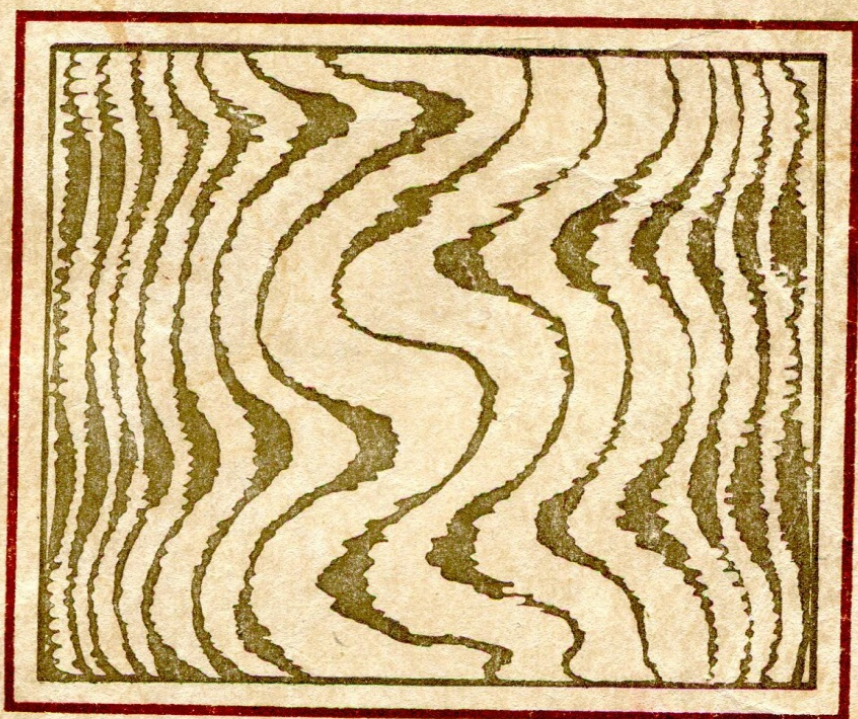


М. А. Ильямов

КОЛЕБАНИЯ
УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК
СОДЕРЖАЩИХ
ЖИДКОСТЬ И ГАЗ



ИЗДАТЕЛЬСТВО • НАУКА •

2. Изданы
1972
Д. В. Вильямс

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
КАЗАНСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

М. А. ИЛЬГАМОВ

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ И ГАЗ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1969

Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. И л ь г а м о в М. А. Изд-во «Наука», 1969 г.

В книге рассматриваются свободные, вынужденные и параметрические колебания тонкостенных оболочек, содержащих жидкость, газ или сплошное упругое тело. Приводятся краткие сведения из газодинамики горения, акустики и теории упругости. Дается описание осесимметричных и неосесимметричных колебаний цилиндрических, сферических и конических оболочек, содержащих сжимаемую жидкость. Исследуется динамика систем оболочка — сплошное упругое тело — газ, а также колебания трехслойных оболочек и трубопроводов.

Работа рассчитана на специалистов по теории оболочек, акустике, аэроупругости, а также на аспирантов и студентов старших курсов вузов.

Таблиц 4, иллюстраций 60, библиогр. 172 назв.

ОТВЕТСТВЕННЫЕ РЕДАКТОРЫ

доктор физ.-мат. наук Х. М. Муштар

доктор физ.-мат. наук И. В. Свирский

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы важное значение приобрели исследования по динамике систем, состоящих из упругой оболочки, газа и сплошного упругого тела, в которых по той или иной причине могут возникнуть возмущения рабочего тела. Например, в гидравлических системах летательных аппаратов возмущения обусловлены периодической подачей рабочей жидкости насосами, колебаниями противодавления на срезе форсунок, колебаниями регулирующего органа и т. п. Ярким примером неустойчивой работы системы является так называемое вибрационное горение.

Вибрационное горение было обнаружено при форсировании режима работы реактивных двигателей и промышленных топок. Заключается оно в мощных колебаниях, обусловленных взаимодействием горения и возмущений газового потока или упругого заполнителя [138], [97], [98], [10], [100], [76], [81]. При этом, как правило, нарушается нормальное протекание рабочего процесса и может быть вызвано разрушение камеры сгорания. Устранение вибрационного горения с помощью целого комплекса мер при стендовых испытаниях двигателей не исключает возможности того, что в эксплуатационных условиях даже небольшие отклонения параметров горения, подачи топлива могут вызвать его вновь.

С другой стороны, вибрационное горение представляет собой значительно более интенсивный процесс, чем спокойное горение, и потому может быть использовано для повышения теплонпряженности топок, интенсификации процессов в теплотехнике, металлургии и химической технологии [31], [140], [36], [136], [134], [144], [164]. Еще в тридцатых годах была создана труба Шмидта, которая явилась прообразом пульсирующего воздушно-реактивного двигателя. Впоследствии по этому же принципу был построен пульсирующий газогенератор для газификации угольной пыли, в котором процесс протекает с исключительно большой скоростью [167], [19]. В работах [157], [160] приводятся примеры различных технических устройств (генератора звуковых колебаний, горелок, газовых турбин и др.), где акустические колебания используются как средство увеличения интенсивности тепловыделения и теплопередачи, а следовательно, уменьшения габаритов устройства. В таких установках возмущения можно создать при помощи сирены или другого звукового генератора. Считают, что увеличение теплоотдачи от горячих газов трубопроводам с теплоотводящей жидкостью связано с разрушением пограничного слоя около трубопроводов в результате колебаний массы газов. В статье [145] сообщается, что звуковые колебания с частотой 4 кГц и интенсивностью 150 дБ приводили к ускорению плавки металла на 25 % при экономии топлива 10 %. Делаются попытки регулировать тягу двигателя твердого топлива при помощи акустического воздействия на поверхность горения [142].

Примеры полезного применения возмущений рабочего тела, с одной стороны, и вредных их последствий, с другой — можно продолжить. Однако и сказанного достаточно, чтобы подчеркнуть важность исследования динамического поведения упругих систем, подвергаемых действию возмущений рабочего тела.

Строгое математическое описание такой сложной колебательной системы, как, например, корпус камеры сгорания — рабочее тело — входное и выходное устройства, представляет чрезвычайные трудности, усугубляемые тем, что в большинстве случаев система является автоколебательной, т. е. существенно нелинейной. К сожалению, нелинейная теория таких систем почти не разработана, поэтому рассматривают только пределы неустойчивости идеализированных расчетных моделей, наделяя их, однако, основными динамическими свойствами реальных систем.

В книге рассматриваются свободные, вынужденные и параметрические колебания упругих оболочек и содержащейся в них акустической среды. При выборе материала предпочтение отдано вопросам, над которыми работал сам автор. Поэтому результаты многих интересных исследований по колебаниям оболочек с жидкостью, выполненных другими авторами, здесь не нашли отражения.

