdot u_i(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3^0, t), \\ U &= k_i(\alpha'_1, \alpha'_2) \cdot U_i(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3^0, t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

т.е. u_i, U_i будут проекциями перемещений тех же частиц упругого тела и жидкости, что выше, на направления ортов $k_i(\alpha'_1, \alpha'_2)$ в точке $m'(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$.

Особенности этих двух представлений обсуждаются в последующих параграфах.

§ 3. Первый вариант условий

Функции r, U, p предполагаются аналитическими по α_1 и α_2 , в силу чего правые части (2.7)–(2.9) можно разложить в ряды Тейлора в окрестности точки $m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0)$. Итак,

$$\begin{aligned} r(\alpha'_1, \alpha'_2) + U(\alpha'_1, \alpha'_2, t) &= \\ &= r(\alpha_1, \alpha_2) + U(\alpha_1, \alpha_2, t) + (\alpha'_1 - \alpha_1) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (r + U) + \\ &+ (\alpha'_2 - \alpha_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (r + U) \quad (\alpha_3 = \alpha_3^0), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} p(\alpha'_1, \alpha'_2, t) &= p(\alpha_1, \alpha_2, t) + (\alpha'_1 - \alpha_1) \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} + (\alpha'_2 - \alpha_2) \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} \\ &(\alpha_3 = \alpha_3^0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Учитывая, что $\partial r / \partial \alpha_i = H_i k_i$, и подставляя (3.1) в правую часть (2.7), получаем

$$\left(H_1 k_1 + \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \right) (\alpha'_1 - \alpha_1) + \left(H_2 k_2 + \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} \right) (\alpha'_2 - \alpha_2) + U - u = 0.$$

Пользуясь представлением (2.11) и формулами дифференцирования единичных векторов (2.5) гл. 2, это выражение приводим к виду

$$\begin{aligned} &H_1 [(1 + E_{11}) k_1 + \Theta_{12} k_2 + \Theta_{31} k_3] (\alpha'_1 - \alpha_1) + \\ &+ H_2 [\Theta_{21} k_1 + (1 + E_{22}) k_2 + \Theta_{23} k_3] (\alpha'_2 - \alpha_2) + \\ &+ (U_1 - u_1) k_1 + (U_2 - u_2) k_2 + (U_3 - u_3) k_3 = 0. \end{aligned}$$

Собирая члены с одинаковыми органами k_i , получаем следующие скалярные соотношения:

$$\begin{aligned} H_1(1 + E_{11})(\alpha'_1 - \alpha_1) + H_2\Theta_{21}(\alpha'_2 - \alpha_2) &= u_1 - U_1, \\ H_1\Theta_{12}(\alpha'_1 - \alpha_1) + H_2(1 + E_{22})(\alpha'_2 - \alpha_2) &= u_2 - U_2, \\ H_1\Theta_{31}(\alpha'_1 - \alpha_1) + H_2\Theta_{23}(\alpha'_2 - \alpha_2) &= u_3 - U_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Первые два из них дают следующие выражения для разностей координатных точек — величин взаимного скольжения сред:

$$\begin{aligned} H_1(\alpha'_1 - \alpha_1) &= \frac{(u_1 - U_1)(1 + E_{22}) - (u_2 - U_2)\Theta_{21}}{(1 + E_{11})(1 + E_{22}) - \Theta_{12}\Theta_{21}}, \\ H_2(\alpha'_2 - \alpha_2) &= \frac{(u_2 - U_2)(1 + E_{11}) - (u_1 - U_1)\Theta_{12}}{(1 + E_{11})(1 + E_{22}) - \Theta_{12}\Theta_{21}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя их в третье соотношение (3.3), получаем

$$\begin{aligned} (u_1 - U_1)[\Theta_{12}\Theta_{23} - (1 + E_{22})\Theta_{31}] + \\ + (u_2 - U_2)[\Theta_{21}\Theta_{31} - (1 + E_{11})\Theta_{23}] + \\ + (u_3 - U_3)[(1 + E_{11})(1 + E_{22}) - \Theta_{12}\Theta_{21}] = 0 \quad (\alpha_3 = \alpha_3^0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) представляет собой кинематическое условие на контактной поверхности $\alpha_3 = \alpha_3^0$.

С учетом (3.2) и (3.4) динамические условия (2.9) записываются в виде

$$\begin{aligned} L_m^*[u_1(\alpha_1, \alpha_2, t), u_2, u_3] &= \delta_{3m} \left[p(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0, t) + \right. \\ &+ \frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} \frac{(u_1 - U_1)(1 + E_{22}) - (u_2 - U_2)\Theta_{21}}{(1 + E_{11})(1 + E_{22}) - \Theta_{12}\Theta_{21}} + \\ &+ \left. \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} \frac{(u_2 - U_2)(1 + E_{11}) - (u_1 - U_1)\Theta_{12}}{(1 + E_{11})(1 + E_{22}) - \Theta_{12}\Theta_{21}} \right] \\ (m = 1, 2, 3; \alpha_3 = \alpha_3^0). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.5), (3.6) были получены в работе [4].

Если проскальзывание между средами отсутствует ($\alpha'_1 = \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2$), то согласно (3.3) и (3.6)

$$u_1 = U_1, \quad u_2 = U_2, \quad u_3 = U_3. \quad (3.7)$$

Таким образом, при произвольных, но равных между собой перемещениях сред по касательным направлениям, независимо от величины нормальных перемещений кинематическое условие линейно, в отличие от совместного эйлерово-лагранжевого способа описания взаимодействия. В правой части (3.6) исчезают члены с производными от давления.

Если отсутствует проскальзывание в одном из направлений, то условия также значительно упрощаются. Пусть $\alpha'_1 = \alpha_1$. Тогда из (3.3) или (3.4)

находим

$$H_2(\alpha'_2 - \alpha_2) = \frac{u_2 - U_2}{1 + E_{22}}.$$

При этом кинематическое условие (3.5) принимает вид

$$u_3 - U_3 = \frac{\Theta_{23}}{1 + E_{22}}(u_2 - U_2) \quad (\alpha_3 = \alpha_3^0), \quad (3.8)$$

а уравнение (3.6) —

$$L_m^* [u_1(\alpha_1, \alpha_2, t), u_2, u_3] = \delta_{3m} \left[p(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{u_2 - U_2}{1 + E_{22}} \right] \quad (m = 1, 2, 3; \alpha_3 = \alpha_3^0). \quad (3.9)$$

Приведенные условия на поверхности контакта справедливы для случая произвольного перемещения сред и малого взаимного скольжения их. Последнее ограничение можно несколько ослабить, если в разложениях (3.1) и (3.2) сохранить также члены, содержащие величины взаимных скольжений сред в квадрате. Это приводит к значительному усложнению выражений. Построим соответствующие условия в плоской задаче (в плоскости $\alpha_2 \alpha_3$).

Вместо (3.1) и (3.2) будем иметь

$$r(\alpha'_2) + U(\alpha'_2, t) = r(\alpha_2) + U(\alpha_2, t) + \\ + (\alpha'_2 - \alpha_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (r + U) + \frac{1}{2} (\alpha'_2 - \alpha_2)^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} (r + U), \quad (3.10)$$

$$p(\alpha'_2, t) = p(\alpha_2, t) + (\alpha'_2 - \alpha_2) \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{2} (\alpha'_2 - \alpha_2)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha_2^2} \quad (3.11) \\ (\alpha_3 = \alpha_3^0).$$

Подставляя (3.10) в правую часть (2.7) и пользуясь формулой $\partial r / \partial \alpha_2 = H_2 k_2$ и правилом дифференцирования (2.5) гл. 2, получаем

$$U(\alpha'_2, t) - u(\alpha'_2, t) + (\alpha'_2 - \alpha_2)(H_2 k_2 - \partial U / \partial \alpha_2) + \\ + \frac{1}{2} (\alpha'_2 - \alpha_2)^2 \left(\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_2} k_2 - \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} k_3 + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_2^2} \right) = 0.$$

Привлекаем сюда представления (2.11) и снова применяем указанные правила дифференцирования единичных векторов. В результате этого получаются два скалярных уравнения (при k_2 и k_3). Вычитанием одного из другого и сложением их можно прийти к линейному и квадратному относительно $(\alpha'_2 - \alpha_2)$ уравнениям. Первое из них дает

$$\alpha'_2 - \alpha_2 = \Delta_2(\alpha_2, t), \\ \Delta_2(\alpha_2, t) = \frac{1}{H_2} \frac{(u_2 - U_2)F + (u_3 - U_3)}{(1 + E_{22})F + \Theta_{23}}, \quad (3.12)$$

где обозначено

$$F = \frac{\frac{H_2}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} (1 + E_{22}) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_2 \Theta_{23})}{\frac{\partial (H_2 + H_2 E_{22})}{\partial \alpha_2} + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \Theta_{23}}. \quad (3.13)$$

После исключения $(\alpha'_2 - \alpha_2)$ из указанного квадратного уравнения с помощью (3.12) кинематическое условие на поверхности контакта упругого тела и идеальной жидкости приобретает вид

$$\begin{aligned} & [(u_3 - U_3)(1 + E_{22}) - (u_2 - U_2) \Theta_{23}] [(1 + E_3)F + \Theta_{23}] + \\ & + \frac{1}{2H_2^2} [u_3 - U_3 + (u_2 - U_2)F]^2 \left[\frac{\partial (H_2 + H_2 E_{22})}{\partial \alpha_2} + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \Theta_{23} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Динамические условия в случае оболочки получим из (3.11) и (3.12)

$$\begin{aligned} L_m^* [u_2(\alpha_2, t), u_3] = & \delta_{3m} \left\{ p(\alpha_2, \alpha_3^0, t) + \right. \\ & + \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} \frac{(u_2 - U_2)F + (u_3 - U_3)}{(1 + E_{22})F + \Theta_{23}} + \frac{1}{2H_2^2} \frac{[(u_2 - U_2)F + (u_3 - U_3)]^2}{[(1 + E_{22})F + \Theta_{23}]^2} \left. \right\} \\ & (m = 2, 3; \alpha_3 = \alpha_3^0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Следовательно, кинематическое и динамические условия (3.5) и (3.6) обладают необходимой точностью при разностях касательных составляющих, удовлетворяющих неравенству

$$u_2 - U_2 \ll \frac{2H_2^2(1 + E_{22})^2}{\frac{\partial (H_2 + H_2 E_{22})}{\partial \alpha_2} + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \Theta_{23}}.$$

Аналогичное неравенство для $u_1 - U_1$ получаются отсюда перестановкой индексов 1 и 2.

В линейном приближении условия (3.5), (3.14), а также правые части (3.6), (3.15) совпадают с соответствующими выражениями в совместном эйлерово-лагранжевом способе (гл. 2). В последних вместо компонент перемещения фигурируют компоненты скорости. Однако линеаризованные условия (3.5), (3.14) и правые части (3.6), (3.15) отличаются от аналогичных выражений совместного способа.

В полученных в этом параграфе условиях на контактной поверхности фигурируют производные по координатам от компонент перемещения и давления в жидкости, а компоненты перемещения упругого тела — в виде самих функций. Это обстоятельство в некоторых задачах можно считать недостатком данного варианта записи. Например, если поле в жидкости быстроизменяющееся (высокочастотные колебания, ударные волны и т.д.),

то в результате дифференцирования происходит потеря точности. Это вынуждает сильно ограничивать допустимую величину взаимного скольжения сред.

От этого недостатка свободен второй вариант записи условий.

§ 4. Второй вариант условий

В этом варианте все компоненты перемещения, давление и плотность являются функциями аргументов α'_1 , α'_2 , α_3 . Производные также берутся по α'_1 , α'_2 , α_3 .

Разложение в ряд Тейлора левой части равенства (2.7)

$$\begin{aligned} r(\alpha_1, \alpha_2) + u(\alpha_1, \alpha_2, t) = \\ = r(\alpha'_1, \alpha'_2) + u(\alpha'_1, \alpha'_2, t) + \\ + (\alpha_1 - \alpha'_1) \frac{\partial}{\partial \alpha'_1} (r + u) + (\alpha_2 - \alpha'_2) \frac{\partial}{\partial \alpha'_2} (r + u), \end{aligned} \quad (4.1)$$

привлечение представления (2.12) и повторение выкладок, аналогичных (3.1) – (3.5), позволяет записать кинематическое условие

$$\begin{aligned} (u_1 - U_1)[\theta_{12}\theta_{23} - (1 + e_{22})\theta_{31}] + (u_2 - U_2)[\theta_{21}\theta_{31} - (1 + e_{11})\theta_{23}] + \\ + (u_3 - U_3)[(1 + e_{11})(1 + e_{22}) - e_{12}e_{21}] = 0 \quad (\alpha_3 = \alpha_3^0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Входящие сюда выражения для θ_{kl} , e_{ij} , ω_n получаются из (2.2), (2.3) при замене в последних H_i , U_i , α_i на h_i , u_i , α'_i , α'_2 , например,

$$\begin{aligned} \theta_{12} = \frac{1}{2} e_{12} + \omega_3, \quad \theta_{32} = \frac{1}{2} e_{23} - \omega_1, \\ e_{22} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha'_2} + \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha'_1} + \frac{u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}, \\ \theta_{31} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Все эти параметры относятся к упругому телу. Если им является тонкостенная оболочка, то в них происходят известные упрощения [3]. Например, следует положить $h_3 = 1$, $\partial h_1 / \partial \alpha_3 \approx h_1 k_{11}$, $\partial h_2 / \partial \alpha_3 \approx h_2 k_{12}$, где k_{11} , k_{12} – кривизны срединной поверхности; величины $h_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ могут быть приняты с точностью до $h k_{ii}$ (h – толщина оболочки) по сравнению с единицей за коэффициенты Ляме срединной поверхности $h_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0)$ и т.д.

Связь между α_1 , α_2 и α'_1 , α'_2 следующая:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha'_1 = \Delta_1(\alpha'_1, \alpha'_2, t), \quad \alpha_2 - \alpha'_2 = \Delta_2(\alpha'_1, \alpha'_2, t), \\ \Delta_1 = \frac{1}{h_1} \frac{(U_1 - u_1)(1 + e_{22}) - (U_2 - u_2)\theta_{21}}{(1 + e_{11})(1 + e_{22}) - \theta_{12}\theta_{21}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выражение для Δ_2 получается отсюда перестановкой индексов 1 и 2.

Так как компоненты перемещения оболочки в точке $m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0)$ выражаются через компоненты в точке $m'(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3^0)$ по формулам

$$u_j(\alpha_1, \alpha_2, t) = u_j(\alpha'_1, \alpha'_2, t) + (\alpha_1 - \alpha'_1) \frac{\partial u_j}{\partial \alpha'_1} + (\alpha_2 - \alpha'_2) \frac{\partial u_j}{\partial \alpha'_2},$$

то с учетом (4.4) динамическим условиям (2.9) можно придать вид

$$\begin{aligned} L_m^* \left[u_1(\alpha'_1, \alpha'_2, t) + \Delta_1 \frac{\partial u_1}{\partial \alpha'_1} + \Delta_2 \frac{\partial u_1}{\partial \alpha'_2}, u_2 + \dots, u_3 + \dots \right] = \\ = \delta_{3m} p(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3^0, t) \quad (m = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.5)$$

В рассматриваемом варианте условия на граничных срезах оболочки (2.10) также значительно усложняются

$$L_n^* \left[u_1(\alpha'_1, \alpha'_2, t) + \Delta_1 \frac{\partial u_1}{\partial \alpha'_1} + \Delta_2 \frac{\partial u_1}{\partial \alpha'_2}, u_2 + \dots, u_3 + \dots \right] = 0 \quad (4.6)$$

($n = 1, 2, 3, 4$).

Здесь величины скольжений определяются формулами (4.4). Условия (4.6) должны удовлетворяться при переменных значениях $\alpha'_1 = \alpha_1^0 + \Delta_1(\alpha_1^0, \alpha_2, t)$ и $\alpha'_2 = \alpha_2^0 + \Delta_2(\alpha_1, \alpha_2^0, t)$, где α_1^0, α_2^0 — координаты граничных срезов оболочки.

Если в первом варианте эти условия представляют собой, например, нулевые перемещения $u_j(\alpha_1^0, \alpha_2, t) = 0$, $u_j(\alpha_1, \alpha_2^0, t) = 0$, то теперь они приобретают вид

$$u_j(\alpha'_1, \alpha'_2, t) + \Delta_1(\alpha'_1, \alpha'_2, t) \frac{\partial u_j}{\partial \alpha'_1} + \Delta_2(\alpha'_1, \alpha'_2, t) \frac{\partial u_j}{\partial \alpha'_2} = 0,$$

$$(\alpha'_1 = \alpha_1^0 + \Delta_1(\alpha_1^0, \alpha_2, t), \quad \alpha'_2 = \alpha_2^0 + \Delta_2(\alpha_1, \alpha_2^0, t)),$$

причем присутствующие здесь $\Delta_1(\alpha_1^0, \alpha_2, t)$, $\Delta_2(\alpha_1, \alpha_2^0, t)$ в силу равенств $u_j(\alpha_1^0, \alpha_2, t) = u_j(\alpha_1, \alpha_2^0, t) = 0$ будут зависеть только от параметров жидкости. В самом деле, из (3.4) имеем

$$\Delta_1(\alpha_1^0, \alpha_2, t) = - \frac{1}{H_1} \frac{U_2 \Theta_{21} - U_1(1 + E_{22})}{(1 + E_{11})(1 + E_{22}) - \Theta_{12} \Theta_{21}}.$$

В плоской задаче (в плоскости $\alpha_2 \alpha_3$) кинематическое условие (4.2) запишется так:

$$\begin{aligned} (u_2 - U_2) \left(\frac{u_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial u_3}{h_2 \partial \alpha'_2} \right) + \\ + (u_3 - U_3) \left(1 + \frac{\partial u_2}{h_2 \partial \alpha'_2} + \frac{u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

а содержащиеся в (4.5) и (4.6) величины —

$$\begin{aligned}\Delta_2(\alpha'_2, t) &= \frac{U_2 - u_2}{h_2} \left(1 + \frac{\partial u_2}{h_2 \partial \alpha'_2} + \frac{u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} \right)^{-1}, \\ \Delta_2(\alpha_2^0, t) &= - \frac{U_2}{h_2} \left(1 + \frac{\partial U_2}{H_2 \partial \alpha_2} + \frac{U_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Таким образом, в отличие от первого варианта записи условий, во втором, как это видно из (4.2), (4.4), (4.5), отсутствуют производные от параметров жидкости U_i , p , что можно считать его достоинством. Однако уравнения движения оболочки (4.5) и граничные условия на срезах ее (4.6) оказались более сложными, чем в первом варианте. Поэтому вопрос о том, какой из них более предпочтителен, должен решаться при рассмотрении конкретных задач. Условия первого варианта допускают упрощения при рассмотрении частных видов движения жидкости и ее физических свойств, а второго — при рассмотрении частных видов деформации оболочки.

При $U_1 = u_1$, $U_2 = u_2$ имеем $U_3 = u_3$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, и оба варианта записи условий имеют одинаковый вид.

В качестве примера уравнение нелинейного изгиба балки

$$\begin{aligned}D \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - N \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p^*(\alpha^1, t), \\ N &= \frac{B}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha\end{aligned}\quad (4.9)$$

приведем к форме, которую оно должно иметь во втором варианте. Представим полные перемещения и давление в виде

$$U_i^* = U_i^0 + U_i, \quad u_i^* = u_i, \quad p^* = p^0 + p \quad (i = 2, 3),$$

причем U_i^0 , p^0 представляют собой параметры жидкости при абсолютно твердой границе $\alpha_3 = \alpha_3^0$ ($U_3^0 = \partial U_3^0 / \partial \alpha_2 = 0$), а U_i , u_i , p — возмущения в результате изгиба этой границы, описываемого уравнением (4.9). В случае однородного исходного поля в жидкости $\Delta_2(\alpha'_2, t) = -\Delta_2(\alpha_2, t) = U_2^0/H_2$ (можно принять $H_2 = 1$). Сила N по (4.9) не зависит от продольной координаты. Поэтому (4.9) принимает вид

$$\begin{aligned}D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha'^4} + U_2^0 \frac{\partial^5 w}{\partial \alpha'^5} \right) - N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha'^2} + U_2^0 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha'^3} \right) + \\ + \rho_s h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(w + U_2^0 \frac{\partial w}{\partial \alpha'} \right) &= p^*(\alpha', t).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Это уравнение имеет место при $-U_2^0 < \alpha' < L - U_2^0$, а (4.9) — при $0 < \alpha < L$.

В заключение аналогично предыдущему параграфу дадим в плоской задаче (в плоскости $\alpha_2 \alpha_3$) более точные условия.

Сохранение трех членов в разложении в ряд Тейлора (4.1) дает

$$\alpha_2 - \alpha'_2 = \Delta_2(\alpha'_2, t),$$

$$\Delta_2(\alpha'_2, t) = \frac{1}{h_2} \frac{(U_2 - u_2)f + (U_3 - u_3)}{(1 + e_{22})f + \theta_{23}}, \quad (4.11)$$

где по аналогии с (3.13) обозначено

$$f = \frac{\frac{h_2 \partial h_2}{h_3 \partial \alpha_3} (1 + e_{22}) - \frac{\partial(h_2 \theta_{23})}{\partial \alpha'_2}}{\frac{\partial(h_2 + h_2 e_{22})}{\partial \alpha'_2} + \frac{h_2 \partial h_2}{h_3 \partial \alpha_3} \theta_{23}}. \quad (4.12)$$

Отметим, что величины $\Delta_2(\alpha_2, t)$, $\Delta_2(\alpha'_2, t)$ представляют собой разные функции. Например, в декартовой системе и при $U_2 \equiv 0$ из (3.12) и (4.11) следуют соотношения $\alpha_2 - \alpha'_2 = -u_2(\alpha_2)$ и (1.6). Последнее выражение использовалось в примере, рассмотренном в первом параграфе. При этом знаменатель и числитель в (3.12) и (4.11) нужно поделить на F и f .

Кинематическое условие имеет вид

$$\begin{aligned} & [(U_3 - u_3)(1 + e_{22}) - (U_2 - u_2)\theta_{23}][(1 + e_{22})f + \theta_{23}] + \\ & + \frac{1}{2h_2^2} [U_3 - u_3 + (U_2 - u_2)f]^2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha'_2} (h_2 + h_2 e_{22}) + \frac{h_2 \partial h_2}{h_3 \partial \alpha_3} \theta_{23} \right] = 0 \\ & (\alpha_3 = \alpha_3^0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Вместо (4.5) и (4.6) будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{aligned} L_m^* \left[u_2(\alpha'_2, t) + \Delta_2(\alpha'_2, t) \frac{\partial u_2}{\partial \alpha'_2} + \frac{\Delta_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha'^2_2}, u_3 + \dots \right] = \\ = \delta_{3m} p(\alpha'_2, \alpha_3^0, t) \quad (m = 2, 3), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} l_n^* \left[u_2(\alpha'_2, t) + \Delta_2(\alpha'_2, t) \frac{\partial u_2}{\partial \alpha'_2} + \frac{\Delta_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha'^2_2}, u_3 + \dots \right] = 0 \\ (n = 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Как уже указывалось выше, условия на срезе оболочки должны удовлетворяться при переменном значении $\alpha'_2 = \alpha_2^0 + \Delta_2(\alpha_2^0, t)$, где α_2^0 — координата граничного среза.