В книге нет строгого расчета автоколебаний оболочки и содержащегося в ней газа; эта проблема еще ждет своего решения. Дается лишь приближенный способ нахождения амплитуд установившихся колебаний оболочки, применимых в случаях, когда упругость оболочки не влияет на источник колебательной энергии.

Первая глава посвящена сведениям по теории горения, газовой динамике, теории колебаний и распространения волн в сжимаемой жидкости и твердом деформируемом теле, необходимым для изложения материала последующих глав.

Автор выражает свою благодарность д. т. н. Л. И. Балабуху, Н. А. Николаенко и к. т. н. Р. Г. Суркину, которые сделали ряд полезных замечаний по рукописи монографии.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГАЗОДИНАМИКИ ГОРЕНИЯ,
АКУСТИКИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Колебательные системы. Механизмы обратной связи

*Колебательные системы
с внешним источником возбуждения*

К системам с внешним источником возбуждения относятся устройства, в которых колебания возникают под действием лишь переменного внешнего воздействия. Системы, в которых могут происходить незатухающие колебания и в отсутствие переменного внешнего воздействия, будем называть автоколебательными.

Простейшим примером первого типа колебательных систем является воздушный столб и движущийся по заданному закону поршень в цилиндре. Здесь вместо жесткого поршня могут находиться мембрана или гибкая пластинка, прикрепленные к цилиндру по контуру и приводимые в движение какой-либо силой. Другим примером может служить камера, где рабочее тело подается через отверстия, имеющиеся во вращающейся и неподвижной шайбах, прилегающих друг к другу. В зависимости от того, совпадают отверстия в обеих шайбах или нет, проходное сечение открывается и закрывается, что напоминает работу сирены. Известны установки с прерывистой подачей рабочего тела, осуществляемой при помощи дроссельного устройства. Сидящий на оси электродвигателя дроссель при своем вращении попеременно открывает и закрывает сечение входного канала.

Самовозбуждающиеся колебательные системы

В качестве примера автоколебаний (самовозбуждающихся колебаний) рассмотрим вибрационное горение, которое обусловливается наличием обратной связи, приводящей к влиянию колебаний газов на процесс горения. Механизмами обратной связи могут служить: неравномерная подача горючего или колебания его распыла, колеблющийся расход воздуха, вихреобразование, запаздывание в зоне подвода тепла, неустойчивость фронта пламени и т. д. [97].

Факт самовозбуждения колебаний при подводе тепла известен уже более ста лет [111]. Если в так называемой трубке Рийке установить на расстоянии около четверти длины от нижнего конца нагреваемую от какого-либо источника металлическую сетку, то можно поддерживать звуковые колебания. Это наиболее простой прибор для демонстрации автоколебаний при теплоподводе, в то же время он имеет много общего с техническими и экспериментальными установками, примеры которых приведены далее.

А. Т р у б а, з а п о л н е н н а я г о р ю ч и м г а з о м. Один из первых тщательно проведенных опытов [137] по вибрационному горению был посвящен изучению возбуждения волн вдоль трубы, заполненной горючим газом. Один конец трубы был наглухо закрыт, с другого — велось поджигание. В этом и подобных экспериментах из всех возможных механизмов обратной связи наиболее вероятным является механизм, связанный с периодическим волнообразованием на поверхности пламени.

Задача об устойчивости плоского фронта пламени, трактуемого как поверхность сильного разрыва Σ , на которой скачком изменяются параметры течения, в простейшей постановке впервые была рассмотрена Л. Д. Ландау [72].

Анализ показал, что при скорости потока до плоскости Σ большей чем его скорость после Σ фронт пламени устойчив, в противном случае фронт неустойчив. Так как скорость притока свежей смеси к фронту всегда меньше скорости течения продуктов сгорания, был сделан вывод об абсолютной неустойчивости фронта пламени.

Более строгое исследование вопроса приводит к уравнению Матье [97], дающему, как известно, неограниченно возрастающие решения только в отдельных областях плоскости параметров.

Таким образом, если в трубе почему-либо возникают колебания столба газа, то в их ритме происходит изменение структуры пламени (например, изменение его площади за счет искривлений или изменение условий протекания химической реакции). А это в свою очередь приводит к периодическому изменению тепловыделения (скорости сгорания), вследствие чего могут усиливаться и поддерживаться акустические колебания. При этом колеблющаяся среда будет увлекать за собой фронт пламени.

В любой задаче о поддержании колебаний теплом очень важен вопрос о фазах передачи тепла и колебания газа. Если тепло сообщается газу в момент наибольшего сжатия или отводится в момент наибольшего разрежения, то акустические колебания усиливаются. Это положение Рэлея [111] было обобщено Б. В. Раушенбахом [97], установившим, что поддержание колебаний газа возможно при значительных сдвигах фаз между максимумами тепловыделения и давления.

Приведенный здесь механизм обратной связи может осуществляться и в других тепловых аппаратах.

В турбореактивных (ТРД) и прямоточных воздушных реактивных двигателях (ПВРД). В ПВРД и форсажной камере ТРД возможны вибрации, обусловленные почти всеми названными выше видами механизмов обратной связи. Если сопловой аппарат турбины ТРД не задресселирован, то продольные колебания потока возможны во всем тракте двигателя.

Чтобы в дальнейшем анализировать условия возбуждения, приведем здесь механизм, наблюдаемый в ТРД [97].

Пусть в плоскости сильного разрыва Σ расположены форсунки, распыливающие горючее, которое мгновенно сгорает. Если давление подачи горючего велико, а колебания давления в потоке незначительны, то расход горючего будет постоянным. В этих условиях возмущение теплоподвода Q может возникнуть только в результате возмущения полноты сгорания горючего η . Количество тепла, фактически получаемое при сгорании введенного в поток горючего с химической энергией Q_0 , равно $Q_0\eta_*$. На полноту сгорания в свою очередь наибольшее влияние оказывает коэффициент избытка воздуха α_* , т. е. $\eta_* = \eta_*(\alpha_*)$. Коэффициент α_* представляет собой отношение фактического количества воздуха к теоретически необходимому для полного сгорания введенного в поток горючего. В силу постоянства расхода горючего он зависит только от массы воздуха, подходящего в секунду

$$\alpha_* = k\rho_{*1}v_{*1}.$$

здесь $k = \text{const}$; ρ_{*1} и v_{*1} — плотность и скорость газа перед зоной горения.