Остается отметить, что уравнения движения жидкости (2.1)–(2.6) сохраняют свой вид, лишь символы α_1 , α_2 заменяются в них на α'_1 , α'_2 .

Что касается условий на поверхности контакта в случае вязкой жидкости, то они легко получаются из (2.7). Условие прилипания или отсутствия взаимного скольжения означает, что

$$u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0, t) = U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0, t). \quad (4.16)$$

Вместо (2.8) будем иметь

$$\vec{\sigma}_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0, t) = \mathbf{p}_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0, t), \quad (4.17)$$

где $\mathbf{p}_n$ — вектор напряжения в жидкости на поверхности контакта. Все уравнения (2.9) будут иметь ненулевые правые части

$$L_m^*[u_1(\alpha_1, \alpha_2, t), u_2, u_3] = -p_{nm}^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^0, t) \quad (m = 1, 2, 3), \quad (4.18)$$

где p_{nm}^* представляют собой компоненты напряжения в жидкости по направлениям k_1^*, k_2^*, k_3^* .

Этот способ описания взаимодействия сред сравнительно слабо разработан. Мало и решенных конкретных примеров. Здесь мы имеем в виду не чисто гидромеханические задачи (по которым есть значительная литература), а задачи взаимодействия с учетом нелинейностей всех трех родов — для сред и условий их контакта. Ярким примером использования преимуществ лагранжеевого способа является задача о всплывании газового пузыря в жидкости [6]. Способ значительно облегчает выполнение условий стыкования на подвижных неизвестных границах.

В данной главе рассматриваются задачи устойчивости и динамики пластин и оболочек, соприкасающихся с жидкостью. В них взаимное скольжение сред либо отсутствует по самой постановке задачи, либо пренебрежимо мало.

Учету взаимного скольжения сред вследствие деформации посвящена специальная задача о сильном изгибе стержня.

В конце главы дается изложение результатов, относящихся к нелинейному взаимодействию газа и мягкой оболочки. Они получены с помощью численных методов.

§ 1. Устойчивость упругой пластины между жидкостями разной плотности

В линейном приближении рассматривается устойчивость равновесия горизонтально расположенной протяженной пластины, находящейся между слоями идеальной несжимаемой жидкости разной плотности (рис. 7.1). Пластина по краям жестко заделана в вертикальные стенки. На свободную поверхность верхнего слоя жидкости действует давление p_0 . Параметры, относящиеся к верхней и нижней областям, обозначены индексами 1 и 2. Величины w , ρ_s , h , E , ν — соответственно перемещение по вертикали, плотность, толщина и механические характеристики пластины. Вместо лагранжеевых координат α_1 и α_3 вводятся x и z , которые в линейной задаче совпадают с эйлеровыми. Остальные обозначения приведены на рис. 7.1. Ввиду малого взаимного скольжения между слоями жидкости и пластины им пренебрегаем.

В линейном случае из (2.1)–(2.3) гл. 6 получаем уравнения движения, в которых учтены также массовые силы с коэффициентом перегрузки g ,

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} - g \frac{\partial U_j}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial x}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} - g \frac{\partial W_j}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial z} \quad (j = 1, 2).$$

Уравнения (2.4), (2.6) заменяются условиями несжимаемости

$$\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial W_j}{\partial z} = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (1.2)$$

Остальные соотношения, вытекающие из гл. 6, следующие:

$$\rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p_1(x, 0, t) - p_2(x, 0, t), \quad (1.3)$$

$$w = \partial w / \partial x = 0 \quad (x = \pm a), \quad (1.4)$$

$$p_1(x, -h_1, t) = 0, \quad U_1(\pm a, z, t) = U_2(\pm a, z, t) = 0, \quad (1.5)$$

$$W_1(x, 0, t) = w(x, t) = W_2(x, 0, t), \quad W_2(x, h_2, t) = 0. \quad (1.6)$$

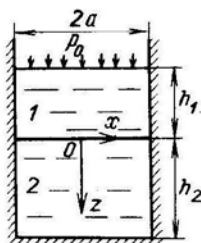


Рис. 7.1. Жидкости разной плотности, разделенные упругой пластиной

Задача состоит в том, чтобы исследовать устойчивость исходного состояния, характеризуемого равенствами

$$U_j^0 = W_j^0 = w^0 = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1.7)$$

$$p_1^0 = p_0 + \rho_1 g(h_1 + z), \quad p_2^0 = p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g z.$$

В статической постановке из (1.1), (1.6) имеем $p_1(0) - p_2(0) = (\rho_1 - \rho_2)g w$. Поэтому уравнению (1.3) можно придать вид

$$d^4 w / dx^4 = \mu^4 w, \quad \mu^4 = (\rho_1 - \rho_2)g / D,$$

решение которого

$$w = A \cos \mu x + B \sin \mu x + C \cosh \mu x + E \sinh \mu x \quad (1.8)$$

после удовлетворения условиям (1.4) дает

$$A \cos \mu a + C \cosh \mu a = 0, \quad A \sin \mu a - C \sinh \mu a = 0, \quad (1.9)$$

$$B \sin \mu a + E \sinh \mu a = 0, \quad B \cos \mu a + E \cosh \mu a = 0. \quad (1.10)$$

Ненулевое симметричное решение ($A \neq 0$, $C \neq 0$) согласно (1.9) имеет место при

$$\operatorname{tg} \mu a = -\operatorname{th} \mu a, \quad \mu a \approx \pi(n - 1/4) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.11)$$

Из (1.10) для несимметричной формы ($B \neq 0$, $E \neq 0$) следует

$$\operatorname{tg} \mu a = \operatorname{th} \mu a, \quad \mu a \approx \pi(n + 1/4) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.12)$$

Нулевые корни в обоих случаях исключены из рассмотрения.

Условие (1.2) для замкнутой области дает $\int_{-a}^a w dx = 0$, откуда с учетом (1.9) имеем $A \sin \mu a = 0$. Для корней (1.11) это условие выполняется только при $A = C = 0$. Случай (1.10), (1.12) не противоречит условию несжимаемости.

Таким образом, при статическом подходе отклоненных по симметричной форме устойчивых состояний пластины не существует. Согласно (1.8), (1.12) при разности плотностей

$$\rho_1 - \rho_2 = \pi^4 (n + 1/4)^4 D / g a^4 \quad (1.13)$$

несимметричные прогибы пластины имеют вид

$$w_n = B_n \left[\sin \left(n + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi x}{a} - \frac{\cos(n + 1/4) \pi}{\operatorname{ch}(n + 1/4) \pi} \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi x}{a} \right].$$

Эта форма равновесия реализуется, когда верхняя жидкость тяжелее, чем нижняя. Как видно из (1.13), с уменьшением изгибной жесткости и удлинением пролета пластины необходимая для потери устойчивости разность плотностей также уменьшается. Толщины слоев h_1 , h_2 и давление p_0 в решение не входят. Минимальное значение разности плотностей реализуется при $n = 1$, поэтому

$$\rho_1 - \rho_2 = \left(\frac{5\pi}{4a} \right)^4 \frac{D}{g}. \quad (1.14)$$

В динамической постановке решение (1.1)–(1.6) по времени разыскиваем в форме $U_j \exp(i\omega t)$, $P_j \exp(i\omega t)$, ... В дальнейшем временной множитель будем опускать, сохраняя прежние буквенные обозначения. Тогда частное решение для перемещений частиц жидкости имеет вид

$$\begin{aligned} U_j &= -(L \sin \gamma x - M \cos \gamma x)(\operatorname{sh} \gamma z + N \operatorname{ch} \gamma z), \\ W_j &= (L \cos \gamma x + M \sin \gamma x)(\operatorname{ch} \gamma z + N \operatorname{sh} \gamma z). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Подчинив (1.15) последним двум условиям (1.5), найдем

$$L \sin \gamma a = 0, \quad M \cos \gamma a = 0,$$

откуда либо $M = 0$, $\sin \gamma a = 0$, $L \neq 0$, либо $L = 0$, $\cos \gamma a = 0$, $M \neq 0$. Первому

случаю соответствует симметричное решение

$$U_j = - \sum_{n=1}^{\infty} L_{jn} \sin \gamma_n x (\operatorname{sh} \gamma_n z + N_{jn} \operatorname{ch} \gamma_n z), \quad (1.16)$$

$$W_j = \sum_{n=1}^{\infty} L_{jn} \cos \gamma_n x (\operatorname{ch} \gamma_n z + N_{jn} \operatorname{sh} \gamma_n z) \quad (\gamma_n = \pi n/a),$$

а второму — несимметричное

$$U_j = - \sum_{n=0}^{\infty} M_{jn} \cos \gamma_n x (\operatorname{sh} \gamma_n z + N_{jn} \operatorname{ch} \gamma_n z), \quad (1.17)$$

$$W_j = \sum_{n=0}^{\infty} M_{jn} \sin \gamma_n x (\operatorname{ch} \gamma_n z + N_{jn} \operatorname{sh} \gamma_n z) \quad (\gamma_n = \pi/2a + \pi n/a).$$

По условию несжимаемости $L_{j0} = 0$.

Удовлетворим первому условию (1.5), которое записывается как $\partial p_1 / \partial x = 0$ при $z = -h_1$. Используя (1.1) и (1.16), находим

$$N_{1n} = \frac{\omega^2 \operatorname{th} \gamma_n h_1 - g \gamma_n}{\omega^2 - g \gamma_n \operatorname{th} \gamma_n h_1}.$$

Из последнего условия (1.6) $N_{2n} = -\operatorname{cth} \gamma_n h_2$. Для больших значений γ_n в них можно положить $N_{1n} \approx 1$, $N_{2n} \approx -1$. Согласно первому условию (1.6) имеем $M_{1n} = M_{2n}$.

Более подробно рассмотрим симметричное решение, которое получило нулевым в статическом подходе.

Вычислим перепад давления на пластину, для чего подставим (1.16) во второе уравнение (1.1) и проинтегрируем с учетом граничного значения (1.5). Используя равенство $M_{1n} = M_{2n}$, определим перепад на пластину

$$p_1 - p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} M_{1n} f_n \cos \gamma_n x + K, \quad (1.18)$$

$$f_n = \rho_1 g \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{g \gamma_n} N_{1n} \right) (1 - \operatorname{ch} \gamma_n h_1) + \right. \\ \left. + \left(N_{1n} + \frac{\omega^2}{g \gamma_n} \right) \operatorname{sh} \gamma_n h_1 \right] - \rho_2 g \left(1 + \frac{\omega^2}{g \gamma_n} N_{2n} \right).$$

Здесь K — константа интегрирования.

Решение уравнения динамики пластины (1.3) под действием перепада давления (1.18) имеет вид

$$w = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \operatorname{ch} \lambda x + E \operatorname{sh} \lambda x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{1n} f_n}{D(\gamma_n^4 - \lambda^4)} \cos \gamma_n x - \frac{K}{D \lambda^4} \quad \left(\lambda^4 = \frac{\rho_s h \omega^2}{D} \right). \quad (1.19)$$

Решение (1.19) справедливо для случая $\gamma_n \neq \lambda$.

Из условия симметрии решения (1.19) коэффициенты $B = E = 0$. С учетом $\partial w / \partial x = 0$ ($x = \pm a$) находим

$$C = A \sin \lambda a / \operatorname{sh} \lambda a. \quad (1.20)$$

Связь между A и N_{1n} определится из равенства $w(x) = W_2(x, 0)$ (1.6). Для выполнения этого условия предварительно разложим функцию $\cos \lambda x + (\sin \lambda a / \operatorname{sh} \lambda a) \operatorname{ch} \lambda x$ в ряд по $\cos \gamma_n x$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, выразим K и N_{1n} через A

$$K = \frac{1}{2} D \lambda^4 b_0 A, \quad N_{1n} = \frac{D(\gamma_n^4 - \lambda^4) b_n}{D(\gamma_n^4 - \lambda^4) - f_n} A, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1} 4 \lambda^3 \sin \lambda a}{a(\gamma_n^4 - \lambda^4)} \quad (n \geq 1). \quad (1.21)$$

Подставим (1.20), (1.21) в (1.19) и удовлетворим граничному условию $w = 0$ ($x = \pm a$). Полагая $A \neq 0$, получим характеристическое уравнение в виде бесконечного ряда трансцендентных функций. Этот ряд обладает хорошей сходимостью. В приближенном анализе ограничиваемся двумя членами этого ряда. Из соответствующего характеристического уравнения получаются два условия устойчивости системы, определяющим из которых является неравенство [3]

$$\rho_1 - \rho_2 < \frac{17}{2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 \frac{D}{g}. \quad (1.22)$$

Таким образом, в отличие от статического динамический подход дает условие (1.22), при нарушении которого в рамках линейной теории имеют место неограниченно возрастающие решения.

Что касается несимметричной формы решения (1.17), то повторение аналогичных выкладок приводит к тому же характеристическому уравнению, что выше, только в нем вместо $\gamma_n = \pi n / a$ присутствует величина $\gamma_n = \pi(n + 1/2) / a$ и суммирование проводится начиная с нуля. Приближенное условие устойчивости, когда в соответствующем этому случаю уравнении сохранены два члена, имеет вид

$$\rho_1 - \rho_2 < \frac{250}{a^4} \frac{D}{g}. \quad (1.23)$$

Согласно (1.14) статический подход дает значение коэффициента в условии (1.23), равное 239. Следовательно, для несимметричной формы оба подхода дают близкие результаты.

§ 2. Вынужденные колебания сжимаемой жидкости внутри жесткой трубы, закрытой упругой пластиной

Рассмотрим осесимметричную задачу о вынужденных установившихся колебаниях системы [7]. На одном конце абсолютно жесткой трубы колеблется плоский поршень по гармоническому закону. Другой конец закрыт упругой пластиной, края которой жестко защемлены (рис. 7.2).

Ограничимся случаем, когда возбуждение происходит при частотах, далеких от собственных частот системы, и возмущения в жидкости описываются линейными уравнениями. При этом, однако, изгиб пластины

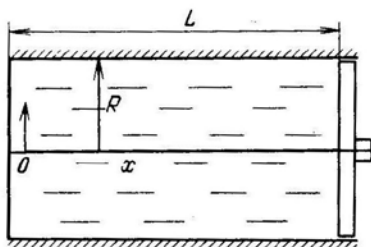


Рис. 7.2. Жидкость в жесткой трубе с упругим дном

будем считать нелинейным. Предполагаем, что в поставленной задаче взаимное скольжение между пластиной и жидкостью пренебрежимо мало.

Обозначим продольную и радиальную лагранжевы координаты через $\alpha_1 = \xi$ и $\alpha_3 = \rho$, соответствующие компоненты перемещения в жидкости — через U и W . Линейные уравнения следуют из (2.1) — (2.6) гл. 6

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{W}{\rho} \right), \\ \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{W}{\rho} \right), \\ p &= p^* - p_0 = -\gamma p_0 \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{W}{\rho} \right) \quad (a_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Исходя из общих уравнений (3.8), (3.9) гл. 1 и пренебрегая тангенциальными инерционными силами, записываем известные нелинейные уравнения движения круглой пластины

$$\begin{aligned} D \nabla^2 \nabla^2 w &= h L_p(w, F) - \rho_s h \partial^2 w / \partial t^2 - p, \\ \nabla^2 \nabla^2 F &= -\frac{1}{2} E L_p(w, F). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь w — прогиб, $F(\rho, t)$ — функция напряжений, связанная с мембранными напряжениями σ_ρ и σ_θ соотношениями

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}.$$

Входящие в (2.2) операторы имеют вид

$$L_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right),$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \right\}.$$

Граничные условия заземления

$$w = \partial w / \partial \rho = 0 \quad (\rho = R),$$

$$E \epsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu \sigma_\rho = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} = 0 \quad (\rho = R). \quad (2.3)$$

В силу малости взаимного скольжения кинематическое условие на пластине по любому из вариантов записи (§ 3,4 гл. 6) имеет вид

$$W = w \quad (\xi = 0). \quad (2.4)$$

Условие на поверхности плоского поршня представляет собой закон его движения

$$U = l \cos \omega t \quad (\xi = L). \quad (2.5)$$

На твердой стенке имеем

$$W = 0 \quad (\rho = R). \quad (2.6)$$

Наконец, должны выполняться условия осевой симметрии для обеих сред и конечности решений при $\rho = 0$.

Приближенное решение задачи отыскиваем в виде разложения по малому параметру ϵ , за который можно, например, принять

$$\epsilon = \gamma p_0 / E. \quad (2.7)$$

Если ϵ устремить к нулю, то приходим к задаче о продольных колебаниях в газе, заключенном в трубе с абсолютно жестким дном. Поэтому параметры представим в виде следующих разложений:

$$U(\xi, \rho, t) = U_0(\xi, t) + \epsilon U_1(\xi, \rho, t) + \dots,$$

$$W(\xi, \rho, t) = \epsilon W_1(\xi, \rho, t) + \epsilon^2 W_2(\xi, \rho, t) + \dots,$$

$$w(\rho, t) = \epsilon w_1(\rho, t) + \epsilon^2 w_2(\rho, t) + \dots,$$

$$F(\rho, t) = \epsilon F_1(\rho, t) + \epsilon^2 F_2(\rho, t) + \dots \quad (2.8)$$

Подставим разложения (2.8) в (2.1)–(2.6), предварительно внося параметр (2.7) в уравнения (2.2). В результате сравнения членов при одинаковых степенях ϵ получаем системы линейных уравнений.

При ϵ^0 имеем

$$\partial^2 U_0 / \partial t^2 = a_0^2 \partial^2 U_0 / \partial \xi^2,$$

$$U_0 = 0 \quad (\xi = 0), \quad U_0 = l \cos \omega t \quad (\xi = L). \quad (2.9)$$

При ϵ в первой степени

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial W_1}{\partial \rho} + \frac{W_1}{\rho} \right), \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial W_1}{\partial \rho} + \frac{W_1}{\rho} \right), \quad (2.11)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w_1 = \frac{12(1-\nu^2)}{h^3} \frac{\partial U_0(0, \rho, t)}{\partial \xi}, \quad (2.12)$$

$$w_1 = \partial w_1 / \partial \rho = 0 \quad (\rho = R), \quad (2.13)$$

$$W_1 = w_1 \quad (\xi = 0), \quad (2.14)$$

$$U_1 = 0 \quad (\xi = L), \quad (2.15)$$

$$W_1 = 0 \quad (\rho = R). \quad (2.16)$$

Решение задачи (2.9) имеет вид

$$U_0 = l \frac{\sin(\omega \xi / a_0)}{\sin(\omega L / a_0)} \cos \omega t. \quad (2.17)$$

Подставим (6.17) в (2.12) и в результате интегрирования получаем w_1 . Постоянные интегрирования находятся из условий (2.13) и ограниченности решения. Имеем

$$w_1 = B \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)^2 \cos \omega t, \quad B = \frac{3(1-\nu^2) l \omega R^4}{16 h^3 a_0 \sin(\omega L / a_0)}. \quad (2.18)$$

Для смещений частиц жидкости приближенные выражения с учетом (2.16) выберем в виде

$$U_1 = \bar{U}_1(\xi) \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)^2 \cos \omega t, \quad (2.19)$$

$$W_1 = \bar{W}_1(\xi) \frac{\rho}{R} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) \cos \omega t,$$

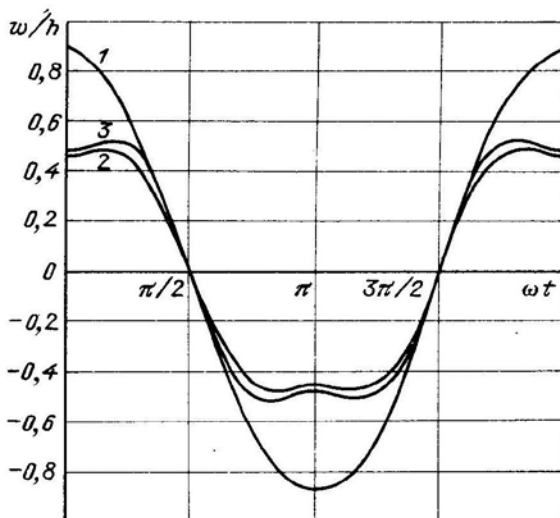
Интегрируя систему (2.10), (2.11) с учетом (2.19) по методу Бубнова–Галеркина, получаем обыкновенные уравнения относительно $\bar{U}_1(\xi)$, $\bar{W}_1(\xi)$. Удовлетворив решения последних условиям (2.14), (2.15), находим

$$U_1 = Bh \frac{\sin \lambda(L - \xi)}{\sin \lambda L} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)^2 \cos \omega t, \quad (2.20)$$

$$V_1 = - \frac{4Bh\lambda}{\omega^2 R^2 / a_0^2 - 56} \frac{\cos \lambda(L - \xi)}{\sin \lambda L} \rho \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) \cos \omega t.$$

Здесь обозначено

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{a_0^2} \frac{\omega^2 R^2 / a_0^2 - 56}{\omega^2 R^2 / a_0^2 - 53}.$$



Р и с. 7.3. Изменение прогиба пластины по времени

Аналогично определяются решения при ϵ^2 и т.д. [7]. В решении при ϵ^3 появляются члены, осциллирующие с утроенной частотой. Происходит стремительное увеличение объема вычислений.

Для случая стальной пластины и заполнения трубы воздухом были проведены расчеты. Было принято $\nu = 0,3$; $\epsilon = 0,67 \cdot 10^{-6}$; $\rho_s/\rho_0 = 603$; $R/h = 150$; $l/L = 1,5 \cdot 10^{-2}$; $L/R = 4$, $\omega L/a_0 = 0,4$. При определении прогибов пластины были выполнены четыре приближения, а для газа — три [7].

На рис. 7.3 представлена зависимость безразмерного прогиба в центре пластины ($\rho = 0$) от безразмерного времени. Видно, что первое приближение (кривая 1) дает завышенное значение прогиба, третье и четвертое приближения (соответственно кривые 2 и 3) отличаются между собой незначительно.

§ 3. Нелинейные радиальные колебания цилиндрической оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью

В качестве примера, иллюстрирующего преимущества формулировки нелинейной задачи в едином лагранжевом способе, рассмотрим установившиеся вынужденные колебания идеальной сжимаемой жидкости, заключенной между двумя круговыми цилиндрическими оболочками бесконечной длины.