Стационарные значения этих параметров будем обозначать индексом «0», а их возмущения без индекса

$$\eta_* = \eta_0 + \eta, \quad \alpha_* = \alpha_0 + \alpha,$$

$$\rho_{*1} = \rho_{01} + \rho_1, \quad v_{*1} = v_{01} + v_1.$$

Тогда, используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$Q = Q_0 \eta, \quad \eta = \frac{\partial \eta_0}{\partial \alpha_0} \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \alpha_0^2} \alpha^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \alpha_0^3} \alpha^3, \quad (1.1)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{\rho_{01}} \rho_1 + \frac{\alpha_0}{v_{01}} v_1 + \alpha_0 \frac{\rho_1 v_1}{\rho_{01} v_{01}}.$$

Далее полагаем $v_1 \ll v_{01}$, $\rho_1 \ll \rho_{01}$ и ограничиваемся линейным приближением. Считая течение до поверхности Σ адиабатическим, будем иметь зависимость

$$p_1 = (\kappa p_{01} / \rho_{01}) \rho_1, \quad (1.2)$$

где κ — коэффициент адиабаты; p_1 — возмущение давления.

Из формул (1.1), (1.2) получим

$$Q = Q_v v_1 + Q_p p_1, \quad (1.3)$$

где

$$Q_v = Q_0 \frac{\alpha_0}{v_{01}} \frac{\partial \eta_0}{\partial \alpha_0}, \quad Q_p = Q_0 \frac{\alpha_0}{\kappa \rho_{01}} \frac{\partial \eta_0}{\partial \alpha_0}.$$

Зависимость (1.3) — это математическое выражение механизма обратной связи.

С. Жидкостные ракетные двигатели (ЖРД). Различают низкочастотные и высокочастотные колебания давления в камере ЖРД. К первым относят колебания с частотой 50—100 гц, ко вторым — акустические колебания с частотами более 1000 гц. Возможно также одновременное возникновение обоих видов неустойчивости.

Низкочастотные колебания охватывают всю массу газа в камере. Время распространения возмущений мало по сравнению с периодом общих колебаний, так что эффект горения, происходящего в какой-либо точке, независимо от ее положения сразу передается по всей камере. По

этой причине при низкочастотных колебаниях не нужно рассматривать волновые явления и определять место горения в камере.

Применительно к ЖРД наиболее детально разработан механизм обратной связи, основанный на концепции о запаздывании горения [138]. Постепенное превращение реагирующей топливной смеси, движущейся в потоке после впрыска, заменяется скачкообразным превращением ее в продукты сгорания по истечении некоторого времени, называемого временем запаздывания. Полное время запаздывания можно представить в виде суммы постоянного времени, не зависящего от изменений физических параметров в камере, и переменного времени τ , которое зависит от последних. Среднее значение τ обозначим через τ_0 . Обычно τ колеблется почти в противофазе по отношению к давлению (рис. 1). Скорость горения колеблется в фазе с изменениями времени запаздывания, т. е. достигает наибольшего значения — при наибольшей скорости уменьшения τ ($d\tau/dt \sim \min$) и наименьшего при $d\tau/dt \sim \max$.

Это приводит к тому, что колебания скорости горения запаздывают по сравнению с колебаниями τ на четверть периода. В свою очередь влияние колебаний скорости горения на давление в камере тоже имеет некоторое время запаздывания τ' . Если сумма $\tau + \tau'$ равна полупериоду колебаний давления, то создаются условия для самовозбуждения системы. Графически это изображено на рис. 1.

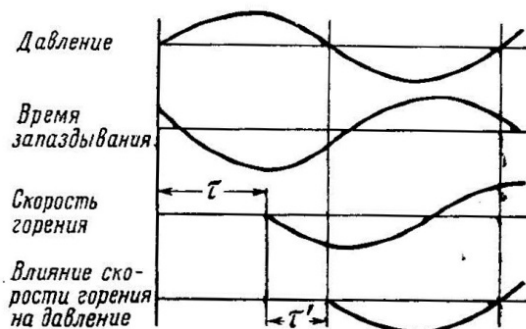


Рис. 1

Скорость подготовительных процессов перед воспламенением зависит от изменений всех физических параметров. Однако, принимая, что влияние всех параметров находится в одной фазе с влиянием местного давления, скорость процесса f_* можно выразить в форме

$$f_* = C p_*^n = C (p_0 + p)^n, f_0 = C p_0^n \quad (1.4)$$

Показатель n , названный в работе [138] коэффициентом взаимодействия, зависит от вида топлива, способа организации горения и т. д.

Зависимость между τ и возмущениями давления p может быть получена с помощью следующих рассуждений. Воспламенение в условиях спокойного горения происходит только тогда, когда подготовительные процессы достигают некоторого уровня E , который для частицы топлива, впрыснутой в момент $t - (\tau_1 + \tau_0)$ и сгорающей в момент t , можно выразить так (τ_1 — постоянное время запаздывания):

$$E = \int_{t-\tau_1-\tau_0}^t f_0(t') dt' = \int_{t-\tau_0}^t f(t') dt'.$$

Предположим, что при вибрационном горении воспламенение происходит при том же уровне, т. е.

$$\int_{t-\tau_0}^t f_0(t') dt' = \int_{t-\tau_j}^t f_*(t') dt' \quad (1.5)$$

Интеграл вычисляется вдоль пути частицы топлива со времени начала подготовительных процессов в точке x_1 до момента воспламенения в точке x_2 . Если $\tau_1 = 0$, то x_1 означает координату головки камеры. Дифференцирование (1.5) по t с учетом выражений (1.4) дает

$$[p_0 + p(x_2, t)]^n - \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) [p_0 + p(x_1, t - \tau)]^n = 0. \quad (1.6)$$

Линеаризуя (1.6), находим [138]

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{n}{p_0} [p(x, t) - p(x, t - \tau)], \quad (1.7)$$

Д. Ракетные двигатели твердого топлива (РДТТ). Основной частью РДТТ является заряд (шашка), помещенный в корпус.

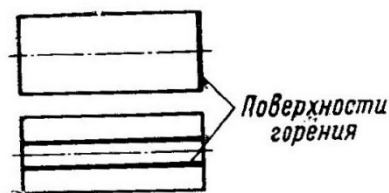


Рис. 2

Заряд изготавливают из специальных порохов прессованием или отливкой в форму. Цилиндрические заряды бывают торцевого и трубчатого горения (рис. 2). Поверхности горения делаются также специально профилированными.

Проблема неустойчивого горения в РДТТ возникла в начале второй мировой войны в Англии при разработке двигателей [76]. С тех пор она продолжает оставаться одной из основных трудностей при их создании. Главной причиной неустойчивой работы РДТТ также является взаимодействие между акустическими колебаниями в газе и горящим топливом. Действительно, если случайные колебания давления вблизи поверхности горения вызывают колебания скорости горения и если между ними устанавливается соответствующий сдвиг фаз, то возможно возбуждение акустических колебаний. Этот вопрос освещен в ряде исследований [154], [76], [127], [133], [143]. Возможны также случаи неакустической неустойчивости («чихание» и низкочастотная неустойчивость [172].)