Внутренний цилиндр, на поверхности которого задан закон движения, является источником радиальных возмущений. Наружная оболочка из высокоэластичного материала способна совершать движение с большой

амплитудой. Так же, как в предыдущем параграфе, рассматриваем нерезонансный режим и пренебрегаем волновыми явлениями вне оболочки.

Уравнения радиального движения получим из (2.1) – (2.6) гл. 6. После несложных преобразований с точностью до членов второго порядка относительно радиального перемещения W будем иметь

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{W}{\rho^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\gamma \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho W)}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(W^2)}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad (3.1)$$

$$\frac{p}{\gamma p_0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho W)}{\partial \rho} - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial(W^2)}{\partial \rho} + \frac{\gamma+1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho W)}{\partial \rho} \right)^2. \quad (3.2)$$

Здесь p_0 , a_0 – равновесные значения давления и скорости звука, $p = p^* - p_0$ – возмущение давления.

В случае несжимаемого линейного материала (типа резины) уравнение цилиндрической оболочки при конечных деформациях может быть использовано в виде [10]

$$\frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = \frac{R_0 + w_*}{\rho_s R_0 h_0} \left(p_0 + p - \frac{4}{3} E R_0 h_0 \frac{\ln(1 + w_*/R_0)}{(R_0 + w_*)^2} \right) \quad (\rho = R_0), \quad (3.3)$$

где w_* – полное перемещение срединной поверхности оболочки, R_0 , h_0 – радиус и толщина в ненапряженном состоянии. Будем предполагать отсутствие противодействия снаружи цилиндра и под p_0 понимать статический перепад. Представим функцию w_* в виде суммы статического и динамического слагаемых

$$w_* = w_0 + w(t) \quad (3.4)$$

и подставим (3.4) в (3.1). Заменяя в последнем значение логарифма его разложением в степенной ряд, получим уравнения для определения слагаемых (3.4).

Статический прогиб оболочки под действием внутреннего давления с принятой выше точностью равен

$$\frac{w_0}{R_0} = \frac{2Eh_0 - 3p_0R_0 - \sqrt{2Eh_0(2Eh_0 - 9p_0R_0)}}{2Eh_0 + 3p_0R_0}. \quad (3.5)$$

Уравнение колебаний оболочки имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & \left[\frac{p_0}{\rho_s R_0 h_0} - \frac{2E(2R_0^2 - 2R_0 w_0 + w_0^2)}{3\rho_s R_0^2 R_0'} \right] w + \\ & + \frac{2E(3R_0^2 - 2R_0 w_0 + w_0^2)}{3\rho_s R_0^2 R_0'} w^2 + \frac{R_0'}{\rho_s R_0 h_0} p \quad (\rho = R_0'), \quad (3.6) \\ (R_0' = R_0 + w_0). \end{aligned}$$

Оно записано с точностью до величин второго порядка относительно возмущения прогиба w .

На источнике задан закон движения

$$W = l \cos \omega t \quad (\rho = R_1). \quad (3.7)$$

На поверхности наружной оболочки

$$W = w \quad (\rho = R'_0). \quad (3.8)$$

Здесь еще раз подчеркнем разницу в данной постановке задачи с постановкой в совместном эйлерово-лагранжевом способе. В последнем случае вместо (3.1), (3.2) с тем же порядком точности имеем из (4.10), (4.11) гл. 1 уравнения

$$a_0^2 \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (\gamma - 1) \nabla^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t},$$

$$\frac{p}{\gamma p_0} = -\frac{1}{a_0^2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2a_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Здесь r — эйлерова координата, φ — потенциал скорости.

В соответствии с изложенным в § 2 гл. 2 с точностью до величин второго порядка вместо выражения для давления $p(R'_0, t)$ в последнем члене (3.6) будет

$$p(R'_0 + w, t) = p(R'_0, t) + w \partial p(R'_0, t) / \partial r.$$

Остальные члены в уравнении деформации оболочки, естественно, не изменяются.

Далее с той же точностью вместо (3.7), (3.8) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + l \cos \omega t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -l \omega \sin \omega t \quad (r = R_1),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (r = R'_0).$$

Таким образом, здесь все кинематические и динамические условия являются нелинейными. В постановке в едином лагранжевом способе они линейны независимо от величины радиального перемещения оболочки, следовательно, при решении задачи могут быть удовлетворены точно.

Вернемся к формулировке (3.1), (3.2), (3.6), (3.7), (3.8). Приближенное решение разыскиваем методом последовательных приближений. Примем за первое приближение решения уравнений, в которых отброшены нелинейные члены. Для (3.1) оно имеет вид

$$W^{(1)} = [A_1 J_1(\xi) + B_1 N_1(\xi)] \cos \omega t, \quad (3.9)$$

где $\xi = \omega \rho / a_0$, J_1 и N_1 — цилиндрические функции. Постоянные A_1 , B_1 находятся из (3.7), (3.8), а также (3.6), причем в последнем пока не

учитываются нелинейные члены. Они равны

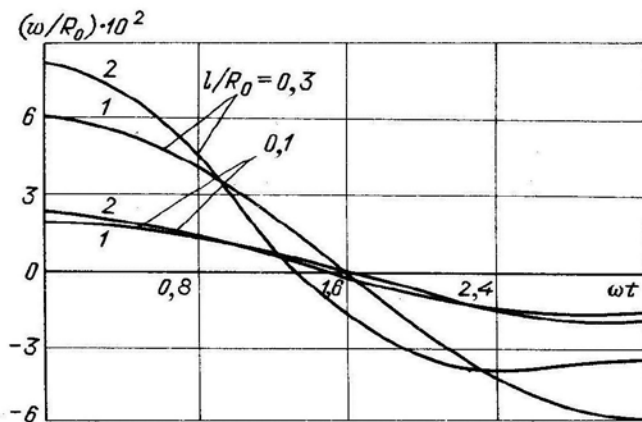
$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta_1/\Delta, \quad B_1 = \Delta_2/\Delta, \\ \Delta_1 &= -l[(d + \omega^2)N_1(\xi_0) + cN_0(\xi_0)], \\ \Delta_2 &= l[(d + \omega^2)J_1(\xi_0) + cJ_0(\xi_0)], \\ \Delta &= \frac{1}{l}[\Delta_1 J_1(\xi_1) + \Delta_2 N_1(\xi_1)], \\ \xi_0 &= \omega R'_0/a_0, \quad \xi_1 = \omega R_1/a_0, \\ c &= \gamma p_0 \xi_0 / \rho_s R_0 h_0, \\ d &= \frac{p_0}{\rho_s R_0 h_0} - \frac{2E(2R_0^2 - 2R_0 w_0 + w_0^2)}{3\rho_s R_0^2 R_0'^2}. \end{aligned}$$

Уравнения второго приближения получим, подставив (3.9) в нелинейные члены (3.1), (3.2), (3.6). Условия (3.7), (3.8) удовлетворяются полностью на каждой итерации. При этом функция смещения частиц жидкости принимается в более сложном виде

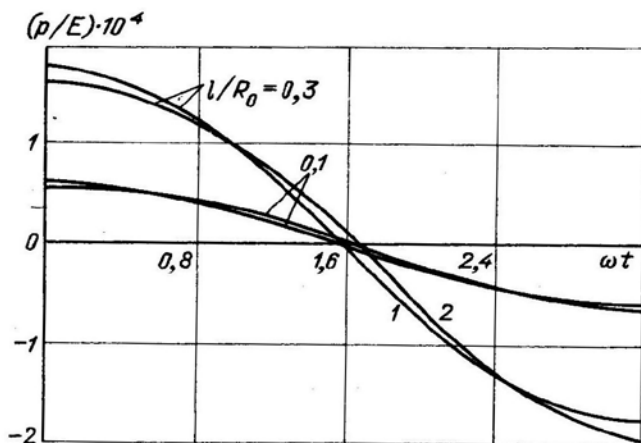
$$W^{(2)} = W_0^{(2)} + W_1^{(2)} \cos \omega t + W_2^{(2)} \cos 2\omega t. \quad (3.10)$$

Функции $W_i^{(2)}(\xi)$ определяются из обыкновенных уравнений, полученных методом гармонического баланса. Аналогично может быть найдено решение на следующем этапе итерации. Ввиду стремительного роста объема вычислений от этапа к этапу выполнены два приближения [2].

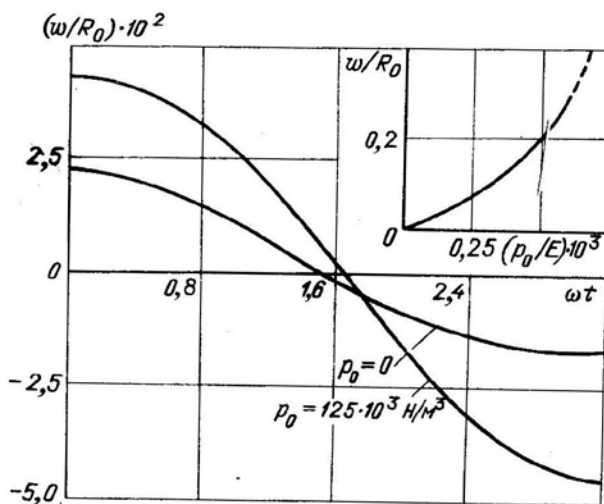
При численных расчетах взяты следующие данные: $p_0/E = 0,5 \cdot 10^{-3}$; $\rho_s/\rho_0 = 10^3$; $R_1/R_0 = 0,5$; $\xi_0 = 0,7$. На рис. 7.4 представлены безразмерные радиальные смещения оболочки в зависимости от безразмерного времени для различных амплитуд колебаний источника. Для принятых параметров



Р и с. 7.4. Изменение прогиба оболочки по времени



Р и с. 7.5. Изменение давления на оболочку по времени



Р и с. 7.6. Изменение прогиба оболочки в зависимости от наддува

при $l/R_0 = 0,1$ можно не учитывать различие между первым (кривая 1) и вторым (кривая 2) приближениями.

При больших значениях относительной амплитуды расхождение между приближениями становится значительным. Характер кривых все более отличается от линейного решения.

На рис. 7.5 для тех же значений параметров построена эпюра давления в газе вблизи поверхности оболочки. Величины давлений для первого и второго приближений (кривые 1 и 2) отличаются значительно меньше, чем соответствующие приближения для прогибов оболочки.

Влияние наддува p_0 на величины статического и динамического перемещений оболочки показано на рис. 7.6. В верхнем углу дана статическая характеристика оболочки из несжимаемого упругого материала. Штриховая часть кривой соответствует неустойчивым значениям прогиба w_0 . Существует критическое избыточное давление.

В нижней части рисунка показаны динамические прогибы в зависимости от наддува p_0 . При наличии избыточного давления изменяется жесткостная характеристика оболочки — она становится более податливой в силу увеличения среднего радиуса и уменьшения толщины. Поэтому динамический прогиб в этом случае существенно превышает аналогичные значения при $p_0 = 0$.

§ 4. Взаимодействие при ударном нагружении

Взаимодействие ударных волн с упругими конструкциями, контактирующими с жидкостью, представляет важную и трудную задачу гидроупругости. Она обширна и многогранна. Не случайно ей посвящена значительная монографическая литература, о которой сказано во введении к книге.

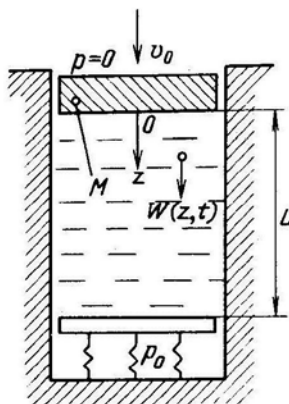


Рис. 7.7. Схема ударного взаимодействия жидкости и днища

Здесь мы рассмотрим задачу об ударном нагружении падающим поршнем поверхности жидкости, соприкасающейся с деформирующимся днищем. С целью упрощения задачи рассмотрим одномерную модель.

Невесомая идеальная сжимаемая жидкость заключена в полость с двумя абсолютно жесткими боковыми стенками. На ее поверхность падает поршень массы M с начальной скоростью v_0 . Днище представляет собой абсолютно жестким поршень на пружинах (рис. 7.7), находящийся до падения ударной волны в равновесном состоянии под действием равных давлений p_0 с обеих сторон. Волновые явления по другую сторону днища не учитываются. Кавитация жидкости не рассматривается.

Предполагается, что возмущения в жидкости и перемещение днища могут быть значительными. Поэтому для описания их движения должны быть использованы нелинейные соотношения.

Уравнения, описывающие движение жидкости, получим из (3.1), (3.2), устремив в них $\rho \rightarrow \infty$ и заменив $\partial/\partial\rho$ на $\partial/\partial z$. Здесь z — лагранжева координата. Получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$\frac{p}{\gamma p_0} = - \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2. \quad (4.1)$$

Уравнение движения поршня — днища примем в виде

$$\rho_s h \partial^2 w / \partial t^2 + c w + d w^3 = p(L, t). \quad (4.2)$$

Предполагаем, что после удара на свободную поверхность жидкости поршень движется без отрыва от нее. Уравнение его имеет вид

$$M \partial^2 W / \partial t^2 = -p \quad (z = 0, t > 0). \quad (4.3)$$

Кинематическое условие на днище

$$W = w \quad (z = L, t > 0). \quad (4.4)$$

Начальные условия состоят в следующем. В момент удара поршня жидкость покоится; следовательно,

$$\begin{aligned} W &= 0, \quad \partial W / \partial t = v_0 \quad (t = 0, z = 0), \\ W &= \partial W / \partial t = 0, \quad p = p_0 \quad (t = 0, 0 < z < L), \\ w &= \partial w / \partial t = 0 \quad (z = L, t \leq T). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь T — время от момента удара поршня по жидкости до подхода волны к днищу.

В отличие от предыдущих двух параграфов здесь демонстрируется другой метод последовательных приближений, который применялся в гл. 3 и 4. Он основан на том, что в первом приближении упругое тело считается недеформируемым. Таким образом, решение в области, занятой жидкостью, удовлетворяет условию (4.3), а (4.2) и (4.4) заменяются условием

$$W^{(1)} = 0 \quad (z = L, t > 0). \quad (4.6)$$

Последующие приближения ($n \geq 2$) определяются из системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W^{(n)}}{\partial z^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 W^{(n)}}{\partial t^2} &= \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 W^{(n-1)}}{\partial t^2} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial z}, \\ \frac{p^{(n)}}{\gamma p_0} &= - \frac{\partial W^{(n)}}{\partial z} + \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial z} \right)^2 \quad (0 \leq z \leq L), \\ \rho_s h \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial t^2} + c w^{(n)} &= p^{(n-1)} - d (w^{(n-1)})^3 \quad (z = L), \\ M \partial^2 W^{(n)} / \partial t^2 &= -p^{(n)} \quad (z = 0, t > 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W^{(n)} &= w^{(n)} \quad (z = L, t \geq T), \\
 W^{(n)} &= 0, \quad \partial W^{(n)} / \partial t = v_0 \quad (z = 0, t = 0), \\
 w^{(n)} &= \partial w^{(n)} / \partial t = 0 \quad (z = L, t \leq T).
 \end{aligned}$$

Особенностью метода является то, что в первом приближении гидродинамическая задача остается нелинейной. Но решение ее несколько упрощается в силу того, что кроме источника на всех других границах области задаются нулевые условия. Остальные приближения представляют собой линейные задачи.

Решение этой нелинейной задачи относительно $W^{(1)}$, $p^{(1)}$ представляет большие трудности и является весьма громоздким [4]. Приведем без вывода значение давления

$$\begin{aligned}
 \frac{p^{(1)}}{p_0} &= 1 + \frac{\gamma n^2}{a_0} \left(\theta_0 - \frac{a_0}{m} \operatorname{tg} \frac{m \theta_0}{a_0} \right) + \\
 &+ \frac{\gamma m}{n^2} \left\{ \frac{1}{n^2} \left[\frac{n^2 A^2 - \xi^2}{(B + \tau)^2 - A^2} \right]^{1/2} - \operatorname{arc} \sin \left[\frac{n^2 A^2 - \xi^2}{n^4 (B + \tau)^2 - \xi^2} \right]^{1/2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$m = \frac{1}{8} \sqrt{(3\gamma - 1)(3 - \gamma)}, \quad n = \sqrt{(3\gamma - 1)/(3 - \gamma)},$$

$$A = \frac{\gamma(1 + 2M/\rho_0 L) + 1}{(1 + \gamma)n^2 \sin \beta_0}, \quad \beta_0 = m \frac{\theta_0 - v_0}{a_0}, \quad \theta_0 = \frac{2a_0}{\gamma - 1},$$

$$B = \frac{1}{n^2} \left(\frac{2\gamma M}{(1 + \gamma)\rho_0 L \sin^2(m\theta_0/a_0)} + 1 \right) + \frac{a_0 T}{L},$$

$$\tau = a_0(t - T)/L, \quad \xi = z/L - 1.$$

На рис. 7.8 показано изменение давления на днище ($\xi = 0$) в зависимости от времени по этой формуле. Принято $\gamma = 1,4$; $M/(\rho_0 L) = 2$, $a_0 = 340$ м/с. С увеличением скорости удара интенсивность волны возрастает. Увеличение массы поршня вызывает незначительный рост максимума давления, приводит к более медленному падению эпюры давления.

В дальнейшем делается необходимое количество итераций [4]. На рис. 7.9 приведены зависимости давления на днище полости и его перемещения от времени. Были приняты параметры $\gamma = 1,4$; $v_0/a_0 = 0,03$; $M/\rho_0 L = 5$; $\rho_s h/\rho_0 L = 0,61$; $cL/p_0 = 0,4$; $dL/p_0 = 0,4$. Высокая точность была достигнута на восьмом приближении.

Первое приближение задачи в линейной постановке может быть получено точно с применением преобразования Лапласа по времени. Последую-

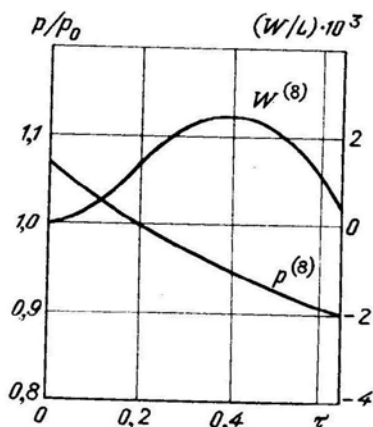
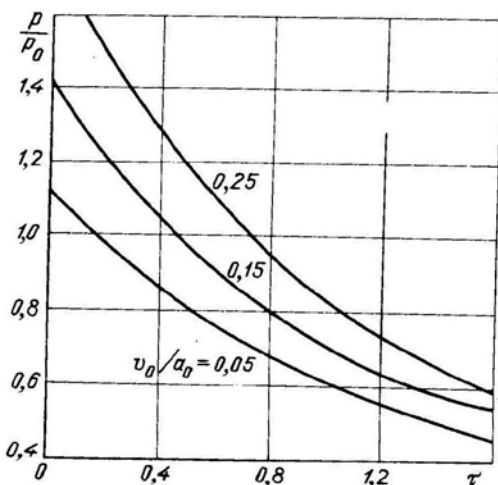


Рис. 7.8. Зависимость изменения давления на днище от скорости удара поршня

Рис. 7.9. Изменение давления на днище и его перемещения

щие приближения в линейной задаче быстро сходятся. Сравнение решений в линейной и нелинейной постановках при малых скоростях удара дает совпадающие результаты.

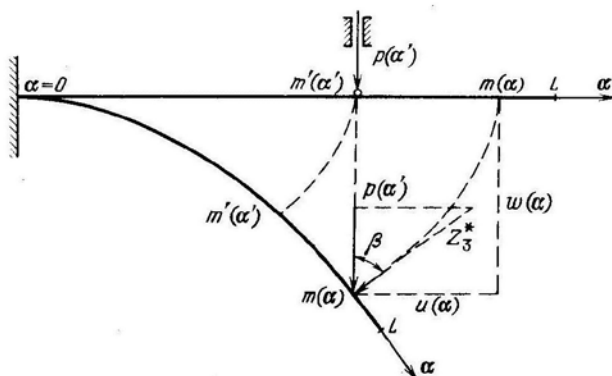
§ 5. Сильный изгиб стержня силой, зависящей от деформации упругой линии

До сих пор в этой главе рассматривались задачи, в которых взаимное скольжение между средами отсутствует или пренебрежимо мало. Это обстоятельство позволяет получить сравнительно простые приближенные решения нелинейных задач с помощью аналитических методов.

Необходимость учета проскальзывания существенно усложняет получение решений. Здесь должны применяться численные методы. В следующем параграфе будут рассмотрены сложные физические задачи с помощью численной реализации единого лагранжового способа.

В данном параграфе влияние взаимного скольжения на решение покажем на примере статического сильного изгиба консольного стержня силой, величина и точка приложения которой зависят от деформации упругой линии. Этой силой может быть, например, сила тяжести жесткого штока, скользящего без трения по вертикальным жестким направляющим (рис. 7.10). Шток давит на стержень без трения. Постановка подобной задачи разбиралась в § 1 гл. 6.

Важно подчеркнуть, что рассматриваемая механическая система имеет много общего с системой, включающей жидкость. С другой стороны этот методический пример показывает, что кинематические и динамические условия из гл. 6 могут быть использованы при рассмотрении контактных



Р и с. 7.10. Сильный изгиб упругого стержня

задач теории упругости, когда между контактирующими поверхностями происходит взаимное скольжение, обусловленное их деформацией.

Предположим, что система штоков, давящих на стержень, образует плавно изменяющуюся по длине α распределенную нагрузку. Тогда, как это следует из § 3 гл. 6, можно оперировать первым вариантом записи условий на поверхности контакта. В дальнейшем распределенную нагрузку примем в виде

$$p(\alpha') = p\alpha'/L. \quad (5.1)$$

В рассматриваемом примере по направлению орта k_1 вдоль недеформированного стержня штоки не перемещаются, следовательно, $U \equiv 0$. При этом из (3.4) гл. 6 получим следующую связь:

$$\alpha' - \alpha = u(\alpha), \quad (5.2)$$

которая непосредственно следует также из рис. 7.10.

Как уже обсуждалось в § 1 гл. 6, давление по нормали k_3^* к деформированной линии стержня в точке $m(\alpha)$

$$Z_3^* = \frac{p(\alpha')}{(1 + \partial u(\alpha)/\partial \alpha)}. \quad (5.3)$$

Составляющая Z_1^* равна нулю ввиду контакта тел без трения.

Выражение (5.3) справедливо при $0 < \alpha' < L + u(L)$, что проистекает из (5.2) при $\alpha = L$. В рассматриваемом примере $u(L) < 0$. Если $\alpha' \geq L + u(L)$, то $Z_3^* = 0$, что соответствует сходу части сил со стержня в результате перемещения его конца $\alpha = L$ по направлению недеформированной оси α (по направлению k_1).

Как известно, в первом варианте контактных условий $p(\alpha') = p(\alpha) + (\alpha' - \alpha)\partial p/\partial \alpha$. Тогда с учетом (5.2) и (5.1) динамическое условие (5.3)

можно записать в виде

$$Z_3^* = \frac{p(\alpha) + u(\alpha) \partial p / \partial \alpha}{1 + \partial u(\alpha) / \partial \alpha} = \frac{p_0}{L} \frac{\alpha + u(\alpha)}{1 + \partial u(\alpha) / \partial \alpha} \approx$$

$$\approx \frac{p}{L} \left[\alpha + u(\alpha) - \alpha \frac{\partial u(\alpha)}{\partial \alpha} \right] \quad (0 < \alpha' < L + u(L)), \quad (5.4)$$

$$Z_3^* = 0 \quad (\alpha^1 \geq L + u(L)).$$

Теперь привлечем уравнения сильного изгиба стержня. Из § 3 гл. 1 имеем

$$\begin{aligned} \partial N_{\alpha\alpha}^* / \partial \alpha + \kappa_{\alpha\alpha} Q_{\alpha}^* &= 0, \\ \partial Q_{\alpha}^* / \partial \alpha - \kappa_{\alpha\alpha} N_{\alpha\alpha}^* &= -Z_3^*, \\ \partial M_{\alpha\alpha}^* / \partial \alpha - Q_{\alpha}^* &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} u(\alpha) = w(\alpha) = \partial w(\alpha) / \partial \alpha &= 0 \quad (\alpha = 0), \\ N_{\alpha\alpha}^*(\alpha) = Q_{\alpha}^*(\alpha) = M_{\alpha\alpha}^*(\alpha) &= 0 \quad (\alpha = L). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставив в (5.5) связь между моментом и изменением кривизны $M_{\alpha\alpha}^* = D\kappa_{\alpha\alpha}$ и учитывая последние условия (5.6), получим

$$\begin{aligned} N_{\alpha\alpha}^* &= -D\kappa_{\alpha\alpha}^2/2, \quad Q_{\alpha}^* = D\partial\kappa_{\alpha\alpha}/\partial\alpha, \\ \frac{\partial^2 \kappa_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha}^3 &= \frac{1}{D} Z_3^*. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Выражение для изменения кривизны через компоненты перемещения

$$\kappa_{\alpha\alpha} = - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}. \quad (5.8)$$

Поскольку рассматриваемый стержень подвергается в основном изгибу, то с большой достоверностью можно принять, что относительное удлинение его средней линии равно нулю:

$$\epsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 = 0. \quad (5.9)$$

Проведем некоторые упрощения в соотношениях (5.7)–(5.9). Для этой цели предположим, что максимальные значения величин w/L и $\partial w/\partial \alpha$ имеют порядок $\epsilon^{1/4}$ ($\epsilon \sim h/L$, где h – толщина стержня). Если $\epsilon \sim 10^{-2}$, то $w/L \sim 1/3$. Следовательно, оценкой $\epsilon^{1/4}$ охватывается и сильный изгиб стержня. Кроме того, будем считать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \sim \frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \sim \frac{1}{L^n} \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

Тогда из (5.8), (5.9) получим выражения

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right], \\ \kappa_{\alpha\alpha} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right],\end{aligned}\quad (5.10)$$

в которых слагаемые порядка ϵ по сравнению с единицей отброшены. Подставляя (5.10) и (5.4) в (5.7), получим

$$\begin{aligned}N_{\alpha\alpha}^* &= -\frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right], \\ Q_{\alpha}^* &= -D \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \right\}, \\ L^*(w) &= -\frac{p_0}{DL} \left[\alpha + u + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (5.11)$$

Здесь оператор имеет вид

$$L^*(w) = \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)^3.$$

В правой части уравнения изгиба второе слагаемое в квадратных скобках характеризует скольжение точки приложения силы вдоль стержня, а третье — изменение величины давления на деформирующийся стержень в результате поворота его нормали.

В качестве функции прогиба, удовлетворяющей условиям (5.6), примем

$$w = \frac{1}{3} \bar{w} L \xi^2 \left(1 - \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{20} \xi^3 \right) \quad \left(\xi = \frac{\alpha}{L} \right), \quad (5.12)$$

которое является решением линейного дифференциального уравнения изгиба. Здесь $\bar{w}$ — безразмерная неизвестная постоянная. Из (5.10) с использованием (5.6) и (5.12) получаем

$$\begin{aligned}20u &= -L \bar{w}^2 \xi^3 [1,48 - 1,67\xi + 0,50\xi^2 + 0,18\xi^3 - 0,12\xi^4 + \\ &+ \frac{1}{40} \bar{w}^2 (3,95\xi^2 - 9,88\xi^3 + 9,52\xi^4 - 2,93\xi^5 - 1,78\xi^6)].\end{aligned}\quad (5.13)$$

Подставим (5.12) и (5.13) в уравнение изгиба (5.11) и проинтегрируем последнее по методу Бубнова — Галеркина. С учетом характера правой

части будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^L L^*(w) w d\alpha &= -\frac{p_0}{DL} \int_0^L \left[\alpha + u + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right] w d\alpha = \\ &= -\frac{p_0}{DL} \int_0^{L+u(L)} \left[\alpha + u + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right] w d\alpha. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Отсюда получаем [5]

$$\bar{w} + c_2 \bar{w}^2 + c_3 \bar{w}^3 + c_1 p_0 = 0,$$

где

$$c_1 = L^3/2D; \quad c_2 = -0,055 c_1 p_0; \quad c_3 = 0,01.$$

Вычисления проведены для параметров $\nu = 0,3$; $h/L = 10^{-2}$ при значениях отношения $p_0/E = 10^{-7}$; $3 \cdot 10^{-7}$.

На рис. 7.11–7.14 представлены эпюры прогиба, изгибающего момента и внутренних усилий по длине стержня. Сплошным линиям соответствуют результаты, полученные с учетом скольжения и изменения величины давления, обусловленного поворотом нормали, а штриховыми — без учета скольжения. При сравнительно небольших прогибах результаты этих двух

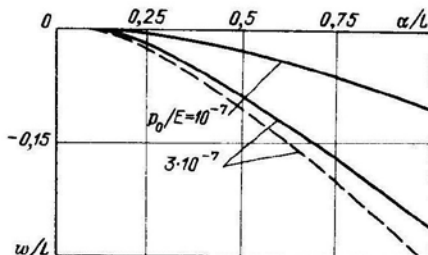


Рис. 7.11. Зависимость прогиба стержня от скользящей нагрузки

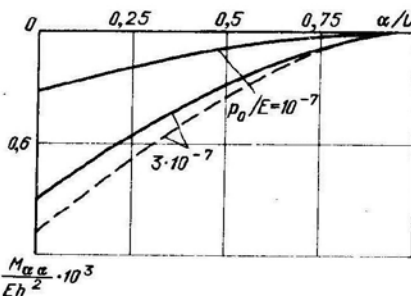
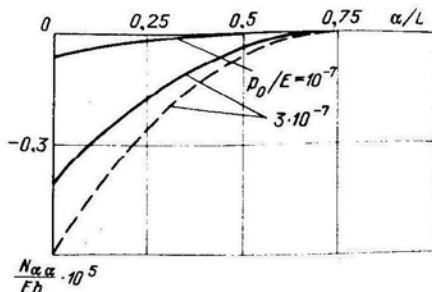
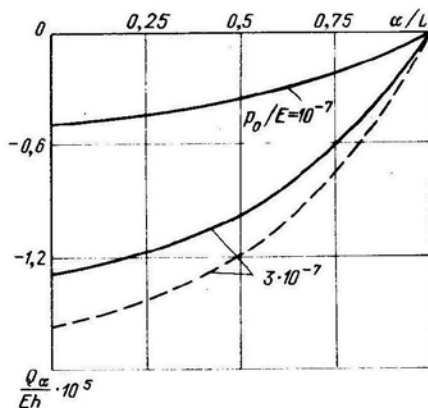


Рис. 7.12. Зависимость изгибающего момента в стержне от скользящей нагрузки



Р и с. 7.13. Зависимость осевого усилия в стержне от скользящей нагрузки



Р и с. 7.14. Зависимость перерезывающей силы в стержне от скользящей нагрузки

решений, как и следовало ожидать, практически не отличаются. С увеличением прогиба разница между ними растет.

§ 6. Ударное взаимодействие мягкой оболочки и газа

Как уже указывалось, изучение нестационарных задач взаимодействия сред с учетом нелинейностей всех трех видов аналитическими методами представляется невозможным или неэффективным. Решение их может быть получено с помощью конечно-разностного метода интегрирования. При этом выполнение условий контакта облегчается выбором лагранжевой системы координат, одна из координатных поверхностей все время совпадает с контактной поверхностью. Этот метод хорошо работает до тех пор, пока ячейки конечно-разностной сетки не сильно искажаются. В дальнейшем, при значительных искажениях, необходимо перестраивать сетку или переходить к другим методам.

Рис. 7.15. Удар оболочки по жесткой поверхности

Литература по задачам взаимодействия, решаемым численными методами, также небольшая. В этом параграфе мы дадим изложение решения двух сложных задач нестационарного взаимодействия, где наиболее полно учтены нелинейные факторы. Метод основан на результатах работы [9].

1. *Соударение мягкой сферической оболочки, заполненной газом, с твердой поверхностью* [1]. Задается скорость точек сферы, направленная перпендикулярно абсолютно жесткой поверхности, в момент соударения с ней. Схема показана на рис. 7.15.

При решении задачи привлекаются уравнения газовой динамики (4.15) гл. 1, где скорость сетки полагается равной скорости движения частиц газа. Произвольные перемещения и деформации оболочки из резиноподобного материала описываются уравнениями, представляющими собой обобщение приведенных в § 3 гл. 1 соотношений. Они приведены в § 5 следующей главы.

В узлах сетки определяются координаты и скорости газа и оболочки, в ячейках — значения плотности, давления, энергии, напряжений и деформаций.

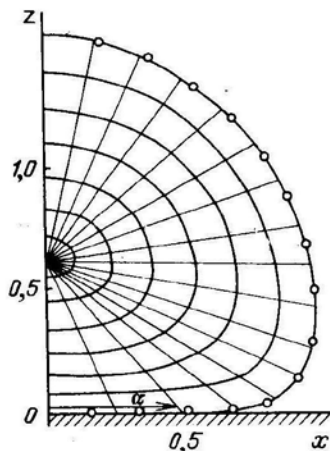
Кроме рассмотренных в предыдущих параграфах условий на контактных поверхностях ставится условие равенства нулю скорости на жесткой поверхности соударения, причем область касания определяется из решения.

Требуемый шаг по времени Δt_s при интегрировании уравнений оболочки обычно меньше, чем шаг Δt для уравнений газовой динамики. В расчетах принималось $\Delta t_s/\Delta t = 0,1$.

По мере проседания оболочки после соприкосновения с поверхностью давление внутри полости возрастает. То же самое можно сказать о напряжениях в оболочке, за исключением зоны контакта с поверхностью. Процесс торможения и обратного движения системы наглядно виден из рис. 7.16. Здесь показаны распределения безразмерной вертикальной компоненты v_z скорости вдоль лагранжевой координаты α в различные моменты безразмерного времени t .

До момента $t = 11,9$ система движется вниз, затем она останавливается, скорости меняют знак и при $t = 21,8$ происходит отрыв от поверхности. К этому времени внутренние усилия в оболочке выравниваются, приближаясь к среднему статическому уровню под заданным перепадом давлений.

На рис. 7.17 представлено распределение давления на жесткой поверхности (в зоне контакта) в различные моменты времени. Сразу после начала соударения давление возрастает, причем оно больше в центре, к краям



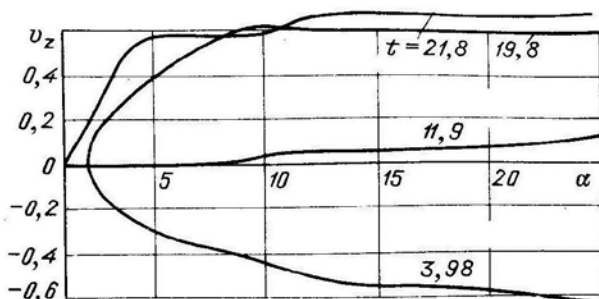


Рис. 7.16. Изменение вертикальной скорости точек оболочки

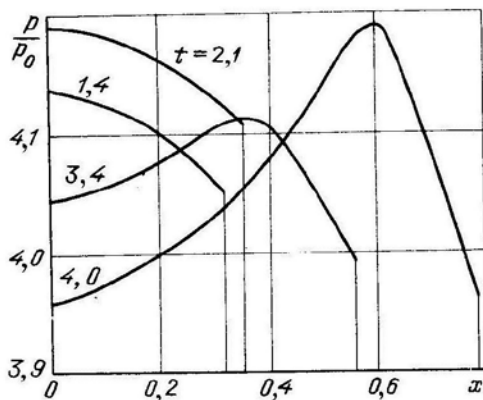


Рис. 7.17. Эпюра давления на жесткой поверхности

зоны монотонно спадает. К моменту $t = 2.5$ распределение меняется; максимум давления начинает перемещаться к краям зоны, причем сама зона расширяется.

Отметим, что на рис. 7.15 даны расчетная форма системы и конечно-разностная сетка ($t > 0$). Здесь видно взаимное скольжение разностных лагранжевых сеток газа и оболочки. Узлы в двух средах смещаются относительно друг друга более чем на одну ячейку.

2. *Нестационарное взаимодействие эластичной трубы и газа* [8]. Рассматривается движение газа в круглой трубе, которая состоит из жестких участков, соединенных упругим рукавом. В стационарном режиме внешнее давление удерживает деформируемую часть трубы в виде кругового цилиндра того же радиуса, что и жесткой части.

В начальный момент времени равновесие системы нарушается резким изменением внешнего давления либо перепадом давления в движущемся в трубе газе.

Так же как в предыдущей задаче, движение газа описывается с помощью уравнений (4.15) гл. 1 в лагранжевой форме ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$). Деформа-

ции оболочки могут быть большими. Для их описания применяются уравнения для несжимаемого тела при произвольных перемещениях и деформациях. Выполняются условия на поверхности контакта с учетом взаимного смещения сред.

Конечно-разностным методом, указанным выше, получены результаты по изменению полей скоростей и давлений в газе, а также полей деформаций и напряжений в трубе.

В заключение параграфа укажем, что при численном интегрировании уравнений движения сред и контактных условий не требуется переходить от исходной формулировки условий (2.7)–(2.9) гл. 5 к приближенным уравнениям типа (3.5), (3.6) и т.д. гл. 5. Необходимость в таком переходе отпадает в силу того, что картина движения и взаимодействия сред определяется на каждом временном шаге.

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЭЙЛЕРОВО-ЛАГРАНЖЕВ СПОСОБ

В этом способе описания взаимодействия движение жидкости изучается в подвижных координатах, а оболочки — по-прежнему в координатах Лагранжа. Как следует из гл. 1, при этом соответствующие уравнения для жидкости значительно усложняются. Поэтому основной областью приложения произвольного эйлерово-лагранжевого способа являются сложные задачи с большим изменением формы оболочки и области течения, при решении которых используются численные методы. Это же утверждение справедливо и для расчета течений в неизменных границах, но со сложной структурой (ударные волны и т.д.). Отметим, что в исходной литературе данный метод называется произвольным лагранжево-эйлеровым [5, 11, 13].

В данной главе мы ограничиваемся рассмотрением простых методических примеров, решаемых приближенно аналитическими методами, а также изложением результатов некоторых задач, полученных численными методами.

§ 1. Постановка задачи взаимодействия

Как указывалось в § 2 гл. 1, произвольный эйлерово-лагранжев способ описания взаимодействия позволяет проще записать условия на контактной поверхности. Будем считать, что в области, занятой жидкостью, подвижная система криволинейных координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ совпадает на поверхности контакта с лагранжевой системой координат, нанесенной на срединной поверхности оболочки, толщиной стенки которой при записи условий контакта пренебрегаем. Следовательно, $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2$ при $\beta_3 = 0$.

Поэтому в случае сжимаемой идеальной жидкости кинематическое условие на проницаемой поверхности $\beta_3 = 0$ в соответствии с (5.4) гл. 1 приобретает вид

$$\begin{aligned} & p(\alpha_1, \alpha_2, t) [v(\alpha_1, \alpha_2, t) - \partial u(\alpha_1, \alpha_2, t)/\partial t] k_3^*(\alpha_1, \alpha_2, t) = \\ & = p'(\alpha_1, \alpha_2, t) [v'(\alpha_1, \alpha_2, t) - \partial u(\alpha_1, \alpha_2, t)/\partial t] k_3^*(\alpha_1, \alpha_2, t). \quad (m) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Силы, действующие на оболочку, равны [(5.5) гл. 1]

$$\begin{aligned} Z = & [p(\alpha_1, \alpha_2, t) - p'(\alpha_1, \alpha_2, t)] k_3^*(\alpha_1, \alpha_2, t) + \\ & + p(\alpha_1, \alpha_2, t) [v(\alpha_1, \alpha_2, t) - v'(\alpha_1, \alpha_2, t)] [v(\alpha_1, \alpha_2, t) - \\ & - \partial u(\alpha_1, \alpha_2, t)/\partial t] k_3^*(\alpha_1, \alpha_2, t). \quad (m) \end{aligned} \quad (1.2)$$

В областях, занятых жидкостью ($\beta_3 \neq 0$), параметры ρ , ρ' , v , v' , p , p' являются функциями $\beta_1, \beta_2, \beta_3, t$.

Условия (1.1), (1.2) в проекциях на направления ортов исходного состояния k_1, k_2, k_3 и ортов в текущий момент k_1^*, k_2^*, k_3^* имеют вид (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) из гл. 4. Но теперь они ставятся не в точке M^* (рис. 4.1) с неизвестными эйлеровыми координатами, а в точке m с известными координатами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3 = \beta_3^0$ (если отсчет вести с поверхности оболочки, то $\beta_3^0 = 0$).

Физические уравнения проницаемости (2.2) гл. 4 сохраняют свой вид и также ставятся в точке m . В них параметры p, p', V_3^* являются функциями координат $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3 = \beta_3^0$.

В случае непроницаемой поверхности ($V_3^* = 0$) из (1.1), (1.2) получаем следующие кинематические и динамические условия:

$$v(\alpha_1, \alpha_2, t) \cdot k_3^*(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{\partial u(\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} \cdot k_3^*(\alpha_1, \alpha_2, t),$$

$$Z = p(\alpha_1, \alpha_2, t) \cdot k_3^*(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad (m) \quad (1.3)$$

где под p подразумевается перепад давления.

Проекции (1.3) на направления ортов k_1, k_2, k_3 исходного состояния контактной поверхности получаем с использованием связи (1.1) гл. 2. Таким образом, кинематическое и динамические условия приобретают вид

$$(v_1 - \partial u_1 / \partial t) E_1 + (v_2 - \partial u_2 / \partial t) E_2 + (v_3 - \partial u_3 / \partial t) E_3 = 0, \quad (m) \quad (1.4)$$

$$Z_m = p E_m.$$

Они совпадают по форме с (1.7) и (1.11) гл. 2, но ставятся в точке m на поверхности $\beta_3 = 0$. Проекции уравнений (1.3) по ортам k_1^*, k_2^*, k_3^* в текущий момент совпадают по форме с (1.8) и (1.10) гл. 2. Выражения для E_1, E_2, E_3 даны в (3.4) гл. 1.

В случае вязкой жидкости и непроницаемой поверхности кинематическое и динамические условия полностью совпадают с соответствующими условиями в едином лагранжевом способе (4.16)–(4.18) гл. 6. Это является следствием того, что здесь естественным образом учитывается отсутствие проскальзывания сред. Итак, они имеют вид

$$v(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{\partial u(\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t}$$

$$Z = p_{k_3^*}(\alpha_1, \alpha_2, t). \quad (m) \quad (1.5)$$

Приведенные условия совместно с уравнениями движения оболочки и жидкости представляют собой математическую формулировку задачи гидроупругости в произвольном эйлерово-лагранжевом способе описания взаимодействия. Здесь нет необходимости сводить контактные условия на недеформированную поверхность, как это делается в других случаях. Следовательно, не происходит их чрезмерного усложнения. Отметим, что в саму постановку задачи при этом не вносятся какие-либо приближения ради ее упрощения, как это имеет место в совместном эйлерово-лагранже-

вом и в едином лагранжевом способах. В них, как известно из предыдущих глав, приближенно представляются контактные условия. Исключения составляют отдельные частные случаи, когда они точны (например, отсутствие взаимного скольжения сред).

§ 2. Сравнение решений задачи, сформулированной двумя способами

С целью демонстрации особенностей постановки задачи и ее решения в произвольном эйлерово-лагранжевом способе и сравнения с совместным эйлерово-лагранжевым способом рассмотрим колебания несжимаемой идеальной жидкости между двумя твердыми стенками. Для максимально-го упрощения задачи примем, что жидкость неограниченной глубины и на ее поверхности задается закон вертикального перемещения "поршня" (рис. 1.5)

$$u_1 = 0, \quad u_3 = w = W \cos \lambda x \cos \omega t \quad (\lambda = \pi/L). \quad (2.1)$$

Уравнения движения жидкости в этой задаче в обоих способах описания приведены в § 2 гл. 1. Обозначим $x_1 = x$, $x_2 = z$, $\beta_2 = \beta$, $z = \beta + w$. Координата $\beta_1 = x$ в силу $u_1 = 0$. Согласно (2.9) главы 1 имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \beta} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = 0. \quad (2.2)$$

Кинематическое условие получаем из (1.4). Входящие в него значения E_i из (3.4), (3.3) гл. 1 в рассматриваемом случае равны

$$E_1 = -\omega_1, \quad E_3 = 1 + e_{11}, \quad \omega_1 = \partial w / \partial x, \quad e_{11} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\beta = 0). \quad (2.3)$$

Так как задан закон движения поверхности, то динамическое условие на $\beta = 0$ не привлекается. При $z \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow \infty$) решение должно затухать.