Таким образом, для анализа динамического поведения систем, подобных описанным, необходимо пользоваться уравнениями движения сжимаемой жидкости, сплошного упругого тела, тонких оболочек. Решения этих уравнений должны удовлетворять определенным условиям контакта в местах касания оболочки с газом и упругим наполнителем, условиям закрепления и т. д. Поэтому в следующих параграфах этой главы рассмотрим указанные уравнения движения, граничные условия, колебания газов в замкнутых объемах и некоторые другие вопросы.

§ 2. Теория распространения возмущений в газе

*Уравнения гидромеханики идеальной жидкости.
Определение гидродинамического давления*

Вне областей с большими градиентами скорости и температуры (в зонах подвода тепла, пограничного слоя, ударных волн) реальный газ можно считать идеальным, т. е. лишенным вязкости и теплопроводности.

Обозначим через ρ , p , $\mathbf{v}$, t , κ — плотность, давление, вектор скорости, время, коэффициент адиабаты. Условимся обозначать возмущенные и стационарные значения параметров соответственно индексами * и 0, а возмущения параметров — без индексов (например, $p_* = p_0 + p$ и т. д.). Скорость распространения возмущений в газе (скорость звука) обозначим a_* . Тогда

$$a_*^2 = dp_*/d\rho_*. \quad (2.1)$$

Будем рассматривать безвихревое и изэнтропическое течение газа. В силу этого допущения можно написать соотношение

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right)^\kappa \quad (2.2)$$

и ввести потенциал скоростей Φ ,

$$\mathbf{v}_* = \nabla \Phi_* \quad (\Phi_* = \Phi_0 + \Phi), \quad (2.3)$$

где

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

— векторный оператор Гамильтона¹.

Запишем уравнение сохранения массы или уравнение неразрывности сжимаемой жидкости [70]

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \nabla(\rho_* \mathbf{v}_*) = 0 \quad (2.4)$$

и уравнение Эйлера безвихревого движения в отсутствие массовых сил

$$\frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(v_*^2) = - \frac{1}{\rho_*} \nabla p_*. \quad (2.5)$$

Подставив (2.3) в уравнение (2.5), замечаем, что в последнем символ ∇ можно вынести за скобки. Следовательно, величина в скобках будет только функцией времени. Эта функция может быть включена в определение Φ_* , что не изменит соотношения (2.3). При этом получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi_*}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_*)^2 + \int \frac{dp_*}{\rho_*} = C,$$

называемое интегралом Коши — Лагранжа.

Интегрируем последний член левой части с помощью соотношения (2.2). Определив постоянную из условия, что в невозмущенном газе

¹ В цилиндрической и сферической системах координат

$$\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\beta \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Напомним, что $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$.

$\Phi = 0$, находим

$$\frac{p_*}{p_0} = \left\{ 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left(\frac{p_0}{p_0} \right) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_*)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_0)^2 \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (2.6)$$

Разлагая правую часть (2.6) в биномиальный ряд и отбрасывая члены в степени, выше второй относительно Φ , получаем для возмущенного давления

$$p_* = p_0 - \rho_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \Phi_0 \nabla \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{2 a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \Phi_0 \nabla \Phi \right)^2 + \dots \right]. \quad (2.7)$$

Здесь

$$\nabla \Phi_0 \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad a_0 = \left(\kappa \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

— скорость звука в движущейся невозмущенной среде.

Таким образом, для определения давления в среде достаточно знать потенциал скоростей Φ . Подставив (2.3) в (2.4) и исключив p_* с помощью (2.2) и (2.1), найдем уравнение для Φ [70]

$$a_*^2 \nabla^2 \Phi_* = \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_* \nabla) \right] (\nabla \Phi_*)^2$$

или в скалярной форме

$$\begin{aligned} & \left[a_*^2 - \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial x^2} + \left[a_*^2 - \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial y^2} + \left[a_*^2 - \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial t^2} - \\ & - 2 \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial x} \frac{\partial \Phi_*}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi_*}{\partial y} \frac{\partial \Phi_*}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \Phi_*}{\partial z} \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial z \partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi_*}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \Phi_*}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial z \partial t} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Это основное уравнение для потенциала скоростей в сжимаемой жидкости. Скорость в возмущенной среде a_* получается из (2.1) и (2.2) сопоставлением с (2.6)

$$a_*^2 = a_0^2 - (\kappa - 1) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \Phi_0 \nabla \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right\}. \quad (2.9)$$

Скорость звука в невозмущенном потоке a_0 связана со скоростью в покоящемся газе a_1 формулой

$$a_0^2 = a_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2} (\nabla \Phi_0)^2.$$

Введение потенциала скорости приводит к существенному упрощению в задачах распространения волн, ибо процесс описывается лишь одной функцией координат и времени, из которой с помощью дифференцирования получаются как вектор скорости (2.3), так и гидродинамическое давление (2.7).

Для несжимаемой жидкости ($\rho_* = \rho_0 = \text{const}$), согласно (2.1), $a_* = \infty$. Поэтому уравнение для потенциала независимо от уровня возмущений является линейным

$$\nabla^2 \Phi = 0,$$

где символ ∇^2 — оператор Лапласа. Заметим, что выражение (2.7) остается нелинейным

$$p_* = p_0 - \rho_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \Phi_0 \nabla \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right].$$

Это соотношение можно также получить из уравнения (2.6), полагая в нем показатель адиабаты $\kappa = \infty$.

Функция φ должна определяться из системы нелинейных дифференциальных уравнений (2.8) и (2.9). Известно очень мало примеров решения этой системы. В § 7 будет рассмотрена одномерная нелинейная задача.

Для нас особо важно представление уравнений (2.7) — (2.9) в цилиндрической и сферической системах координат. Если в цилиндре движется газ со средней скоростью U_0 , то следует положить $\nabla\varphi_0 = a_x U_0$. Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi_*}{\partial x} = U_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi_*}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial\varphi_*}{r\partial\theta} = \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}. \quad (2.10)$$

Путем исключения a_*^2 (2.8) и (2.9) можно привести к одному нелинейному дифференциальному уравнению. Введем в него соотношения (2.10) и оценим порядки величин. Пусть $\alpha \approx \omega/a_0$ и A — коэффициент изменчивости и амплитудное значение функции φ . Если в указанном уравнении линейные члены принять за единицу, то квадратические и кубические члены будут иметь порядок $\omega A/a_0^2$ и $(\omega A/a_0^2)^2$. Рассматривая только возмущения, для которых $\omega^2 A^2 \ll a_0^4$, кубические члены можно опустить. Уравнения (2.7) — (2.9) примут вид

$$p_* = p_0 - p_0 \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[(1 - M^2) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right)^2 - \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{2M}{a_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right] \right\}, \quad (2.11)$$

$$a_0^2 \nabla^2 \varphi = \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} + (\kappa - 1) \nabla^2 \varphi + 2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi. \quad (2.12)$$

Здесь символ ∇^2 — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \quad (2.13)$$

а $M = U_0/a_0$ — число Маха.