В приближенном решении задачи (2.2), (2.3) примем

$$\varphi = \Phi_1(\beta) \cos \lambda x \sin \omega t + \Phi_2(\beta) \cos 2\lambda x \sin 2\omega t. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.2) и приравнявая нулю сумму членов при тригонометрических функциях одинаковых аргументов, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_1}{d\beta^2} - \frac{4\lambda^2}{4 + \lambda^2 W^2} \Phi_1 - \frac{3\lambda^2 W}{4 + \lambda^2 W^2} \frac{d\Phi_2}{d\beta} &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi_2}{d\beta^2} - \frac{16\lambda^2}{4 + \lambda^2 W^2} \Phi_2 + \frac{3\lambda^2 W}{4 + \lambda^2 W^2} \frac{d\Phi_1}{d\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Частные решения их, затухающие при $\beta \rightarrow \infty$, имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= Fe^{-r\beta} + Ge^{-s\beta}, \\ \Phi_2 &= \frac{7\lambda W}{12} Fe^{-r\beta} - \frac{2}{\lambda W} \left(1 + \frac{7}{64} \lambda^2 W^2\right) Ge^{-s\beta}, \\ r &= \lambda(1 - \lambda^2 W^2/4), \quad s = 2\lambda(1 + \lambda^2 W^2/64).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Здесь отброшены величины порядка $(\lambda W)^4$ по сравнению с единицей (величины порядка $(\lambda W)^3$ отсутствуют); они не будут учитываться и в дальнейшем. Это является ограничением на амплитуду перемещения поверхности в настоящем решении. Так как $\lambda = \pi/L$, то необходимо $(W/L)^4 \ll \pi^{-4}$ или $(W/L)^4 \ll 10^{-2}$. Поэтому отношение амплитуды колебаний "поршня" к ширине полосы не должно превышать 1/5.

Коэффициенты F, G определяем из условия (2.3). Подставляя в него выражения (2.1), (2.4), (2.5) и снова приравнявая нулю суммы членов при тригонометрических функциях одинаковых аргументов, находим

$$\begin{aligned}F &= \frac{W\omega}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{8} \lambda^2 W^2\right), \\ G &= \frac{\lambda W^3 \omega}{12} \left(1 - \frac{5}{16} \lambda^2 W^2\right).\end{aligned}$$

Здесь последний член в составе G должен быть отброшен в силу указанного выше ограничения на значение амплитуды.

Потенциал скорости (2.4) приобретает вид

$$\begin{aligned}\varphi &= (Fe^{-r\beta} + Ge^{-s\beta}) \cos \lambda x \sin \omega t + \\ &+ \left[\frac{7}{12} \lambda W Fe^{-r\beta} - \frac{2}{\lambda W} \left(1 + \frac{7}{64} \lambda^2 W^2\right) Ge^{-s\beta} \right] \cos 2\lambda x \sin 2\omega t.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что все нелинейные поправки в решении входят в виде $(\lambda W)^2$.

Легко определить, например, динамическую реакцию жидкости на заданное движение (2.1) "поршня" на поверхности. Для этого необходимо воспользоваться выражением для давления (2.9) гл. 1

$$\begin{aligned}Z = p = -\rho_0 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (2.7)$$

Входящие сюда производные от φ нужно вычислить при $\beta = 0$.

Сформулируем теперь задачу, пользуясь совместным эйлерово-лагранжевым способом. Закон движения (2.1) остается без изменения. Вместо

(2.2) и (2.3) будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) - w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{w^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} = 0 \quad (z = 0). \quad (2.9)$$

При записи условия (2.9) учтены члены с w^2 , так как в вышеприведенном решении поправки имеют такой порядок. Отметим, что (2.9) получается из (2.6)–(2.9) гл. 2. Еще проще оно может быть получено из (6.1) гл. 3, где необходимо положить $\partial/\partial r \rightarrow \partial/\partial z$, $r^{-1} \partial/\partial \theta = \partial/\partial x$, $r \rightarrow \infty$, $v = 0$.

В нашем приближенном решении выражение для $\varphi(x, z, t)$ принимается также в виде (2.4), где $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ — функции от эйлеровой координаты z . Тогда решение уравнения (2.8), удовлетворяющее условию затухания при $z \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\varphi = F e^{-\lambda z} \cos \lambda x \sin \omega t + G e^{-2\lambda z} \cos 2\lambda x \sin 2\omega t. \quad (2.10)$$

Из (2.9), (2.1), (2.10) получаем следующие значения коэффициентов:

$$F = \frac{W\omega}{\lambda} \left(1 + \frac{3}{32} \lambda^2 W^2 \right), \quad G = \frac{W^2 \omega}{4} \left(1 - \frac{13}{32} \lambda^2 W^2 \right). \quad (2.11)$$

Последний член в составе G должен быть отброшен.

Для определения реакции жидкости на движение (2.1) "поршня" вместо (2.7) теперь имеем $Z = p$ ($z = w$) или

$$Z = p + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{w^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (z = 0),$$

где давление

$$p = -\rho_0 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Так как согласно (2.10), (2.11) главный член в составе φ имеет порядок $W\omega/\lambda$, то для сохранения в составе Z величин вплоть до $(\lambda W)^2$ по сравнению с единицей нужно записать

$$Z = -\rho_0 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + w \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + \frac{w^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial z^2} \right] \quad (z = 0) \quad (2.12)$$

и производные от φ вычислять при $z = 0$. При этом возникающие в составе Z в силу структуры формул (2.11) члены с λW в более высоких степенях должны быть отброшены.

Таким образом, мы одну и ту же задачу сформулировали в терминах двух способов описания взаимодействия и получили приближенное решение. Формулировка задачи (2.2), (2.3), (2.7) является точной в том смысле, что не сделано никаких допущений о малости колебаний жидкости. Однако такое допущение сделано при интегрировании уравнений (2.2), (2.3).

В формулировке (2.8), (2.9), (2.12) ограничение на значение функции w накладывается с самого начала. Решение получено также для относительно малых w . Необходимо отметить, что при больших значениях колебаний поверхности процедура приведения контактных условий на начальную поверхность в совместном эйлерово-лагранжевом способе может быть несходящейся. Более подробно об этом сказано во второй главе. В целом объем вычислений в задаче (2.8), (2.9), (2.12) несколько меньше, чем в первом случае, из-за простоты получения решения уравнения (2.8).

§ 3. Движение вязкой жидкости, вызванное бегущей волной в пластине

В гл. 5 рассматривались задачи взаимодействия между вязкой жидкостью и пластиной (цилиндром), когда в последней при помощи определенных сил внутри твердого деформируемого тела возбуждаются бегущие волны изгибного типа. Предполагалось, что число Рейнольдса мало по сравнению с единицей. При этом применялся совместный эйлерово-лагранжев метод. В данном параграфе рассматривается задача, аналогичная той, которая приводится в § 1 гл. 5. Здесь считается, что число Рейнольдса велико. Оно определяется как $Re = cL\rho/(\pi\mu_0)$, где c, L — фазовая скорость и длина распространяющейся по пластине волны, μ_0 — вязкость жидкости. При больших значениях Re вязкость сказывается только в тонком слое вблизи поверхности пластины. В предположении, что толщина этого пограничного слоя меньше, чем амплитуда перемещения пластины, задача рассматривалась в статье [14].

Закон изгибной деформации пластины задается в том же виде (1.7) из гл. 5. Введем безразмерную длину, скорость и время, относя их к параметрам волны $L/2\pi$, c и $L/2\pi c$. Прямоугольная система координат x, z , движущаяся со скоростью волны c вдоль пластины (преобразование Галилея), есть

$$x = x_1 - ct, \quad z = x_3,$$

где x_1, x_3 — неподвижная эйлерова система координат. Тогда (1.7) из гл. 5 записывается как

$$u_x = 0, \quad u_z = \epsilon \sin x \quad (\epsilon = 2\pi W/L). \quad (3.1)$$

Криволинейные подвижные неортогональные координаты в жидкости вводятся по формулам

$$\beta_1 = \xi = \int_0^x \sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 x} dx, \quad \beta_3 = \eta = z - \epsilon \sin x. \quad (3.2)$$

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (4.13) из гл. 1, записанные в эйлеровых координатах x_1, x_3 , в системе x, z путем исключения давления могут быть приведены к виду

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} = \text{Re}^{-1} (\nabla \cdot \nabla) \vec{\omega}, \quad \vec{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (3.3)$$

где Re определено выше.

Обозначим через u, v компоненты скорости по направлениям координатных линий ξ, η . Уравнения (3.3) приобретают вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + v \frac{\partial \omega}{\partial \eta} &= \frac{1}{\text{Re}} \sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 x} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 x} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \epsilon \cos x \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 x} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \epsilon \cos x \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 x}} \right) &= 0, \\ \omega &= \sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 x} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u \epsilon \cos x}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \sin^2 x}} + v \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u + \frac{v \epsilon \cos x}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 x}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как задан закон движения поверхности (3.1), то динамические условия являются лишними. Кинематические условия в соответствии с (3.1) и (3.2) таковы:

$$u = -\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 x}, \quad v = -\epsilon \cos x \quad (\eta = 0). \quad (3.5)$$

На бесконечности ($\eta \rightarrow \infty$) ставятся условия ограниченности компонент скорости u, v .

Внешнее течение (вне пограничного слоя толщиной δ) описывается уравнениями (3.4) и условиями при $\eta \rightarrow \infty$ в исходных переменных (u, v, ω, ξ, η), в то время как внутреннее течение (внутри пограничного слоя) — уравнениями (3.4) и условиями (3.5) в терминах внутренних переменных $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\omega}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$, определяемых как $\tilde{\eta} = \eta/\delta$, $\tilde{\xi} = \xi$, $\tilde{u} = u$, $\tilde{v} = v/\delta$, $\tilde{\omega} = \omega/\delta$.

Рассматривается случай, когда толщина пограничного слоя порядка квадрата относительной амплитуды изгибной волны $\delta = O(\epsilon^2)$, где $\text{Re} = O(\delta^{-2}) = O(\epsilon^{-4})$. переменные $(u, \tilde{u}), (v, \tilde{v}), (\omega, \tilde{\omega})$ могут быть представлены в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} (u, \tilde{u}) &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n (u_n, \tilde{u}_n), \quad (v, \tilde{v}) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n (v_n, \tilde{v}_n), \\ (\omega, \tilde{\omega}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n (\omega_n, \tilde{\omega}_n), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где присутствие -1 обусловлено введением движущейся вместе с волной системы координат.

При подстановке (3.6) в (3.4) и учете приведенных выше порядков δ и Re члены при коэффициенте ϵ образуют систему уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0, \quad \omega_1 = \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \sin \xi, \\ -\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial \tilde{\xi}} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_1}{\partial \tilde{\eta}^2}, \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{\eta}} = 0, \quad \tilde{\omega}_1 = -\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{\eta}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Аналогично, при ϵ^2 следуют уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta} - \sin \xi \cos \xi = 0, \\ \omega_2 = \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_2}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) \cos \xi - u_1 \sin \xi, \\ -\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial \tilde{\xi}} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial \tilde{\xi}} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial \tilde{\eta}} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_2}{\partial \tilde{\eta}^2}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \tilde{\eta}} - \sin \tilde{\xi} \cos \tilde{\xi} = 0, \quad \tilde{\omega}_2 = -\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{\eta}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Очевидно, необходимо сопрягать решения во внешней и внутренней областях. Для этого используется следующий прием ($\tilde{\eta}$ фиксировано):

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^N} \left(\sum_{n=1}^N \epsilon^n u_n - \sum_{n=1}^N \epsilon^n \tilde{u}_n \right) = 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^N} \left(\sum_{n=1}^N \epsilon^n v_n - \epsilon^2 \sum_{n=1}^N \epsilon^n \tilde{v}_n \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Решение изложенной задачи [14] показывает, что имеются переменные части компонент скорости и часть, не зависящая от координат и времени. В данном случае нас интересует, так же как в гл. 5, именно постоянная составляющая u_s скорости. Она равна $u_s = -1 + \epsilon^2/4 + O(\epsilon^3)$, где -1 появляется из-за использования преобразования Галилея. Относительно неподвижной системы координат и в обозначениях § 1 гл. 5 постоянная часть размерной скорости вдоль пластины равна

$$V_0 = c(\pi W/L)^2, \quad (3.10)$$

что в два раза меньше, чем значение скорости (1.14) из гл. 5, полученное для малых по сравнению с единицей чисел Рейнольдса.

Если толщина пограничного слоя порядка относительной амплитуды волны $\delta = O(\epsilon)$, когда $Re = O(\delta^{-2}) = O(\epsilon^{-2})$, то также используя разложения (3.6), можно получить уравнения (3.7) и (2.8). Изменение состоит лишь в том, что вместо последнего уравнения (3.8) имеет место

$$\tilde{\omega}_2 = -\partial \tilde{u}_2 / \partial \tilde{\eta} + \sin \tilde{\xi}.$$

Перед последним членом второго соотношения (3.9) вместо ϵ^2 будет ϵ в первой степени.

Решение этой задачи также дает $u_s = -1 + \epsilon^2/4 + O(\epsilon^3)$, т.е. приближенное значение (3.10).

§ 4. Жесткие подвижные препятствия в потоке газа

Как указывалось ранее, применение произвольного эйлерово-лагранжевого способа оправдано в сложных задачах, в частности, при больших перемещениях оболочки и, соответственно, большом изменении поля течения. Решение их может быть получено лишь с помощью численных методов.

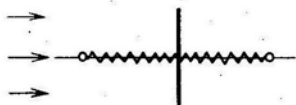
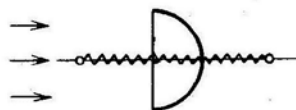


Рис. 8.1. Диск и чаша, закрепленные на пружине, в потоке газа



И в этом направлении достигнуты основные успехи применения данного способа. В этом и последующих параграфах приводятся постановки некоторых задач взаимодействия и результаты их решения. При этом мы следуем работам [1, 2, 4–6].

Начнем с рассмотрения задачи, где упругая часть максимально упрощена, а именно, сведена к безмассовой линейно деформирующейся одномерной пружине. На ней закреплены тонкий диск или тонкое тело вращения (рис. 8.1). Под действием потока газа препятствие может перемещаться только вдоль пружины вследствие ее деформации. Предполагаем, что пружина закреплена по концам в неподвижных точках пространства и не оказывает влияния на поток. Выяснение особенностей решения этой задачи полезно при рассмотрении более сложных вопросов.

В равномерный поток в момент времени $t = 0$ мгновенно вводится указанная конструкция и в дальнейшем происходит взаимодействие с потоком. Другая трактовка этого начального условия состоит в том, что движущийся вместе с потоком диск или чаша с пружиной при $t = 0$ мгновенно останавливается. Здесь не принимаются во внимание инерционные силы, обусловленные этой остановкой или появлением конструкции.

Газ считается идеальным и подчиняется уравнению состояния

$$p = (\gamma - 1) \rho i, \quad (4.1)$$

где i — удельная внутренняя энергия. Используются уравнения в деформируемых координатах (4.15) гл. 1. Они аппроксимируются разностными соотношениями. Основным требованием к деформирующейся коор-

динатной системе, как указывалось ранее, является совпадение одной из координатных линий с подвижным препятствием и слежение за ним во все время движения.

В основе алгоритма интегрирования лежит организация вычислений по временным шагам. Детальное изложение численной процедуры содержится в работах [5, 11, 13]. Укажем лишь, что совокупность вычислений, которая переводит все переменные с одного временного слоя на следующий, разделена на три этапа.

Первый состоит из явных чисто лагранжевых расчетов. Здесь скорость v_0 подвижной системы координат совпадает со скоростью среды v , поэтому конвективные члены в уравнениях (4.15) гл. 1 обращаются в нули. Шаг интегрирования больше, чем диктуемый условиями устойчивости явных схем. Поэтому для обеспечения устойчивости счета используется второй этап, в котором проводятся неявные вычисления и определяются поля скоростей, давлений и плотностей, удовлетворяющих с требуемой точностью уравнениям сохранения массы и количества движения. Узлы разностной сетки передвигаются на третьем этапе, где выполняются все необходимые преобразования для относительного перемещения координатной сетки и газа.

В общем случае для построения сетки, согласованной с формой деформирующегося препятствия, приходится разбивать расчетную область на подобласти несложной геометрии, где можно использовать простые алгоритмы.

В данном случае движение препятствия на пружине описывается уравнением

$$m\ddot{z} = Z + R, \quad (4.2)$$

где m — масса препятствия, Z, R — газодинамическая сила и реакция пружины. Имеем

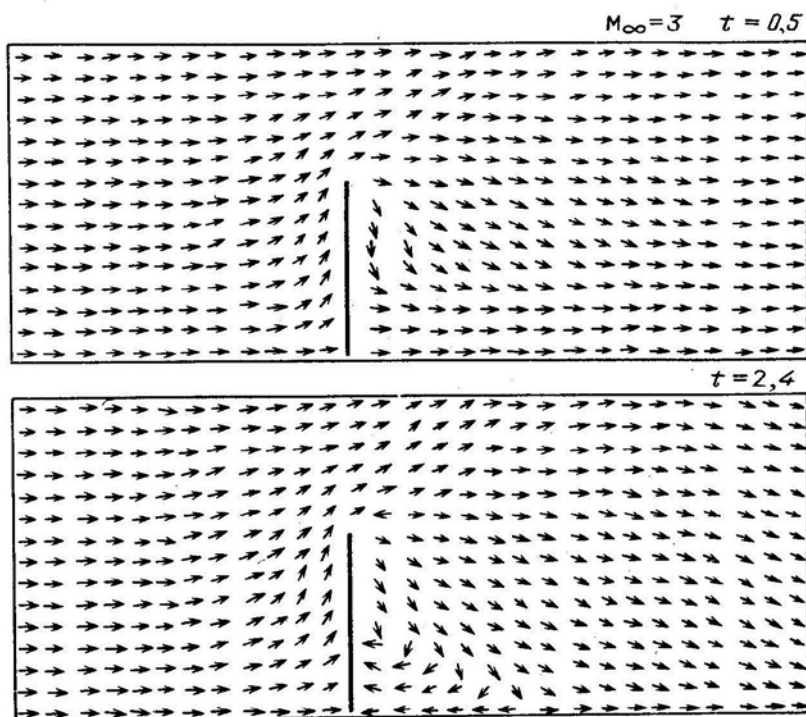
$$Z = \int_S (p - p') dS, \quad R = -k(z - z_0). \quad (4.3)$$

Здесь $p - p'$ — перепад давления, S — площадь диска, k — жесткость пружины, z_0 — начальное положение диска на оси z .

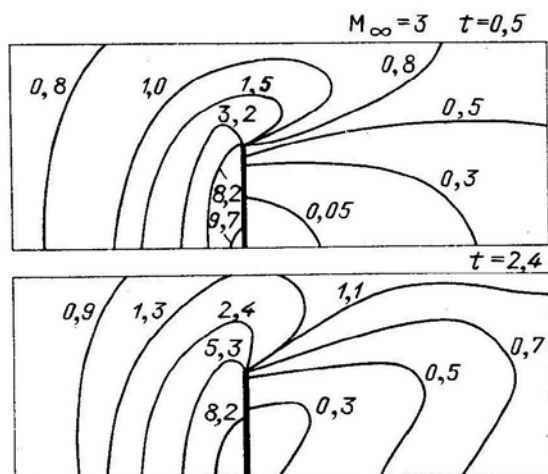
Первой задачей является поперечное обтекание тонкого абсолютно жесткого диска, который остается неподвижным после его мгновенной остановки ($k \rightarrow \infty$). В силу этого координатная сетка превращается в неподвижную эйлерову сетку. Определяющими размерными параметрами приняты радиус диска $R_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ м, плотность и скорость звука в невозмущенном потоке $\rho_\infty = 1,29$ кг/м³; $a_\infty = 340$ м/с. Коэффициент γ принят равным 1,4. Давление p , время t отнесены соответственно к величинам $\rho_\infty a_\infty^2$, R_0/a_∞ .

Картины сверхзвукового ($M_\infty = v_\infty/a_\infty = 3$) обтекания диска показаны на рис. 8.2. Указаны направления векторов скорости, но не их модули. На рис. 8.3 показаны линии равных давлений для различных моментов времени. Ось диска совпадает с нижней границей рисунка.

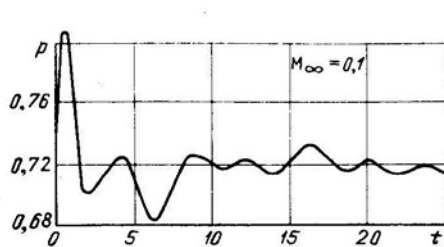
В результате торможения потока перед препятствием происходит интенсивное сжатие газа, формируется головная ударная волна. Она от-



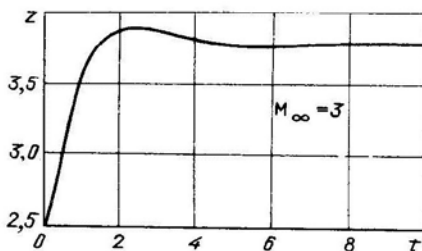
Р и с. 8.2. Нестационарное поле скоростей вокруг неподвижного диска



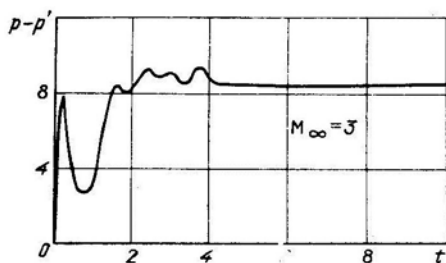
Р и с. 8.3. Нестационарное поле давлений вокруг неподвижного диска



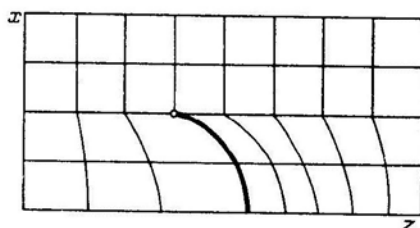
Р и с. 8.4. Изменение давления в центре неподвижного диска



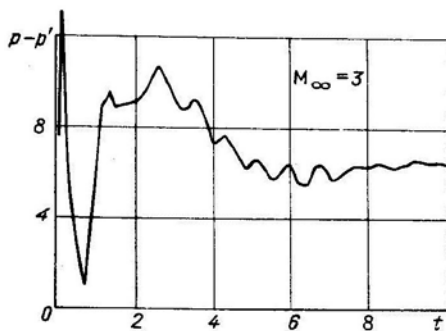
Р и с. 8.5. Перемещение диска под действием сил со стороны потока газа и пружины



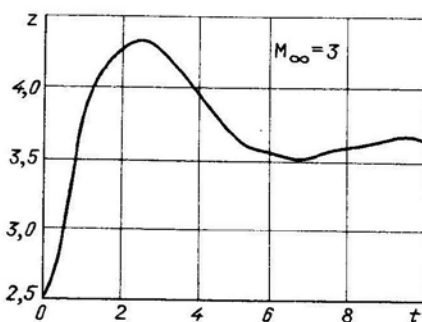
Р и с. 8.6. Перепад давления на подвижном диске



Р и с. 8.7. Чаша, закрепленная на пружине, в потоке газа и подвижная координатная сетка



Р и с. 8.8. Перепад давления в центре чаши



Р и с. 8.9. Перемещение чаши под действием сил со стороны потока газа и пружины

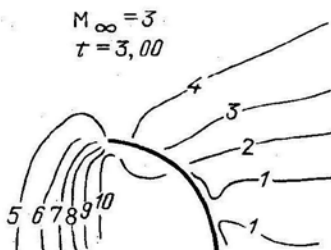
ходит от диска и с определенного момента времени фиксируется в пространстве. За препятствием образуется зона разрежения, где устанавливается циркуляционное течение.