Теперь рассмотрим случай среднего движения газа с осевой и тангенциальной составляющими скорости $U(r)$ и $V(r)$, а для возмущений ограничимся выводом линейных уравнений¹. Из условия потенциального течения газа

$$\nabla \times \mathbf{v}_0 = \text{rot } \mathbf{v}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} \mathbf{a}_x - \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{a}_\theta = 0$$

находим, что $U = \text{const}$, $Vr = \text{const}$ или

$$U = U_0, \quad V = V_0 R/r,$$

где V_0 — тангенциальная скорость на радиусе R . Циркуляция по кругу для любого r остается постоянной: $\Gamma = 2\pi rV$. Круговое движение вблизи оси цилиндра ($r = 0$) не рассматриваем. Далее будем предполагать, что во всех точках выполняется условие

$$\sqrt{U^2 + V^2} < a_0.$$

Учитывая, что

$$\nabla\varphi_0 = U_0 \mathbf{a}_x + (V_0 R/r) \mathbf{a}_\theta$$

или

$$\frac{\partial\varphi_*}{\partial x} = U_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi_*}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_*}{\partial\theta} = \frac{R}{r} V_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad (2.14)$$

¹ Учет общего вращения газа в цилиндрической камере также представляет интерес. Например, в камеру ТРД воздух подается через завихритель (этим достигается уменьшение осевой скорости); в циркуляционных печах вращение является основным движением газа.

и производя линеаризацию (2.7) — (2.9), получим

$$p_* = p_0 - \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{RV_0}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right),$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + M^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{2M}{a_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{2MN}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \theta} +$$

$$+ N^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{2N}{a_0 r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial t}, \quad (2.15)$$

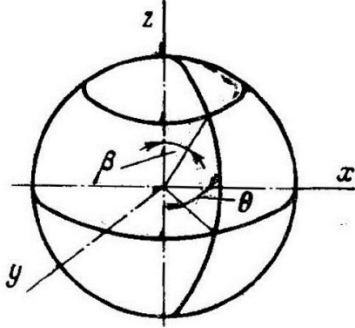


Рис. 3

где

$$N = \frac{V_0 R}{a_0 r}, \quad a_0^2 = a_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2} \left[U_0^2 + \left(\frac{R}{r} V_0 \right)^2 \right],$$

a_1 — скорость звука в заторможенном потоке.

В сферической системе координат (рис. 3) уравнения (2.7) — (2.9) для покоящегося газа ($\nabla \Phi_0 = 0$) преобразуются к виду (кубические члены также отброшены)

$$p_* = p_0 - \rho_0 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \right\},$$

$$a_0^2 \nabla^2 \Phi = \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\kappa - 1) \nabla^2 \Phi + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \right. \right. \quad (2.16)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Распространение малых возмущений в газе

Волны малой амплитуды или акустические волны описываются линейными уравнениями. Линеаризация уравнений (2.11), (2.12) дает

$$p_* = p_0 - \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \quad (2.17)$$

$$a_0^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi. \quad (2.18)$$

При этом возмущения скоростей, очевидно, определяются соотношениями (2.3): $v_x = \partial \Phi / \partial x$, $v_y = \partial \Phi / \partial y$, ... Это — основные уравнения акустики движущейся среды. В линеаризованных уравнениях нет надобности сохранять индекс у a_0 , поэтому в дальнейшем вместо a_0 будем писать a .

Уравнение (2.18) справедливо для участков, где нет источников возбуждения. Волны можно возбудить двумя основными способами: колеблющимися поверхностями (мембрана, пластина, поршень, узкий фронт пламени и т. д.), периодическим притоком вещества или тепла в среду или же распределенными в пространстве внешними силами.

Возбудители первого типа расположены в той области, где уравнение (2.18) уже нарушается. Поэтому такие источники учитываются граничными условиями. Влияние второго типа возбудителей может быть включено в волновое уравнение [104]

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - q(x, y, z, t) \quad (U_0 = 0),$$

где q — плотность распределенной системы источников. В случае консер-

вативных внешних сил общее волновое уравнение имеет вид [104]

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) - q(x, y, z, t).$$

Здесь Π — потенциал внешней силы, действующей на единицу массы газа.

Рассмотрим, как более простой случай, распространение волн в газе, заключенном в трубу прямоугольного сечения с абсолютно жесткими стенками (рис. 4).

Предположим, что труба весьма длинная, а в сечении $x = 0$ задано распределение скоростей

$$v_x = V(y, z) e^{i\omega t}, \quad (2.19)$$

где V — амплитуда, а ω — круговая частота возбудителя. Практически в этом сечении может размещаться, например, устройство типа клапана или упругая пластинка с множеством отверстий для прохождения газа. Таким образом, по нашей классификации задач, данной в § 1, это — пример колебательной системы с внешним источником возбуждения.

Решение уравнения (2.18) проведем по методу Фурье (разделения переменных). Считая процесс гармоническим по времени с частотой ω , представим потенциал φ в форме

$$\varphi = X(x) Y(y) Z(z) e^{i\omega t}. \quad (2.20)$$

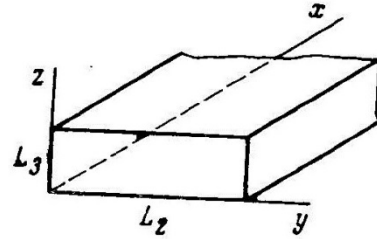


Рис. 4

Тогда дифференциальное уравнение (2.18) примет вид¹

$$\frac{1-M^2}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{2iM\mu}{X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\mu^2, \quad (2.21)$$

$$\mu = \omega/a, \quad M = U_0/a$$

Так как это равенство должно тождественно выполняться для всех значений x, y, z , то каждый член левой части будет постоянным

$$\frac{1-M^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{2iM\mu}{X} \frac{dX}{dx} = -\alpha^2, \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2.$$

Знаки этих постоянных выбираем так, чтобы решения выражали как можно нагляднее физическую картину. В силу (2.22) из (2.21) получим важное соотношение

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \mu^2. \quad (2.23)$$

Подстановка решений для X, Y, Z в (2.20) дает

$$\varphi = (A_1 e^{-i\lambda' x} + A_2 e^{i\lambda'' x}) (B_1 e^{-i\beta y} + B_2 e^{i\beta y}) (C_1 e^{-i\gamma z} + C_2 e^{i\gamma z}) e^{i\omega t}. \quad (2.24)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{1}{1-M^2} (\sqrt{(1-M^2)\alpha^2 + M^2\mu^2} - M\mu), \\ \lambda'' &= \frac{1}{1-M^2} (\sqrt{(1-M^2)\alpha^2 + M^2\mu^2} + M\mu) \end{aligned} \quad (2.25)$$

¹ Уравнение (2.18) при $U_0 = 0$ после исключения из него временной функции $e^{i\omega t}$ становится уравнением Гельмгольца.