На рис. 8.4 представлено изменение во времени давления в центре диска со стороны набегающего дозвукового потока с числом Маха $M_\infty = 0,1$. Как видно, на начальной стадии нестационарного обтекания ($t \leq 0,7$) давление резко возрастает, затем происходит его снижение и колебания около некоторого положения. Это стационарное значение совпадает с давлением при полном торможении

$$p_0 = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

что получается из (4.11) гл. 1 при $\partial\varphi/\partial t = 0$, $\nabla\varphi = 0$ и отнесении к величине $\rho_\infty a_\infty^2$. Оно равно $p_0 = 0,719$.

При решении задачи с конечным значением жесткости пружины принято $k = 5\pi$, $m = \pi$, $M_\infty = 3$. На рис. 8.5 и 8.6 показаны перемещение диска и перепад давления в центральной точке. На начальном этапе диск перемещается в основном за счет действия сил со стороны потока. Из-за мгновенного внесения конструкции в поток давление перед диском резко возрастает, что ведет к ускоренному движению препятствия. Из-за малой инерции диск практически сразу выходит на положение равновесия. Переходный процесс в основном заканчивается ко времени $t = 2$, а при $t = 4,5$



Р и с. 8.10. Поле давления вокруг чаши

диск полностью останавливается. В дальнейшем картина обтекания совпадает с тем, что получено при $k \rightarrow \infty$.

В том случае, когда препятствие представляет собой часть сферы (рис. 8.7), направленной вогнутостью в сторону набегающего потока, качественный характер движения на начальном этапе практически совпадает со случаем диска (данные те же, что для диска). После $t \approx 0,3$ начинает сказываться различие в геометрии. Максимальное значение перепада давления в центре чаши примерно в 1,6 раза превышает значение его на диске (рис. 8.8); в целом степень сжатия газа в ее полости больше. Это приводит к тому, что препятствие отклоняется сильнее (рис. 8.9). К моменту $t = 2,3$, когда чаша под действием пружины начинает двигаться против потока, перед ней формируется почти устойчивая зона сжатого

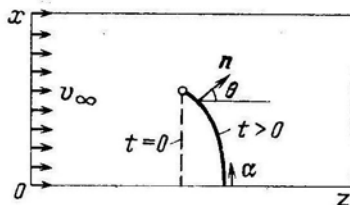
газа, что видно на рис. 8.10 для изолиний плотности. В установившемся состоянии чаша вместе с поджатым газом в полости образует "тело", сопротивление которого меньше, чем у диска.

Таким образом, основное различие процесса нестационарного взаимодействия со сверхзвуковым потоком газа по интегральным характеристикам состоит в том, что в переходный период чаша, обращенная против потока, испытывает большие, а при установлении процесса — меньшие нагрузки, чем диск того же диаметра.

§ 5. Взаимодействие упругой мембраны и потока газа

Рассматривается осесимметричная задача о взаимодействии тонкой упругой мембраны с равномерным потоком газа в области с неограниченно

Рис. 8.11. Круглая мембрана, закрепленная по кромке к жесткому кольцу, в потоке газа



протяженными границами (рис. 8.11). В недеформированном состоянии мембрана имеет форму плоского круга, закреплена по кромке к абсолютно жесткому кольцу и расположена перпендикулярно к направлению невозмущенного потока и движется вместе с ним со скоростью v_∞ . В момент времени $t = 0$ мембрана и кольцо останавливаются. В дальнейшем под действием набегающего потока мембрана раздувается. Однако не учитываются инерционные силы, возникающие в мембране в результате этой резкой остановки. Учитываются силы в мембране и жидкости, так же как силы взаимодействия между ними, после времени $t = 0$. Таким образом, задача рассматривается в той же постановке, что в предыдущем параграфе. Газ считается идеальным, материал мембраны изотропным, несжимаемым и идеально упругим, допускающим большие деформации.

Для описания движения газа используются уравнения в деформируемых координатах (4.15) гл. 1. Уравнение состояния газа принимается в виде (4.1).

В соотношениях, описывающих деформацию мембраны, допускается возможность больших перемещений и удлинений. В этом смысле они являются более общими, чем приведенные в § 3. гл. 1. Уравнения осесимметричного движения тонкой мембраны имеют вид [3]

$$\mu_s^0 \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} = \frac{1}{x_s} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 x_s \cos \theta) - N_2 \right] + Z \sin \theta, \quad (5.1)$$

$$\mu_s^0 \frac{\partial^2 z_s}{\partial t^2} = - \frac{1}{x_s} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 x_s \sin \theta) + Z \cos \theta. \quad (5.2)$$

Здесь x_s, z_s — прямоугольные эйлеровы координаты точек мембраны, α — сопутствующая лагранжева координата, отсчитываемая от центра (рис. 8.11), θ — угол, образованный нормалью к мембране и осью z , μ_s^0 — начальная поверхностная плотность мембраны, N_1, N_2 — усилия в меридиональном и окружном направлениях, $Z = p - p'$ — гидродинамическая нагрузка, p, p' — давления на двух сторонах движущейся мембраны.

Степени удлинения λ_1, λ_2 и изменение толщины определяются соотношениями

$$\lambda_1 = d\alpha/d\alpha^0, \quad \lambda_2 = x_s/x_s^0, \quad \lambda = h/h^0 = 1/(\lambda_1 \lambda_2). \quad (5.3)$$

Последнее из них представляет собой условие несжимаемости материала мембраны. Величины α^0, x_s^0, h^0 относятся к недеформированному состоянию.

Усилия N_1, N_2 связаны с параметрами (5.3) формулами [5, 10]

$$\begin{aligned} N_1 &= h[\lambda_1^2 \Psi_1 + (\lambda^{-2} + \lambda_2^{-2}) \Psi_2 + q], \\ N_2 &= h[\lambda_2^2 \Psi_1 + (\lambda^{-2} + \lambda_1^{-2}) \Psi_2 + q], \end{aligned} \quad (5.4)$$

в которых величина q в случае несжимаемого материала равна

$$q = -\lambda^2 [\Psi_1 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \Psi_2].$$

Коэффициенты Ψ_1, Ψ_2 выражаются через энергию деформации $\tilde{W}$ формулами

$$\Psi_1 = 2\partial\tilde{W}/\partial I_1, \quad \Psi_2 = 2\partial\tilde{W}/\partial I_2,$$

в которых I_1, I_2 представляют собой инварианты тензора деформации

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda^2, \quad I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda^{-2}.$$

Для материала типа резины может быть применена функция $\tilde{W}$, предложенная Муни [7, 12],

$$\tilde{W} = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3),$$

где C_1, C_2 — экспериментальные коэффициенты.

При деформации мягких оболочек возможно появление как зон двухосного, так и одноосного напряженного состояния. Последнее характеризуется образованием складок. В данном решении исключается возможность появления одноосного напряженного состояния, условием чего являются неравенства

$$N_1 > 0, \quad N_2 > 0. \quad (5.5)$$

Внешняя кромка мембраны, закрепленная к жесткому кольцу, остается неподвижной:

$$x_s = R_0, \quad z_s = L. \quad (5.6)$$

Динамические условия уже учтены в уравнениях (5.1), (5.2). Кинематическое условие имеет вид (1.3).

Приведенные уравнения необходимо дополнить начальными условиями. Они будут приведены далее. Сначала изложим результаты, отно-

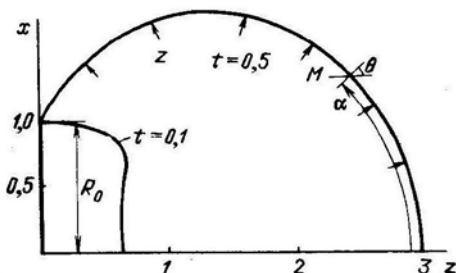


Рис. 8.12. Раздувание мембраны, закрепленной по кромке к жесткому кольцу, под действием равномерного давления

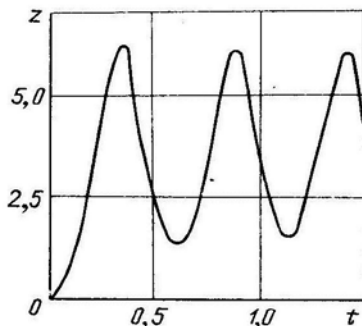


Рис. 8.13. Перемещение центральной точки мембраны под действием равномерного давления

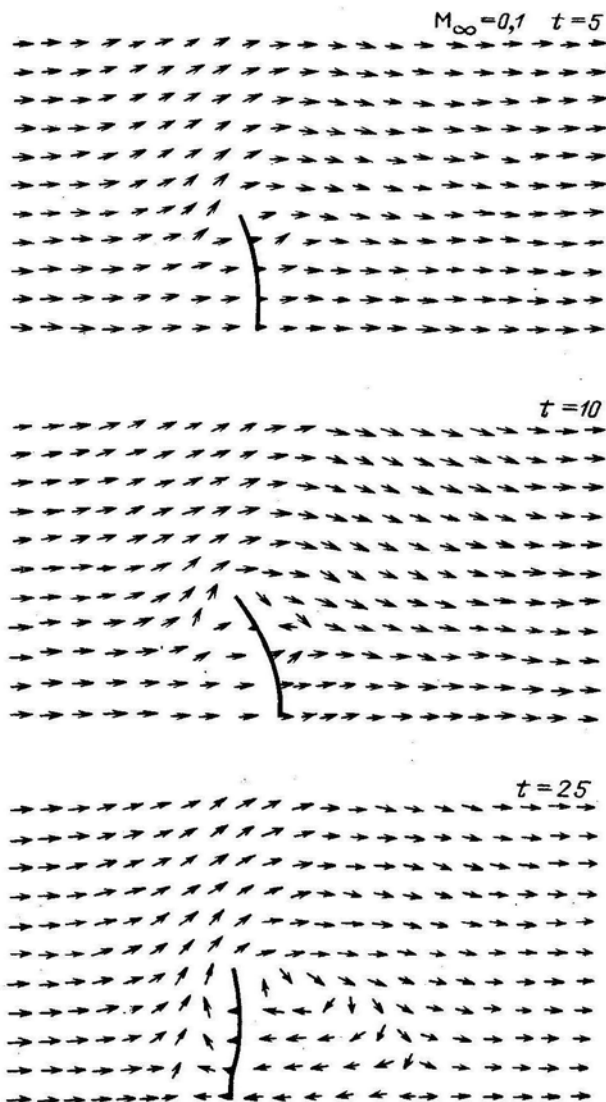
сящие к осесимметричной деформации мембраны при действии заданного перепада давления Z .

Решение задачи (5.1)–(5.6) получено с помощью конечно-разностного метода [4]. Мембрана разбивается на кольцевые элементы с начальными длинами $\Delta\alpha^0$. Величины перемещений (или координаты x_s, z_s) определяются в узловых окружностях, а значения степеней удлинений, усилий, длины дуги, угла наклона нормали к мембране приписываются окружностям, делящим элемент пополам. Таким образом исходная дифференциальная система (5.1)–(5.6) записывается системой конечно-разностных уравнений. Применяется неявная схема. Система нелинейных алгебраических уравнений решается методом Ньютона – Рафсона. Итерации прекращаются после выполнения определенного критерия точности.

Расчеты проведены при следующих данных: $C_1 = 18$, $C_2 = 1,9$, $R_0 = 5,08 \cdot 10^{-2}$ м. Объемная плотность материала равна $\rho_s^0 = \mu_s^0/h^0 = 1,2 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. Перепад давления при $t = 0$ мгновенно возрастает от нуля до значения $Z = 4,76 \cdot 10^3$ Н/м² и далее остается постоянным. На рис. 8.12 приведены формы раздувающейся мембраны в моменты безразмерного времени $t = 0,1$ и $0,5$. На рис. 8.13 показаны перемещения центральной точки ($\alpha = 0$) мембраны в зависимости от времени. Происходят колебания около некоторого раздутого положения. При этом подвергается сильному изменению толщина h . Анализ показывает, что до прогибов центра мембраны порядка $5R_0$ достаточно проводить расчеты с разбиением мембраны на 20 кольцевых элементов.

Переходим к задаче взаимодействия. Подвижная сетка вблизи мембраны имеет компоненты скорости $\partial x_s/\partial t$ и $\partial z_s/\partial t$, а на границах расчетной области – нулевые скорости. Краткие сведения о процедуре расчетов приведены в предыдущем параграфе, а полные в работах [5, 6, 11, 13].

Были приняты данные [6]: $M_\infty = 0,1$; $\gamma = 1,4$; $\rho_\infty = 1$; $i_\infty = 1,79$; $C_1 = 12,1$; $C_2 = 1,3$; $h^0 = 3,94 \cdot 10^{-3}$ м.



Р и с. 8.14. Форма мембраны и поле скоростей вокруг нее

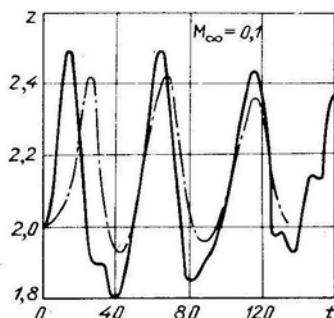


Рис. 8.15. Перемещение центральной точки мембраны под действием потока газа

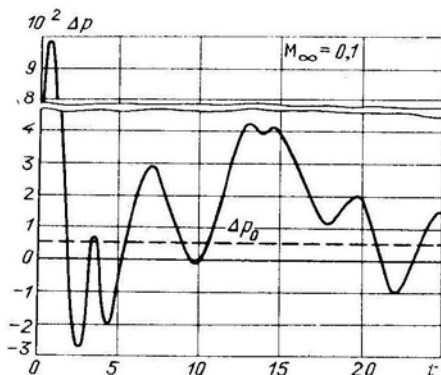


Рис. 8.16. Перепад давления в центре мембраны, находящейся в потоке газа

Представление о характере взаимодействия в течение одного полу-периода колебаний мембраны можно получить из рис. 8.14, где построены направления и величины векторов скорости газа. Там, где скорости малы, указываются только направления. До момента времени $t = 5$ мембрана движется как твердое тело, растяжение возникает только у кромок. Ко времени $t = 10$ мембрана растягивается по всей площади и оказывает значительное сопротивление потоку. Начинается вытеснение газа назад, о чем можно судить по направлениям векторов скорости у кромок. В донной области создается завихрение. Далее под действием упругих сил мембрана начинает обратное движение. Ко времени $t = 25$ часть ее, достигнув начального положения $z = 2$, продолжает по инерции двигаться навстречу потоку.

Движение центральной точки мембраны в зависимости от времени показано на рис. 8.15. Штрихпунктирная линия представляет траекторию той же точки мембраны, когда на нее действует начиная с $t = 0$ постоянный перепад давления, равный давлению торможения набегающего потока $\Delta p_0 = \rho_\infty v_\infty^2 / 2 = 0,005$. Кривые сходны по форме, но в последнем случае максимальный прогиб меньше и достигается позже. Это объясняется тем, что в начале движения Δp_0 намного меньше, чем соответствующий перепад в постановке задачи взаимодействия (рис. 8.16). В промежутке $2 \leq t \leq 5$ давление перед мембраной понижается, так как зона сжатого газа в результате отражения от препятствия перемещается навстречу потоку. В это время движение мембраны замедляется под действием отрицательного перепада давления. В последующем давление перед мембраной повышается, так как скорость невозмущенного потока больше скорости мембраны. К моменту $t = 13$ она останавливается. Далее под действием упругих сил, превышающих перепад давления, мембрана движется навстречу потоку. Частота колебаний равна 0,121 и близка к собственной частоте (0,116) малых колебаний при среднем безразмерном усилии натяжения $N_1 = 0,02$.

§ 6. Моделирование раскрытия купола в потоке

Исследование процесса введения в действие парашюта представляет собой сложнейшую задачу аэроупругости. В полном виде она не решена. Отдельным аспектам проблемы посвящена значительная литература, однако здесь не будем ее касаться. Ниже приведем схематическое изложение о применении произвольного эйлерово-лагранжевого способа в этой задаче и некоторые качественные результаты [1, 2]. Они относятся к случаю круглого в раскрое купола и большого количества строп.

Указанный процесс можно условно разбить на отдельные этапы: вытягивание купола и строп из упаковки; раскрытие, которое включает

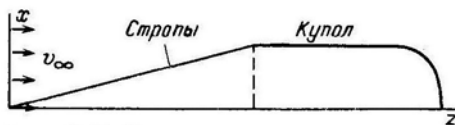


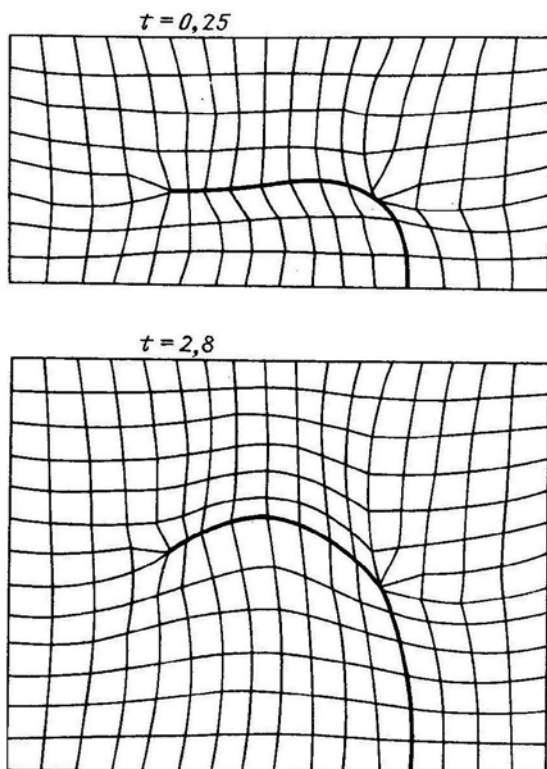
Рис. 8.17. Начальная форма купола и строп

в себя движение с некоторой вытянутой формы и до наполнения купола; автоколебания и установление формы купола и его обтекания. При решении задачи за начальный момент ($t = 0$) принимается начало второго из указанных этапов. Соответствующая форма купола задается в виде выпуклой зоны около полюса и цилиндра в остальной его части; стропы полностью распрямлены (рис. 8.17). В целом, начальные условия задаются неединственным образом, причем от них значительно зависит протекание переходного процесса. Требуется, чтобы установившееся состояние системы не зависело от начальных условий. Предполагается, что такая конструкция мгновенно вносится в равномерный поток неограниченной протяженности.

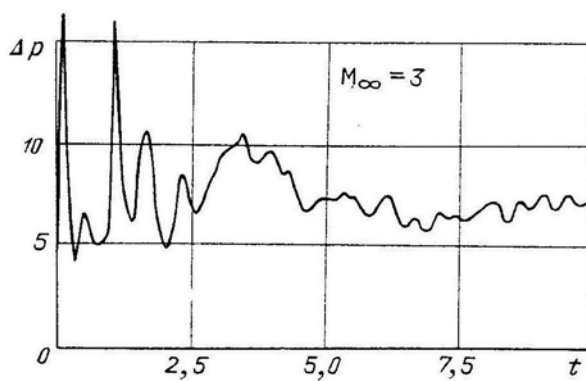
Движение газа описывается уравнениями в подвижных координатах (4.15) гл. 1 и уравнением (4.1) этой главы. О процедуре вычислений сказано в предыдущих параграфах. Расчетная сетка в два момента времени показана на рис. 8.18. Они получаются в результате решения задачи. В соответствии с ним изменяется структура сетки.

Деформации купола и строп описываются с помощью соотношений (5.1)–(5.4). Для их упрощения применяется модель Х.А. Рахматулина для круглого купола с большим количеством строп [9]. Последняя сводит напряженное состояние к одноосному ($N_2 = 0$). При этом в значение μ_s^0 входит плотность как ленты, так и прилегающей ткани купола. Отметим, что в данном расчете вместо соотношений (5.4) используется закон Гука $N_1 = E(\lambda_1 - 1)$.

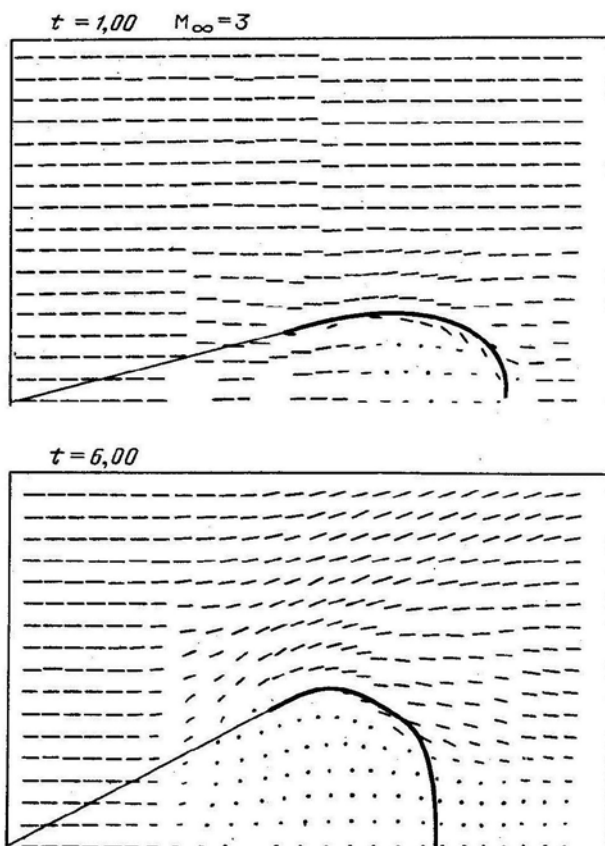
Предполагается, что материал является непроницаемым, нет также полюсного отверстия; за сравнительно короткое время раскрытия купола не происходит заметного уменьшения его средней скорости движения в результате торможения (число M_∞ постоянно).