Значение $\beta = \gamma = 0$ соответствует только продольным волнам с потенциалом скоростей

$$\varphi = A_1 e^{-i\lambda' \left(x - \frac{\omega}{\lambda'} t\right)} + A_2 e^{i\lambda'' \left(x + \frac{\omega}{\lambda''} t\right)}. \quad (2.26)$$

В этом случае, согласно (2.23), (2.25), $\lambda' = \mu/(1+M)$, $\lambda'' = \mu/(1-M)$ и $\omega/\lambda' = a(1+M)$, $\omega/\lambda'' = a(1-M)$. Оба члена (2.26) допускают простую интерпретацию. Замечаем, что значение первого члена не изменяется при увеличении на одинаковую величину x и $(\omega/\lambda')t$. Поэтому данное значение потенциала в точке x в момент t оказывается в более поздний момент $t + \tau$ в точке с координатой $x + \frac{\omega}{\lambda'} \tau$. Следовательно, первый член (2.26) описывает волну, которая распространяется со скоростью $\omega/\lambda' = a(1+M)$ в положительном направлении оси x . Точно так же второй член (2.26) представляет волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x со скоростью $a(1-M)$. Смысл таких значений скоростей ясен: волна распространяется со скоростью a относительно среды, движущейся со скоростью U_0 .

Таким образом, любая одномерная или, как говорят, плоская волна может быть составлена из серии двух волн, бегущих в противоположном направлении. Физически вполне ясно, что две бегущие навстречу другу другу волны с одинаковыми интенсивностями и скоростями в сумме должны образовать стоячую волну. Действительно, при $A_1 = A_2$ и $M = 0$ (только тогда их скорости равны) из (2.26) получаем

$$\varphi = 2A_1 \cos \alpha x e^{i\omega t}.$$

Стоячая волна возникает, например, в трубе с закрытым концом в результате полного отражения первоначальных волн. Если же труба бесконечно длинная, то отраженных волн не будет, т. е. $A_2 = 0$.

Для определения коэффициентов выражения (2.24) обратимся к граничным условиям на боковых поверхностях и условию (2.19). Вычислим колебательные скорости $v_y = \partial\varphi/\partial y$, $v_z = \partial\varphi/\partial z$, и приравняем их нулю при $y = 0$, L_2 и $z = 0$, L_3 . Тогда получим

$$\begin{aligned} B_1 &= B_2, & \exp(2i\beta L_2) &= 1, \\ C_1 &= C_2, & \exp(2i\gamma L_3) &= 1. \end{aligned}$$

Логарифмируя второе выражение, находим $2i\beta L_2 = \ln 1 = 0 + 2\pi im$. Сделав то же и с четвертым выражением, будем иметь

$$\beta_m = m\pi/L_2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad \gamma_n = n\pi/L_3 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.27)$$

Числа β_m и γ_n называются волновыми, т. е. они показывают, сколько волн укладывается на длине 2π по осям y и z . Соответствующие длины волн равны $2\pi/\beta_m$ и $2\pi/\gamma_n$. Функция $B_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z$ ($B_{mn} = 4B_{1m}C_{1n}$), которую получаем из выражений в двух последних скобках (2.24), называется собственной или фундаментальной функцией. Вид собственной функции зависит от формы ограничивающих поверхностей и граничных условий на них. Форму колебаний, описываемую собственной функцией при определенных числах m и n , иногда называют колебаниями с модой (m, n) .

Поскольку $\mu = \omega/a$ задано, то, согласно (2.23), число α не может быть произвольным, а будет иметь значения

$$\alpha_{mn}^2 = \mu^2 - \beta_m^2 - \gamma_n^2. \quad (2.28)$$

Это накладывает ограничение и на значения λ' , λ'' в (2.25), которым также следует приписать индексы mn .

Таким образом, решение уравнения (2.18) для принятых нами условий имеет вид

$$\varphi = A_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z e^{-i(\lambda'_{mn} x - \omega t)}, \quad (2.29)$$

где $A_{mn} = A_1 B_{mn}$.

Общее решение образуется путем линейной комбинации функций типа (2.29)

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z e^{-i(\lambda'_{mn} x - \omega t)}. \quad (2.30)$$

Граничное условие в сечении $x = 0$ выражает равенство продольных скоростей среды и возбудителя (2.19)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V(y, z) e^{i\omega t}. \quad (2.31)$$

Обычный путь состоит в разложении $V(y, z)$ по собственным функциям для колебаний в направлении, перпендикулярном оси трубы [99]:

$$V(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z. \quad (2.32)$$

Коэффициенты Фурье определяются из выражения

$$V_{mn} = \frac{4}{L_2 L_3} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} V(y, z) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z dy dz.$$

Подставляя (2.30) и (2.32) в (2.31), найдем амплитуды

$$A_{mn} = iV_{mn}/\lambda'_{mn} \quad (2.33)$$

Колебания скорости и давления в трубе согласно (2.3), (2.17), (2.29) и (2.33) определяются

$$\begin{aligned} v_x &= \sum_m \sum_n V_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z \exp[-i(\lambda'_{mn} x - \omega t)], \\ v_y &= -i \sum_m \sum_n (\beta_m V_{mn}/\lambda'_{mn}) \sin \beta_m y \cos \gamma_n z \exp[-i(\lambda'_{mn} x - \omega t)], \\ v_z &= -i \sum_m \sum_n (\gamma_n V_{mn}/\lambda'_{mn}) \cos \beta_m y \sin \gamma_n z \exp[-i(\lambda'_{mn} x - \omega t)], \\ p &= \sum_m \sum_n P_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z \exp[-i(\lambda'_{mn} x - \omega t)], \\ P_{mn} &= \rho_0 (\omega - U_0 \lambda'_{mn}) V_{mn}/\lambda'_{mn}. \end{aligned}$$

Фазовая скорость. Собственная частота

Выше было показано, что плоская волна в покоящейся среде распространяется со скоростью звука a_1 , а в движущейся среде — со скоростью $a \pm U_0$ (относительно неподвижного наблюдателя). С какой скоростью распространяется волна в присутствии поперечных мод колебаний и возможно ли прохождение по трубе волн, модулированных по всем модам (m, n) ?

Для случая покоящейся среды этот вопрос подробно разобран в известных курсах по акустике [104, 99, 79]. Здесь будет учитываться дозвуковое среднее течение газа ($M < 1$).