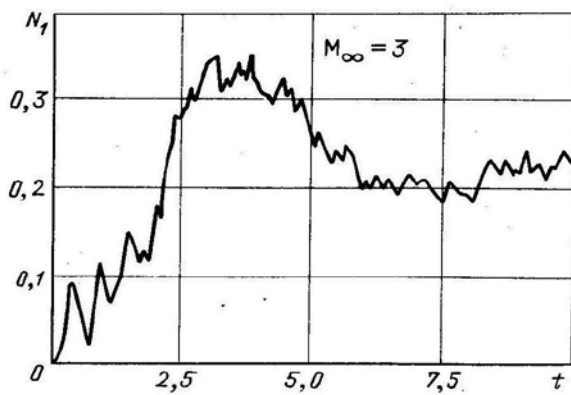
Р и с. 8.18. Структура сетки в два момента времени



Р и с. 8.19. Перспад давления в центре кругового купола



Р и с. 8.20. Положение купола и поле скоростей вокруг него



Р и с. 8.21. Усилие в куполе

Рассмотрим результаты, относящиеся к случаю сверхзвукового движения ($M_\infty = 3$). На рис. 8.19 показано изменение во времени перепада давления в центральной точке, а на рис. 8.20 — положение купола и картина течения в разные моменты времени. В начале перед куполом формируется ударная волна. До времени $t = 0,5$ происходит перемещение купола по направлению потока с одновременным его выпучиванием. При этом часть контура от точки крепления строп до области выпучивания представляет собой почти прямую линию. В дальнейшем происходит быстрое увеличение поперечного сечения. В интервале времени от $t = 1,6$ до начала выхода ударной волны из-под купола ($t = 2,5 \div 3,0$) возрастают усилия в оболочке до максимального уровня (рис. 8.21). Такие же изменения претерпевает сила сопротивления купола. К моменту $t = 5$ процесс раскрытия купола в основном завершается. После этого в газе устанавливается картина течения, близкая к случаю обтекания жесткого чашеобразного препятствия, что было рассмотрено в § 4. Но в отличие от него, имеется режим автоколебаний небольшой частоты и амплитуды, что наблюдается также в эксперименте [9].

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Мы рассмотрели вопросы нелинейного взаимодействия между жидкостью и деформируемым твердым телом, один из размеров (толщина) которого много меньше двух других. Именно взаимодействие жидкой и газообразной среды с тонким телом, способным легко изгибаться при значительной жесткости в своей плоскости, представляет практически наибольший интерес. Однако гидроупругие явления в случае нетонкого тела, трехмерного деформируемого массива также имеют место. Они чаще проявляются для тел с малым модулем упругости. Соответствующие контактные условия для разных способов описания могут быть записаны, как это сделано, например, в гл. 6 книги при изложении единого лагранжевого способа.

Дано изложение наиболее разработанных к настоящему времени способов описания нелинейного взаимодействия, причем в виде, рассчитанном на решение с помощью аналитических методов. Показано их применение. Не приведен один из возможных способов — единый эйлеров, не нашедший применения при решении конкретных задач. Это связано с тем, что в механике деформируемого твердого тела, в частности, в теории оболочек эйлерово описание обычно не используется ввиду определенных неудобств. Однако в гидроупругости его применение может быть целесообразно, например, в случаях замкнутых оболочек, закрепленных в пространстве кромках незамкнутых оболочек. Может быть использована также более широкая трактовка понятия оболочка. Пример — жидкая пленка. Взаимодействие последней с газообразной средой наиболее удобно описывается именно единым эйлеровым способом. Однако это уже относится не столько к гидроупругости, сколько к классической гидромеханике.

Совершенно не нашли отражения в книге разнообразные численные реализации рассмотренных способов. Весьма кратко приведены лишь результаты решения с их помощью отдельных задач (гл. 7, 8). Они показывают, какие сложные и практически важные вопросы могут получить свое разрешение. В то же время даже не упомянута, например, такая численная реализация совместного эйлерово-лагранжевого способа в случае потенциального течения несжимаемой жидкости, как метод дискретных вихрей. В настоящее время он получает значительное развитие. То же самое можно сказать о некоторых аналитических методах решения, например о теории функций комплексного переменного. Она широко при-

меняется, в частности, в статических задачах, изложенных в гл. 3. Однако в книге эти результаты не приводятся. Во всех главах решения строятся главным образом с помощью методов Фурье и Бубнова — Галеркина. Это позволяет с единых позиций проводить анализ вопросов также в динамической постановке.

При ознакомлении с книгой можно заметить, что для выбора наиболее предпочтительного способа описания взаимодействия предварительно необходимо провести качественный анализ и иметь представление о поведении рассматриваемой системы. Правда, это нужно делать всегда и при решении несвязанных задач. Но в гидроупругости это представление крайне важно в силу того, что задачи более трудоемки и сложны (иногда на порядок), чем отдельно взятые задачи теории оболочек и гидромеханики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К введению

1. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Исследование парашютов и дельтапланов на ЭВМ. — М.: Машиностроение, 1987. — 240 с.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961. — 339 с.
4. Буйвол В.Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. — Киев: Наукова думка, 1975. — 190 с.
5. Векслер Н.Д. Рассеяние импульсов на упругих цилиндрах. — Таллинн: Валгус, 1980. — 180 с.
6. Векслер Н.Д. Информационные проблемы гидроупругости. — Таллинн: Валгус, 1982. — 246 с.
7. Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 15. — М.: ВИНТИ, 1983. — С. 69–148.
8. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи аэроупругости. — М.: Наука, 1976. — 416 с.
9. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
10. Галиев Ш.У. Динамика взаимодействия элементов конструкций с волной давления в жидкости. — Киев: Наукова думка, 1977. — 172 с.
11. Галиев Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем. — Киев: Наукова думка, 1981. — 276 с.
12. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек в жидкости. — Киев: Наукова думка, 1964. — 103 с.
13. Горшков А.Г. Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 13. — М.: ВИНТИ. — 1979. — С. 105–186.
14. Григолюк Э.И. (ред.). Аэрогидроупругость: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1961. — 101 с.
15. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. — Л.: Судостроение, 1974. — 208 с.
16. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. — Л.: Судостроение, 1976. — 200 с.
17. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Погружение упругих оболочек вращения в жидкость // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 10. — М.: ВИНТИ. — 1977. — С. 63–113.
18. Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров Л.Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. Т. 2. — М.: ВИНТИ, 1965. — С. 34–90.
19. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. — Киев: Наукова думка, 1982. — 400 с.
20. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э. Гидроупругость систем оболочек. — Киев: Вища школа, 1984. — 207 с.

21. Гулин Б.В., Ильгамов М.А. Обзор исследований по теории взаимодействия мягких оболочек с потоком жидкости и газа // Статика и динамика гибких систем. — М.: Наука, 1987. — С. 5–34.
22. Девнин С.И. Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. — Л.: Судостроение, 1975. — 192 с.
23. Ершов Н.Ф., Шахверди Г.Г. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. — Л.: Судостроение, 1984. — 240 с.
24. Замышляев Б.В., Яковлев Ю.С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. — Л.: Судостроение, 1967. — 386 с.
25. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. — М.: Наука, 1969. — 182 с.
26. Казакевич М.И. Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов. — М.: Недра, 1977. — 200 с.
27. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. — М.: Транспорт, 1987. — 240 с.
28. Кармишин А.В., Скурлатов Э.Д., Старцев В.Г., Фельдштейн В.А. Нестационарная аэроупругость конструкций. — М.: Машиностроение, 1982. — 240 с.
29. Келдыш М.В., Гроссман Е.П., Марин Н.И. Вибрации на самолете. — М.: Оборонгиз, 1942. — 56 с.
30. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. — Киев: Наукова думка, 1979. — 183 с.
31. Метсавэзэр Я.А., Векслер Н.Д., Стулов А.С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах. — М.: Наука, 1979. — 239 с.
32. Мнев Е.И., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек. — Л.: Судостроение, 1970. — 365 с.
33. Нигул У.К. Эхо-сигналы от упругих объектов. Т. 1. — Таллинн: Валгус, 1976. — 597 с.
34. Нигул У.К., Метсавэзэр Я.А., Векслер Н.Д., Курсер М.Э. Эхо-сигналы от упругих объектов. Т. 2. — Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1974. — 345 с.
35. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемого тела. Т. 11. — М.: ВИНТИ, 1978. — С. 67–122.
36. Подстригач Я.С., Поддубняк А.П. Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. — Киев: Наукова думка, 1986. — 204 с.
37. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. — М.: Машиностроение, 1967. — 357 с.
38. Савицкий Г.А. Расчет антенных сооружений. — М.: Связь, 1978. — 152 с.
39. Самойлович Г.С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. — М.: Наука, 1969. — 444 с.
40. Самойлович Г.С. Возбуждение колебаний лопаток турбомашин. — М.: Машиностроение, 1975. — 288 с.
41. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха. — М.: Машиностроение, 1982. — 280 с.
42. Смирнов А.И. Аэроупругость. Ч. I. — М.: Изд-во МАИ, 1971. — 184 с.
43. Смирнов А.И. Аэроупругая устойчивость летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1980. — 231 с.
44. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. — М.: Физматгиз, 1962. — 512 с.
45. Фролов К.В., Антонов В.Н. Колебания оболочек в жидкости. — М.: Наука, 1983. — 143 с.
46. Чачин В.Н. Электрогидравлическая обработка машиностроительных материалов. — Минск: Наука и техника, 1978. — 183 с.
47. Шевляков Ю.А., Тищенко В.Н., Темненко В.А. Динамика парашютных систем. — Киев: Вища школа, 1985. — 160 с.
48. Шейнин И.С. Колебания конструкций гидросооружений в жидкости. — Л.: Энергия, 1967. — 314 с.
49. Шульман С.Г. Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. — М.: Энергия, 1976. — 336 с.

50. *Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L.* Aeroelasticity. — Cambridge (Mass.), 1955. — 860 p. (Рус. пер.: Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфман Р.Л. Аэроупругость. — М.: ИЛ, 1958. — 860 с.)
51. *Bisplinghoff R.L., Ashley H.* Principles of aeroelasticity. — New-York-London: Wiley, 1962. — 527 p.
52. *Dowell E.H.* Aeroelasticity of plates and shells. — Leyden: Noordhoff Internat. Publ., 1975. — 139 p.
53. *Dowell E.H., et all.* A modern course in aeroelasticity. — Netherlands: Sijthoff-Noordhoff, 1980. — 300 p.
54. *Dowell E.H., Ilgamov M.* Studies in nonlinear aeroelasticity. — New-York: Springer-Verlag, 1988. — 455 p.
55. *Förching H.W.* Fundamentals of aeroelasticity. — Berlin: Springer-Verlag, 1974. — 599 p. (Рус. пер.: Фершинг Г. Основы аэроупругости. — М.: Машиностроение, 1984. — 599 с.)
56. *Fung Y.C.B.* An introduction to the theory of aeroelasticity. — New York: Wiley, 1955. — 490 p. (Рус. пер.: Фын Я.Ц. Введение в теорию упругости. — М.: Физматгиз, 1959. — 490 с.)
57. *Kito F.* Principles of hydroelasticity. — Tokyo: Keio Univ., 1970. — 129 p.
58. *Scanlan R.H., Rosenbaum R.* Introduction to the study of aircraft vibration and flutter. — New York: Dover, 1970. — 428 p.

К главе 1

1. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи аэроупругости. — М.: Наука, 1976. — 416 с.
2. *Галиев Ш.У.* Динамика гидроупругопластических систем. — Киев: Наукова думка, 1981. — 276 с.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1978. — 287 с.
4. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. I. — М.: Физматгиз, 1963. — 535 с.
5. *Муштарь Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. — Казань: Татаркнигоиздат, 1957. — 431 с.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1973. — 492 с.
7. *Methods in computational physics / Ed. J. Killen.* — New York: Academic Press, 1976. — V. 16. (Рус. пер.: Вычислительные методы в физике. Управляемый термоядерный синтез. — М.: Мир, 1980. — 479 с.)

К главе 2

1. *Ильгамов М.А.* Об условиях на поверхности контакта упругой оболочки с жидкостью в смешанной форме // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 5. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1975. — С. 93–106.
2. *Ильгамов М.А.* Граничные условия на поверхности контакта оболочки с жидкостью в эйлерио-лагранжевой форме // X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. — Тбилиси: Мещиереба, 1976. — С. 170–179.
3. *Муштарь Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. — Казань: Татаркнигоиздат, 1957. — 431 с.
4. *Новожилов В.В.* Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
5. *Нох В.Ф.* СЭЛ — совместный эйлерио-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 128–184.
6. *Франк Р.М., Лазарус Р.Б.* Смешанный метод, использующий переменные Эйлера и Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 55–75.

К главе 3

1. Бармина Л.А. Сила, действующая на деформируемый контур, движущийся в произвольном потоке жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1973. – № 1. – С. 4–8.
2. Гафуров М.Б. Устойчивость цилиндрической оболочки конечной длины при ее поперечном обтекании жидкостью // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 6. – Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1975. – С. 341–352.
3. Гафуров М.Б. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической панели в потоке жидкости // Исследования по теории оболочек. Вып. 7. – Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1976. – С. 89–97.
4. Гафуров М.Б. Изгиб цилиндрической оболочки, закрепленной по противоположным образующим, при ее поперечном обтекании жидкостью // Статика и динамика оболочек. Вып. 8. – Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1977. – С. 154–161.
5. Гафуров М.Б., Ильгамов М.А. Изгиб цилиндрической оболочки конечной длины при ее поперечном обтекании жидкостью // ПМ. – 1978. – Т. 14, № 3. – С. 60–67.
6. Гафуров М.Б., Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость пологой цилиндрической панели при ее поперечном обтекании жидкостью // Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Вып. 11. – Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1979. – С. 59–69.
7. Гафуров М.Б., Ильгамов М.А. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании жидкостью // Взаимодействие оболочек с жидкостью. Вып. 14. – Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1981. – С. 81–95.
8. Жуковский Н.Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. – Полн. собр. соч. Т. 3. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – С. 45–55.
9. Ильгамов М.А. Динамика упругих оболочек, содержащих акустическую среду с источниками // Теория пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – С. 90–122.
10. Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании жидкостью // ПМ. – 1975. – Т. 11, № 3. – С. 12–19.
11. Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании жидкостью // XIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. Ч. 1. – Таллинн, 1983. – С. 124–129.
12. Ильгамов М.А., Сабитов М.З. Взаимодействие упругой проницаемой цилиндрической оболочки с потоком несжимаемой жидкости // Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Вып. 11. – Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1979. – С. 70–81.
13. Киселев О.М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1969. – № 4. – С. 13–23.
14. Киселев О.М. К задаче об обтекании наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1971. – № 3. – С. 108–118.
15. Киселев О.М. Безотрывное обтекание круговой цилиндрической оболочки // Труды семинара по красивым задачам. Вып. 18. – Казань: Изд-во КГУ, 1982. – С. 104–115.
16. Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. К задаче о струйном обтекании упругой оболочки // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 10. – С. 97–100.
17. Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. О струйном обтекании упругой оболочки // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1977. – № 2. – С. 24–32.
18. Корнишин М.С., Исанбаева Ф.С. Гибкие пластины и панели. – М.: Наука, 1968. – 260 с.
19. Лёглер Э.Л. Расчетное и экспериментальное исследование собственных колебаний мягкой цилиндрической оболочки // Труды ЦАГИ. – 1970. – Вып. 1253. – 36 с.
20. Лёглер Э.Л. Экспериментальное определение статической формы мягкой оболочки в потоке воздуха // Труды ЦАГИ. – 1972. – Вып. 1382. – 35 с.
21. Мавлютов Р.Р., Хакимов А.Г. Большие перемещения цилиндрической оболочки в плоском потоке идеальной жидкости // Труды Уфимск. авиац. ин-та. Сер. Прочность конструкций. – 1973. – Вып. 76. – С. 7–12.
22. Петрова С.И. Форма равновесия полосы, ограниченной упругой пленкой в однородном потоке жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1971. – № 1. – С. 120–127.

23. *Слезкин Н.А.* Обтекание наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости // Ученые записки МГУ. — 1951. — Т. 3, вып. 152. — С. 103–110.
24. *Фаддеев Ю.И.* Нестационарное движение плоского деформируемого контура в неоднородном потоке невязкой жидкости // Труды Ленингр. корабл. ин-та. — 1968. — Вып. 63. — С. 75–81.
25. *Фаддеев Ю.И., Листовский М.К.* Расчет распределения давлений и определения инерционных сил при движении деформируемого контура // Труды Ленинград. корабл. ин-та. — 1969. — Вып. 65. — С. 61–69.
26. *Фотинич Д.И.* Решение плоской задачи аэроупругости для воздухоопертой мягкой оболочки // Изв. вузов. Машиностр. — 1976. — № 8. — С. 12–16.
27. *Хакимов А.Г.* Обтекание гибкой цилиндрической оболочки плоским потоком идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1975. — № 6. — С. 147–150.
28. *Хакимов А.Г., Гафуров М.Б.* Большие перемещения эллиптической цилиндрической оболочки в плоском потоке идеальной жидкости // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 4. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1974. — С. 226–236.
29. *Шагидуллин Р.Р.* Линейный изгиб упругой цилиндрической оболочки при различных режимах поперечного обтекания маловязкой жидкостью // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 4. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1974. — С. 214–225.
30. *Шагидуллин Р.Р.* Сильный изгиб упругой цилиндрической оболочки при поперечном обтекании жидкостью // Исследования по теории оболочек. Вып. 7. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1976. — С. 75–83.
31. *Шагидуллин Р.Р.* Исследование задачи обтекания оболочки по модели следа Паркинсона–Яндали // Статика и динамика оболочек. Вып. 8. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1977. — С. 130–137.
32. *Якимов Ю.Л.* Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1970. — № 2. — С. 201–204.
33. *McLeod E.B.* The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension // Rational mechanics and analysis. — 1955. — V. 4, No. 4. — P. 45–49.
34. *Paidoussis M.P., Wong D.T.* — M. Flutter of thin cylindrical shells in cross flow // J. Fluid Mech. — 1982. — V. 115, pt. 2. — P. 411–426.
35. *Parkinson C.V., Jandali T.* A wake source model for bluff body potential flow // J. Fluid Mech. — 1970. — V. 40, pt. 3. — P. 577–594. (Рус. пер.: Паркинсон Г., Яндали Т. Модель следа с источниками за плохообтекаемым телом в потенциальном потоке) // Сб. переводов: Механика, вып. 2. — М.: Мир, 1971. — С. 86–102.
36. *Roshko A.* Experiments of the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number // J. Fluid Mech. — 1961. — V. 10, pt. 3. — P. 345–356.
37. *Seide P., Jamjoom T.M.M.* Large deformations of circular rings under nonuniform normal pressure // J. Appl. Mech. — 1974. — No. 1. — P. 192–196.

К главе 4

1. *Бекулов М.Т.* Линеаризованная задача об обтекании несжимаемой жидкости с отрывом струй проникаемого клина // ДАН СССР. — 1965. — Т. 162, № 3. — С. 523–526.
2. *Бучин В.А.* Решение задачи об обтекании проникаемой пластинки с отрывом струй // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 6. — С. 1331–1335.
3. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Перфорированные пластины и оболочки. — М.: Наука, 1970. — 556 с.
4. *Гулин Б.В., Ильямов М.А., Ридель В.В.* Динамика взаимодействия мягкой оболочки с потоком газа // Взаимодействие оболочек с жидкостью. Вып. 14. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1981. — С. 96–117.
5. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. — М.: Машиностроение, 1975. — 560 с.
6. *Идельчик И.Е.* Аэрогидродинамика технологических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1983. — 351 с.

7. Ильгамов М.А. Условия на поверхности контакта проницаемой оболочки и идеальной жидкости // Прочность и устойчивость оболочек. Вып. 9. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1977. — С. 125–135.
8. Ильгамов М.А. Общая постановка задачи взаимодействия идеальной сжимаемой жидкости и проницаемой оболочки при ее конечных перемещениях и деформациях / XII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Т. II. — Ереван, 1980. — С. 177–183.
9. Ильгамов М.А., Сабитов М.З. Взаимодействие упругой проницаемой цилиндрической оболочки с потоком несжимаемой жидкости // Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Вып. 11. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1979. — С. 70–81.
10. Рахматулин Х.А. Теория раскрытия парашюта // Техника воздушного флота. — 1940. — № 8. — С. 79–89.
11. Рахматулин Х.А. Обтекание проницаемого тела // Вестник МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. — М.: Изд-во МГУ. — 1950. — № 3. — С. 41–55.
12. Рахматулин Х.А., Гувернюк С.В. О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой // Парашюты и проницаемые тела. — М.: Изд-во МГУ. — 1987. — С. 5–24.
13. Рысев О.В. Аэродинамическое сопротивление технических тканей // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1981. — № 1. — С. 11–14.
14. Рысев О.В. Аэродинамические свойства технических тканей // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1983. — № 3. — С. 19–22.
15. Сабитов М.З. Поперечное установившееся обтекание проницаемой цилиндрической оболочки потоком жидкости // Взаимодействие оболочек со средой. Вып. 20. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1987. — С. 124–143.
16. Третьяков М.В. Об обтекании проницаемых контуров // ПММ. — 1958. — Т. 22, № 2. — С. 220–225.
17. Ульянов Г.С. Обтекание сверхзвуковым потоком газа проницаемых пластин // Научные труды института механики МГУ. — 1975. — № 35. — С. 99–126.
18. Федяев В.Л. Об условиях на поверхности тонких проницаемых тел, обтекаемых вязкой жидкостью // Гидроупругость оболочек. Вып. 16. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1983. — С. 107–115.
19. Ханжонков В.И. Сопротивление сеток // Промышленная аэродинамика: ЦАГИ. — 1944. — С. 35–42.
20. Armour J.C., Cannon J.N. Fluid flow through woven screens // AIChE Journal. — 1968. — V. 14, No 3. — P. 415–420.
21. Brown W.D. Parachutes. — London: Pitman and Sons, 1951. — 85 p.
22. Castro I.P. Some problems concerning the production of a linear shear flow using curved wire-gauze screens // J. Fluid. Mech. — 1976. — V. 76, pt. 4. — P. 689–709.
23. Heinrich H.G. The effective porosity of parachute cloth // Flugwiss. — 1963. — V. 11. — P. 389–397.
24. Koo J.K., James D.F. Fluid flow around and through a screen // J. Fluid Mech. — 1973. — V. 60, pt. 3. — P. 513–538.
25. Smetana F.O. On the determination of parachute cloth permeability // Flugwiss. — 1966. — V. 14. — P. 429–435.
26. Taylor G.I. Clir resistance of a flatplate of very porous sheefths // Reports and Memoranda of the Aeronautical Research Council. — London, 1944. — No. 2237. — P. 391–405.

К главе 5

1. Ганиев Р.Ф., Подчасов Н.П., Украинский Л.Е. О вол²⁶ м механизме вибрационного перемещения жидкости в трубопроводах // ПМ. — 1979. — Т. 15, № 6. — С. 98–103.
2. Зайко В.М., Старобин И.М., Уткин А.В. Численное моделирование движения жидкости (крови) в трубке с активно деформирующейся стенкой // Механика композитных материалов. — 1979. — № 3. — С. 515–523.