Скорость распространения волны в данном направлении (в нашем случае по оси x), как видно из формулы (2.29), есть $a_{mn}^* = \omega/\lambda'_{mn}$. С другой стороны, $a_{mn}^* = a_{mn} + U_0$. Условимся называть величину a_{mn} фазовой скоростью. С учетом (2.25) и (2.28)

для фазовой скорости получаем

$$a_{mn} = \frac{\omega}{\lambda_{mn}} - U_0 = \frac{(1 - M^2) \omega}{\sqrt{\mu^2 - (1 - M^2)(\beta_m^2 + \gamma_n^2)} - M\mu} - U_0. \quad (2.34)$$

Отсюда для моды (0, 0) (плоской волны) находим $a_{00} = a$. При $M = 0$ из (2.34) следует

$$a_{mn} = \frac{\omega}{\sqrt{\mu_1^2 - (\beta_m^2 + \gamma_n^2)}} = \frac{a_1}{\sqrt{1 - (\beta_m^2 + \gamma_n^2)/\mu_1^2}}. \quad (2.35)$$

Так как величины μ , а также β_m , γ_n , согласно (2.27), вещественны, то скорость распространения волн всех мод, кроме плоской волны, больше скорости звука в свободном пространстве a . Это справедливо лишь в случае абсолютно жестких стенок трубы. Как будет показано в последующих главах, в результате учета упругости оболочки волновые числа β и γ могут принимать мнимые значения, что согласно (2.35) приводит к неравенству $a_{mn} < a$.

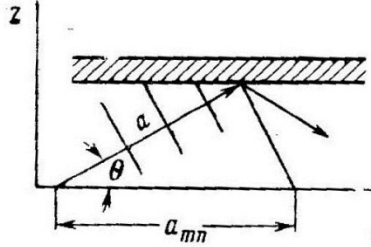


Рис. 5

Для случая покоящейся среды существует графическая интерпретация фазовой скорости [104]. Для простоты положим $\beta_m = 0$. Если θ — угол между осью x и направлением распространения волны (нормалью к фронту волны), то $a_{0n} = a/\cos \theta$ (рис. 5). Выражение угла θ через волновые числа равно $\cos \theta = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 - \gamma_n^2}$. Из рисунка следует, что под фазовой

нужно понимать скорость, с которой бегут фронты волн вдоль оси x . При $\gamma_0 = 0$ ($n = 0$) угол $\theta = 0$ и $a_{00} = a$. В другом предельном случае $\gamma_n = \mu$ угол

$\theta = \pi/2$ и скорость a_{0n} становится бесконечно большой; будут иметь место колебания только в направлении оси z . Возвратимся к выражению (2.34) и перепишем его так:

$$a_{mn} = a \frac{1 - M \sqrt{1 - (1 - M^2)(\beta_m^2 + \gamma_n^2)/\mu^2}}{\sqrt{1 - (1 - M^2)(\beta_m^2 + \gamma_n^2)/\mu^2} - M}. \quad (2.36)$$

Согласно этой формуле, a_{mn} ни при каких значениях M и вещественных волновых числах не может быть меньше a . При $M = 0,5$, $(\beta_m^2 + \gamma_n^2)/\mu^2 = 0,3$ фазовая скорость по (2.36) равна $a_{mn} = 1,47a$, а по (2.35) $a_{mn} = 1,2a$.

Условием обращения в бесконечность фазовой скорости в движущейся среде является равенство $\mu^2 = (\omega/a)^2 = \beta_m^2 + \gamma_n^2$, не зависящее от числа Маха. При этом $\lambda_{mn} = 0$, и волны в направлении оси x не возбуждаются. Остаются только поперечные колебания газа, которые происходят с собственными частотами, равными

$$\omega = \omega_{mn} = a \sqrt{\beta_m^2 + \gamma_n^2}.$$

§ 3. Волны в деформируемых твердых телах

Соотношения теории упругости

Векторное уравнение гармонических колебаний изотропного упругого тела, как известно, имеет вид [80]

$$a_i^2 \text{grad div } s - a_i^2 \text{rot rot } s + \omega^2 s = 0, \quad (3.1)$$

где

$$a_i^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_s, \quad a_t^2 = \mu/\rho_s \quad (3.2)$$

— квадраты скоростей распространения продольных и поперечных волн (волн расширения и сдвига); s — вектор смещения; ρ_s — плотность; λ и μ — упругие постоянные Ляме, связанные с модулями упругости E_s , G_s и коэффициентом Пуассона ν_s соотношениями

$$\lambda = \frac{E_s \nu_s}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)}, \quad \mu = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)} = G_s.$$

Выражение (3.1) эквивалентно трем скалярным уравнениям относительно компонент вектора s . Если это декартовы компоненты, то соответствующие скалярные уравнения будут содержать каждое только по одной компоненте,

что, конечно, всегда предпочтительнее. Однако удовлетворить их решения граничным условиям на криволинейных поверхностях тела сложно. Поэтому удобнее принять компоненты в системе координат, соответствующей поверхности тела.

Разделим s на продольную и поперечную компоненты $s = s_L + s_T$ [80]. Продольный вектор является градиентом скалярного потенциала $s_L = \text{grad } \varphi$ и определяет направление наискорейшего изменения потенциала φ (например в случае плоской волны s_L совпадает с направлением распространения волны). Поперечная компонента определяется как ротор векторного потенциала $s_T = \text{rot } A$. Продольные волны сопровождаются расширениями и сжатиями (изменением объема тела), а поперечные волны связаны со сдвиговыми деформациями (изменением формы тела). Такое разделение s на две части s_L и s_T следует из теоремы Гельмгольца, согласно которой любое векторное поле s , если оно однозначно и непрерывно, может быть представлено в виде суммы $\text{grad } \varphi + \text{rot } A$, причем $\text{div } A = 0$.

Пусть x_1, x_2, x_3 — ортогональные криволинейные координаты, a_1, a_2, a_3 — единичные координатные векторы, а h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ляме. Рассмотрим поверхность $x_1 = C$. Для определения поперечного поля s_T введем две скалярные функции ψ и χ , являющиеся решениями скалярных волновых уравнений, причем пусть часть поперечного поля s_M (ψ), определяемая функцией ψ , будет касательной к поверхности $x_1 = C$, а другая часть s_N (χ) — нормальной к ней. Как будет видно из дальнейшего, решения этих уравнений позволяют достаточно просто удовлетворять граничным условиям. Очевидно, каждый тип волн s_L, s_M, s_N должен удовлетворять уравнению (3.1).