3. Ильгамов М.А., Талдыкин М.В. Управление деформацией цилиндрической оболочки, находящейся в жидкости // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 6. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1975. — С. 251–258.
4. Ильгамов М.А., Федяев В.Л. О стационарном движении жидкости, вызванном колебаниями поверхности цилиндра // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 6. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1975. — С. 259–273.
5. Ильгамов М.А., Сулейманова М.М., Талдыкин М.В., Федяев В.Л. Об одной модели волнового движителя // ДАН СССР. — 1978. — Т. 241, № 2. — С. 309–311.
6. Калугин В.Н., Коханенко Н.В., Панчук В.И. О внешнем течении вязкой жидкости, вызванном бегущей по границе волной // Гидромеханика. Вып. 27. — Кисев: Научно-ва думка, 1974. — С. 36–42.
7. Канарский М.В., Бабенко В.В., Козлов Л.Ф. Экспериментальное исследование турбулентного пограничного слоя на эластичной поверхности // Стратифицированные и турбулентные течения. — Киев: Наукова думка, 1979. — С. 59–67.
8. Келдыш М.В., Лаврентьев М.А. К теории колеблющегося крыла // Технические заметки ЦАГИ. № 45. — М., 1935. — С. 48–52.
9. Кокшайский Н.В. Очерк биологической аэро- и гидродинамики (полет и плавание животных). — М.: Наука, 1974. — 256 с.
10. Лаврентьев М.А., Лаврентьев М.М. Об одном принципе создания тяговой силы для движения // ПМТФ. — 1962. — № 4. — С. 3–9.
11. Лаврентьев М.А. Модель движения рыб, ушей // ПМТФ. — 1973. — № 2. — С. 164–165.
12. Логвинович Г.В. Гидродинамика плавания рыб // Бионика. № 7. — Киев: Наукова думка, 1973. — С. 3–8.
13. Мукосеев Б.И. К вопросу о движении гибкой поверхности в вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1973. — № 3. — С. 151–153.
14. Першин С.В. Некоторые результаты гидродинамических исследований волнового движителя // Бионика. № 8. — Киев: Наукова думка, 1974. — С. 35–43.
15. Першин С.В. Плавание и полет в природе // Итоги науки и техники. Т.4. Бионика. Биокibernетика. Биоинженерия. — М.: ВИНТИ. — 1979. — 155 с.
16. Регирер С.А. О движении вязкой жидкости в трубе с деформирующейся стенкой // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1968. — № 4. — С. 202–204.
17. Регирер С.А., Скобелева И.М. Течение вязкой жидкости в пористой трубе с деформирующейся стенкой // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. — № 3. — С. 118–131.
18. Старобин И.М., Зайко В.М. Численное исследование течения вязкой жидкости в деформируемой трубе // Механика композитных материалов. — 1979. — № 4. — С. 678–683.
19. Сулейманова М.М. О перемещении деформирующегося тела вращения в вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1977. — № 3. — С. 145–149.
20. Сулейманова М.М. Приближенное решение задачи о взаимодействии мягкой оболочки с вязкой несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1980. — № 3. — С. 132–137.
21. Федяев В.Л. Об одном способе решения задачи движения жидкости, вызванного колебаниями поверхности цилиндра // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 6. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1975. — С. 274–285.
22. Федяев В.Л. Движение деформируемого тела в вязкой несжимаемой жидкости // Статика и динамика оболочек. Вып. 8. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1977. — С. 123–129.
23. Федяев В.Л. Движение деформируемого тела вращения в вязкой несжимаемой жидкости // Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Вып. 11. — Казань: КФТИ КФАН СССР, 1979. — С. 158–165.
24. Федяев В.Л. О динамическом взаимодействии мягкой оболочки с вязкой несжимаемой жидкостью // Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Вып. 11. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1979. — Вып. 11. — С. 166–175.
25. Шер Е.Н. О механизме движения ушей и рыб // Некоторые проблемы математики и механики. — Л.: Наука, 1970. — С. 267–276.

26. Barton C., Raynor S. Peristaltic flow in tubes//Bull. Math. Biophys. — 1968. — V. 30. — P. 663–680.
27. Blake J.R. A spherical envelope approach to ciliary propulsion//J. Fluid. Mech. — 1971. — V. 46, pt. 1. — P. 199–208.
28. Blake J.R. Infinite models for ciliary propulsion//J. Fluid Mech. — 1971. — V. 49, pt. 2. — P. 209–222.
29. Blake J.R. Self propulsion due to oscillations of the surface of a cylinder at low Reynolds number//Bull. Austral. Math. Soc. — 1971. — V. 5, No 2. — P. 255–264.
30. Blake J.R. A finite model for ciliated microorganisms//J. Biomech. — 1973. — V. 6, No 2. — P. 133–140.
31. Blake J.R., Sleight M.A. Mechanics of ciliary locomotion//Biol. Rev. — 1974. — V. 49. — P. 85–125.
32. Brown T.D., Hung T.K. Computational and experimental investigations of two-dimensional nonlinear peristaltic flows//J. Fluid Mech. — 1977. — V. 83, pt. 2. — P. 249–272.
33. Brennen C. An oscillating-boundary-layer theory for ciliary propulsion//J. Fluid Mech. — 1974. — V. 65, pt. 4. — P. 799–824.
34. Chopra M.G. Lunate-tail swimming propulsion//Swimm. and Fly. Nature. New York–London, 1975. — V. 2. — P. 635–650.
35. Chow T.S. Peristaltic transport in a circular cylindrical pipe//Trans. ASME: J. Appl. Mech. — 1970. — E37. — No 4. — P. 901–905. (Рус. пер.: Труды/Амер. общество инж. мех. Прикл. Механика. — 1970. — № 4. — С. 12–17.)
36. Ferrari C. Consideration of fish locomotion//Meccanica. — 1975. — V. 10, No 4. — P. 300–311.
37. Fung Y.C., Yih C.S. Peristaltic transport//Trans. ASME: J. Appl. Mech. — 1968. — E35, No 4. — P. 669–676. (Рус. пер.: Труды/Амер. общество инж. мех. Прикл. механика. — 1968. — Т. 35, № 4. — С. 48–55.)
38. Gupto B.B., Seshadri V. Peristaltic pumping in nonuniform tubes//J. Biomech. — 1976. — V. 9, No 2. — P. 105–109.
39. Hancock G.J. The self-propulsion of microscopic organisms through liquids//Proc. Roy. Soc. — 1953. — V. A217, No 1128. — P. 96–121.
40. Hanin M. The flow through a channel due to transversely oscillating walls//Israel. J. Technol. — 1968. — V. 6. — P. 67–71.
41. Hidgon J.J. A hydrodynamic analysis of flagellar propulsion//J. Fluid Mech. — 1979. — V. 90, pt. 4. — P. 685–711.
42. Hidgon J.J. The generation of feeding currents by flagellar motion//J. Fluid Mech. — 1979. — V. 94, pt. 2. — P. 305–330.
43. Holtvill M.E.J., Miles C.A. Hydrodynamic analysis of nonuniform flagellar undulations//J. Theor. Biol. — 1971. — V. 31, No 1. — P. 25–42.
44. Jaffrin M.Y., Shapiro A.H. Peristaltic pumping//Ann. Rev. Fluid Mech. — 1971. — V. 3. — P. 13–36. (Рус. пер.: Механика. Период. сб. перев. ин. статей. — 1972. — № 5. — С. 88–108.)
45. Katz D.F. On the propulsion of micro-organisms near solid boundaries//J. Fluid Mech. — 1974. — V. 64, pt. 1. — P. 33–49.
46. Lew H.S., Fung Y.C., Lowenstein C.B. Peristaltic carrying and mixing of chyme in the small intestine (an analysis of a mathematical model of peristalsis of the small intestine)//J. Biomech. — 1971. — V. 4, No 4. — P. 297–315.
47. Li C.H. Peristaltic transport in circular cylindrical tubes//J. Biomech. — 1970. — V. 3, No 5. — P. 513–523.
48. Lighthill M.J. On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers//J. Comm. Pure. Appl. Math. — 1952. — V. 5. — P. 109–118.
49. Lighthill M.J. Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency//J. Fluid Mech. — 1970. — V. 44, pt. 2. — P. 265–301.
50. Manton M.J. Low Reynolds numbers flow in slowly varying axisymmetric tubes//J. Fluid Mech. — 1971. — V. 49, pt. 3. — P. 451–461.
51. Manton M.J. Long-wavelength peristaltic pumping at low Reynolds number//J. Fluid Mech. — 1975. — V. 68, pt. 3. — P. 467–476.

52. *Mittra T.K., Prasad S.N.* On the influence of wall properties and Poissuill flow in peristalsis//J. Biomech. — 1973. — V. 6. — P. 681–693.
53. *Negrin M.P., Shach W.J., Lardner T.J.* A note on peristaltic pumping//Trans. ASME: J. Appl. Mech. — 1974. — E41, No 2. — P. 520–521.
54. *Newman J.N., Wu T.Y.* Hydromechanical aspects of fish swimming//Swimm. and Fly. Nature. — New York–London, 1975. — V. 2. — P. 615–634.
55. *Rath H.J.* Über peristaltische Strömungen in elastischen Leitungen//ZAMM. — 1979. — Bd. 59, No 5. — S. 255–257.
56. *Shapiro A.H., Jaffrin M.Y., Weinberg S.L.* Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number//J. Fluid Mech. — 1969. — V. 37, pt. 4. — P. 799–825.
57. *Tanaka K.* Induced flow due to wavy motion of a wall. I. The case of small and moderately large Reynolds numbers//J. Phys. Soc. Jap. — 1977. — V. 42, No 1. — P. 297–305.
58. *Tanaka K.* Induced flow due to wavy motion of a wall. II. The case of very large Reynolds numbers//J. Phys. Soc. Jap. — 1977. — V. 42, No 5. — P. 1752–1758.
59. *Taylor G.I.* Analysis of the swimming of microscopic organisms // Proc. Roy. Soc. — 1951. — V. A209, No 1099. — P. 447–461.
60. *Taylor G.I.* The action of waving cylindrical tails in propelling microscopic organisms // Proc. Roy. Soc. — 1952. — V. A211, No 1105. — P. 225–239.
61. *Tong P., Vawter D.* An analysis of peristaltic pumping // Trans. ASME: J. Appl. Mech. — 1972. — E39, No 4. — P. 857–862. (Рус. пер.: Труды / Амер. общество инж. мех. Прикл. механика. — 1972. — Т. 39, № 4. — С. 1–7.)
62. *Tuck E.O.* A note on a swimming problem // J. Fluid. Mech. — 1968. — V. 31, pt. 2. — P. 305–301.
63. *Weinberg S.L., Eekstein E.C., Shapiro A.H.* An experimental study of peristaltic pumping // J. Fluid Mech. — 1971. — V. 49, pt. 3. — P. 461–479.
64. *Yin F.C., Fung Y.C.* Peristaltic waves in circular cylindrical tubes // Trans. ASME: J. Appl. Mech. — 1969. — E36, No 3. — P. 579–584.

К главе 6

1. *Ильгамов М.А.* Об условиях на поверхности контакта упругой оболочки и идеальной жидкости в лагранжевом представлении // ПММ. — 1977. — Т. 41, № 3. — С. 509–519.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. I, II. — М.: Физматгиз, 1963. — 535 с.
3. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1948. — 211 с.
4. *Сахабудинов Ж.М.* Нелинейные задачи аэрогидроупругости в лагранжевых координатах // Труды семинара по теории оболочек. — Вып. 2. — Казань: Физ.-техн. ин-т АН СССР, 1971. — С. 165–187.

К главе 7

1. *Гильманов А.Н.* Динамика ударного взаимодействия мягкой сферической оболочки, заполненной газом, с твердой поверхностью // Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Вып. 11. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1979. — С. 98–114.
2. *Ильгамов М.А., Сахабудинов Ж.М., Шакирьянов М.М.* Нелинейные радиальные колебания цилиндрической оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 2. — Казань: Физ.-техн. ин-т АН СССР, 1971. — С. 188–197.
3. *Ильгамов М.А., Сахабудинов Ж.М.* Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности // Избранные проблемы прикладной механики. — М.: Наука. — 1974. — С. 341–346.
4. *Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М.* Взаимодействие упругосжимающейся преграды и идеальной сжимаемой жидкости при ударном нагружении // Труды семина-

- ра по теории оболочек. Вып. 3. — Казань: Физ.-техн. ин-т АН СССР, 1973. — С. 278–290.
5. Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Сильный изгиб балки силой, величина и точка приложения которой зависят от деформации упругой линии // Статика и динамика оболочек. Вып. 8. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1977. — С. 146–153.
 6. Овсянников Л.В. О всплывании пузыря // Некоторые проблемы математики и механики. — Л.: Наука. — 1970. — С. 85–95.
 7. Сахабутдинов Ж.М. Нелинейные задачи аэрогидроупругости в лагранжевых координатах // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 2. — Казань: Физ.-техн. ин-т АН СССР, 1971. — С. 165–187.
 8. Сахабутдинов Ж.М. Динамика газа в трубе с эластичным участком // Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Вып. 11. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1979. — С. 82–97.
 9. Уилкинс М.Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир. — 1967. — С. 212–263.
 10. Costantino C.J. The strength of thin-walled cylinders subjected to dynamic internal pressures // Trans. ASME. — E32, No 1. — P. 136–146.

К главе 8

1. Аганин А.А., Гильманов А.Н., Кузнецов В.Б. Численное моделирование взаимодействия газовых потоков с подвижными телами изменяемой геометрии // Численные методы механики сплошной среды. — Новосибирск: ИТПМ ВЦ СО АН СССР, 1986. — С. 3–11.
2. Аганин А.А., Гильманов А.Н., Кузнецов В.Б. Численное моделирование сильного взаимодействия мягких оболочек с газом // Взаимодействие оболочек со средой. Вып. 20. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1987. — С. 51–69.
3. Алексеев С.А. Основы теории мягких осесимметричных оболочек // Расчет пространственных конструкций. Вып. 10. — М., 1965. — С. 5–37.
4. Гильманов А.Н., Сахабутдинов Ж.М. Задачи динамики упругих мембран из несжимаемого материала // Взаимодействие оболочек с жидкостью. Вып. 14. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1981. — С. 118–126.
5. Гильманов А.Н., Сахабутдинов Ж.М. Произвольный лагранжево-эйлеров метод в нелинейных задачах взаимодействия упругого тела с потоком газа // Взаимодействие оболочек с жидкостью. Вып. 1. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1981. — С. 127–145.
6. Гильманов А.Н. Нелинейные колебания эластичной мембраны в дозвуковом потоке газа // Гидроупругость оболочек. Вып. 16. — Казань: Физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1983. — С. 53–69.
7. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965. — 455 с.
8. Ковеня В.М., Яценко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука, 1981. — 304 с.
9. Рахматуллин Х.А., Рысев О.В. Исследование автоколебаний купола парашюта // Обтекание парашютов и проникаемых тел потоком газа. Вып. 35. — М.: Изд-во МГУ, 1975. — С. 36–51.
10. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976. — 464 с.
11. Херт С. Произвольный лагранжево-эйлеров численный метод // Численные методы в механике жидкостей. — М. Мир. — 1973. — С. 156–164.
12. Green A.E., Zerna W. Theoretical elasticity. — Oxford: Clarendon Press, 1954. — 457 p.
13. Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds // J. Comp. Phys. — 1974. — V. 14, No 3. — P. 227–253.
14. Tanaka K. Induced flow due to wavy motion of a wall. II. The case of very large Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Jap. — 1977. — V. 42, No 5. — P. 1752–1758.

Научное издание

ИЛЬГАМОВ Марат Аксанович

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ГИДРОУПРУГОСТЬ

Заведующий редакцией *Л.А. Русаков*

Редактор *В.И. Левантовский*

Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*

Технические редакторы *О.Б. Черняк, В.Н. Никитина*

Корректоры *Т.К. Кармакулова, Е.Ю. Рычагова, Н.П. Круглова, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 41003

Сдано в набор 05.06.90. Подписано к печати 23.07.90

Формат 60 X 90/16. Бумага книжно-журнальная

Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная

Усл. печ.л. 12,5. Усл. кр.-отт. 12,75. Уч.-издл. 13,13

Тираж 1300 экз. Тип. зак. 247. Цена 2 р. 70 к.

Издательско-производственное и книготорговое
объединение "Наука"

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства "Наука"

630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

I. Information about the author. Professor, Dr.Sc(Phys. — Math.), vice director of the Kazan Physical—Technical Institute of the USSR Academy of Sciences. The member of the USSR National Committee in Theoretical and Applied Mechanics, member of American Institute of Aeronautics and Astronautics, one of the leading specialists on hydroelasticity and aeroelasticity.

II. Abstract. Distinctiveness of the book lies in the following.

1. A complete nonlinear formulation of a hydroelasticity problem is given. This allows to consider new problems as well as to obtain justifiably simplified relations, involving those widely used in classical problems of aerohydroelasticity.

2. All methods of description of the interaction developed at present are reported of the basis of general principles. The contact surface between a shell and a fluid is treated as a large discontinuity of medium parameters..

3. Classification of the hydroelasticity problems and a method of their simplification depending on a measure and changes in elastic body displacement, velocity and pressure field in fluid are presented.

4. Special attention is paid to the accuracy analysis of the conditions on the contact surface. Usually formulating these conditions, the deformed surface is identified with the undeformed one. In many problems it proves to be correct. However this identification can sometimes lead to wrong results.

5. The problems of hydroelasticity for the case of permeable shell are considered. Permeability can be continuous on the surface as well as concentrated.

6. Interaction between thin wall construction and viscous liquid is shown. Some examples illustrate the importance of nonlinear contact conditions.

7. United Lagrange method and generalized method of description of medium interaction are dealt with. Corresponding problems are solved by analytical and numerous methods.

Thus, this book differs from known monographs on aeroelasticity and hydroelasticity by giving a more complete than up to now consideration of nonlinear factors.

The book is based on the lectures on hydroelasticity, delivered by the author in Kazan University. Some ideas and conclusions were discussed at the seminars in the universities of London, Liverpool, Southampton, Bucharest Princeton and Massachusetts.

One of the three methods considered above and describing medium interaction (united Euler—Lagrange method) and its application to particular problems was stated in a joint monograph co-authored with a leading specialist in aeroelasticity Prof. of Duke University E.Dowell (E. Dowell, M. Ilgamov. Studies in Nonlinear Aeroelasticity, New York, Springer-Verlag, 1988)

CONTENTS

Preface

Introduction

Chapter 1

Some Background from Continuum Mechanics

1. Methods for Describing Medium Motion
2. Methods for Describing Medium Interaction
3. Fundamental Relations of the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells
4. Fundamental Equations of Hydromechanics
5. Conditions on the Surface of Large Discontinuities

Chapter 2

United Euler-Lagrange Method

1. Kinematic and Dynamic Conditions at a Contact Surface. Formulation of a Problem
2. Reduction of Contact Conditions to the Original Surface
3. Classification of Hydroelasticity Problems
4. Interaction for Large Bending of the Shell
5. Interaction for Medium Bending of the Shell
6. Interaction for Small Bending of the Shell

Chapter 3

Bending of a Cylindrical Shell with a Transverse Flow around it

1. Small Bending of a Cylindrical Shell with an Unseparated Transverse Flow around it
2. Influence of Distinction between Deformed and Undeformed Surface in Contact Conditions
3. Dynamical Behavior of a Shell in a Flow
4. Bending of a Shallow Cylindrical Curved Plate in a Flow
5. Research Results Comparison with Experiments
6. Large Bending of a Cylindrical Shell in a Flow
7. Dynamical Behavior of a System: Taking into Account Initial Bending of the Shell
8. Influence of Flow Separation from the Shell Surface

Chapter 4

Interaction of a Permeable Shell with a Fluid Flow

1. Conditions on the Contact Surface
2. Representation of the Fluid Velocity through the Shell and the Shell Rigidity
3. Particular Cases
4. Bending of a Cylindrical Shell in an Incompressible Liquid
5. Bending of a Cylindrical Shell with Lumped Perforation

Chapter 5

Interaction between a Shell and Viscous Liquid

1. Conditions on a Contact Surface
2. Peristaltic Motion
3. Longitudinal Velocity of a Cylinder in a Viscous Liquid
4. A Brief, Investigation of a Wave Method of Body Motion

Chapter 6

United Lagrange Method

1. Distictiveness of United Lagrange Method
2. Formulation of Problem. Conditions on the Contact Surface
3. First Variant of Conditions
4. Second Variant of Conditions

Chapter 7

Utilization of United Lagrange Method

1. Stability of an Elastic Plate between Liquid of Different Densities
2. Forced Oscillations of an Incompressible Liquid in Rigid Tube, Closed by Elastic Plate
3. Nonlinear Radial Oscillations of a Cylindrical Shell Filled by Compressible Liquid
4. Interaction at Shock Loading
5. Large Bending of the Bar by a Force, Depending on Elastic Line Deformation
6. Shock Interaction of a Membrane Shell and Gas

Chapter 8

Arbitrary Euler-Lagrange Method

1. Formulation of Interaction Problem
2. Comparison of Solution of a Problem Differently Formulated
3. Viscous Liquid Motion, Caused by Travelling Wave in a Plate
4. Rigid Mobile Barriers in a Gas Flow
5. Interaction of an Elastic Membrane and Gas Flow
6. Simulation of Parachute Opening in a Flow

Conclusion

References

The total volume of a book consists of 11 typed pages, involving one table, 87 graphical illustrations. List of references includes 250 names.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА"

**ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ИЗДАНИЮ:

Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: Теория и практика / Под ред. Дж. Томпсона и Г. Ханта: Пер. с англ. / Под ред. Э.И. Григolja, — 40 л. (Аннотированный план на 1991 г., п. 54).

Представляет собой труды Лондонского симпозиума (1982 г.) по вопросам устойчивости деформируемых элементов конструкций. Изучается выпучивание и потеря устойчивости на примере прямолинейных стержней, цилиндрических и сферических оболочек, тонкой круговой трубы, пластинок, коробчатых стержней и др. Рассматриваются простейшие модели стержневых систем для выявления влияния несовершенства форм на поведение при потере устойчивости. Публикуется обзор работ по оптимальному проектированию конструкции в условиях устойчивости.

Для специалистов в теории устойчивости, занимающихся проектированием и расчетом конструкций.

Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: Асимптотические методы. — 15 л. (Аннотированный план на 1991 г., п. 56).

Рассматривается ряд задач устойчивости тонких упругих оболочек. Круг рассматриваемых вопросов ограничен случаями, которые приводят к решению линейных краевых задач и в которых применение асимптотических методов позволяет получить приближенное решение либо существенно упростить последующее численное решение. Исследуется зависимость форм потери устойчивости от характера начального напряженного состояния, геометрии оболочки, ее закрепления и других факторов. Строятся формы потери устойчивости, локализованные в окрестностях линий или точек на срединной поверхности. Отдельно рассматриваются цилиндрическая и коническая оболочки.

Для специалистов в теории оболочек, инженеров, аспирантов.