Итак, вектор смещения положим состоящим из трех частей

$$s = s_L + s_M + s_N, \quad (3.3)$$

где

$$s_L = \text{grad } \varphi,$$

$$s_M = \text{rot}(a_1 \epsilon \psi) = \text{grad}(\epsilon \psi) \times a_1,$$

$$s_N = \frac{1}{\mu_t} \text{rot rot}(a_1 \epsilon \chi) = \mu_t a_1 \epsilon \chi + \frac{1}{\mu_t} \text{grad} \left[\frac{\partial(\epsilon \chi)}{\partial x_1} \right], \quad (3.4)$$

а функции φ, ψ, χ суть решения скалярных волновых уравнений, рассмотренных в § 2. Вектор s_N взят с множителем $1/\mu_t$ ($\mu_t = \omega/a_t$), чтобы размерность $\varphi, \epsilon \psi$ и $\epsilon \chi$ была одинаковой. В случае цилиндрической системы координат (если за x_1 принята координата по оси цилиндра) коэффициент $\epsilon = 1$, если в качестве x_1 принимается радиус, то $\epsilon = r$. Следует помнить, что в отличие от потенциала скоростей, введенного в § 2, здесь φ, ψ, χ — потенциалы смещений.

Выражение для s_L в указанных выше криволинейных координатах имеет вид

$$s_L = \text{grad } \varphi = \frac{a_1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

Нетрудно записать в криволинейных координатах также волны типа s_M и s_N .

По найденному вектору смещения s , вектора напряжений на поверхностях $x_1 = C_1, x_2 = C_2, x_3 = C_3$ определяются при помощи формул

$$\sigma_1 = \lambda a_1 \text{div } s + \mu a_1 (\nabla s + s \nabla), \quad (3.5)$$

$$\sigma_2 = \lambda a_2 \text{div } s + \mu a_2 (\nabla s + s \nabla), \quad (3.6)$$

$$\sigma_3 = \lambda a_3 \text{div } s + \mu a_3 (\nabla s + s \nabla). \quad (3.7)$$

Выражения для $\text{div } s$ и $\nabla s + s \nabla$ приведем далее.

Упругие волны в цилиндре и шаре

В цилиндрической системе координат имеем $x_1 = x$, $x_2 = r$, $x_3 = \theta$,

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_x, \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_\theta, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = r.$$

Согласно (3.4) смещения s_L , s_M , s_N равны

$$\begin{aligned} s_L &= \mathbf{a}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \\ s_M &= \mathbf{a}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \mathbf{a}_\theta \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ s_N &= \frac{1}{\mu_t} \left[\mathbf{a}_x \left(\mu_t^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) + \mathbf{a}_r \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial \theta} \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

где φ , ψ , χ — решения скалярных уравнений Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \mu_t^2 \varphi &= 0, \\ \nabla^2 \psi + \mu_t^2 \psi &= 0, \\ \nabla^2 \chi + \mu_t^2 \chi &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

удовлетворяющие соответствующим граничным условиям, ∇^2 — оператор Лапласа в цилиндрических координатах (2.13).

Складывая коэффициенты при одинаковых единичных векторах во всех типах волн (3.8), получаем компоненты перемещения. Например, перемещения по оси x равны

$$s_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\mu_t} \left(\mu_t^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right). \quad (3.10)$$

Операции $\operatorname{div} \mathbf{s}$ и $\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla$, входящие в формулы (3.5) — (3.7), в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{s} &= \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r s_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta}, \\ \nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla &= 2 \mathbf{a}_x \frac{\partial s_x}{\partial x} \mathbf{a}_x + 2 \mathbf{a}_r \frac{\partial s_r}{\partial r} \mathbf{a}_r + 2 \mathbf{a}_\theta \left(\frac{s_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{a}_\theta + \\ &+ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right] (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_r) + \left(\frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right) (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_x \mathbf{a}_r) + \\ &+ \left(\frac{\partial s_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_x}{\partial \theta} \right) (\mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_x \mathbf{a}_\theta). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Единичные векторы $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$ нужно умножать на $\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla$ слева и рассматривать только первые два вектора:

$$\mathbf{a}_x \mathbf{a}_x \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{a}_x \mathbf{a}_r \mathbf{a}_x = 0 \text{ и т. д.}$$

В сферической системе координат $x_1 = r$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \theta$,

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_\beta, \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_\theta; h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \beta.$$

Векторы продольных и поперечных смещений согласно (3.4) равны

$$\begin{aligned} s_L &= \frac{1}{\mu_t} \left(\mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\beta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right), \\ s_M &= \mathbf{a}_\beta \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \mathbf{a}_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \\ s_N &= \frac{1}{\mu_t} \left[\mathbf{a}_r \left(\mu_t^2 r \chi + \frac{\partial^2 (r \chi)}{\partial r^2} \right) + \mathbf{a}_\beta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \chi)}{\partial r \partial \beta} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial^2 (r \chi)}{\partial r \partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Операции $\operatorname{div} \mathbf{s}$ и $\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla$, входящие в формулы (3.5) — (3.7), в сферических координатах будут

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{s} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 s_r) + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (\sin \beta \cdot s_\beta) + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta}, \\ \nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla &= 2\mathbf{a}_r \frac{\partial s_r}{\partial r} \mathbf{a}_r + 2\mathbf{a}_\beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial s_\beta}{\partial \beta} + \frac{s_r}{r} \right) \mathbf{a}_\beta + \\ &+ 2\mathbf{a}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} + \frac{s_r}{r} + \frac{s_\beta}{r} \operatorname{ctg} \beta \right) \mathbf{a}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \beta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\beta}{r} \right) \right] \times \\ &\times (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_\beta \mathbf{a}_r) + \left[\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\theta}{r} \right) \right] (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_r) + \\ &+ \left[\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial s_\beta}{\partial \theta} + \frac{\sin \beta}{r} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{s_\theta}{\sin \beta} \right) \right] (\mathbf{a}_\beta \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_\beta). \end{aligned} \quad (3.13)$$

§4. Граничные условия. Акустический импеданс. Сверхзвуковое сопло

Идеализация области теплоподвода

При возбуждении волн тонким фронтом пламени (или вообще какими-либо поверхностями) влияние последнего можно учитывать граничными условиями (см. § 2). Для упрощения задачи стремятся рассматривать зону теплоподвода в виде тонкой поверхности разрыва. Если протяженность зоны горения мала по сравнению с длиной возбуждаемых волн, это оказывается вполне законным. При этом поверхность сильного разрыва Σ следует, конечно, наделить всеми основными свойствами зоны теплоподвода.

Исследование нестационарных процессов в зоне горения и сведение ее к тонкому фронту пламени в общем виде проводилось Б. В. Раушенбахом [97]. Для анализа устойчивости работы ЖРД Л. Крокко и Чжен Синь-и [138] также применяют идеализацию зоны горения. Следует заметить, что сведение протяженной зоны теплоподвода к поверхности разрыва использовалось почти всеми авторами, занимавшимися изучением термического возбуждения звука.

Под зоной горения в этих исследованиях понимается область, в которой происходят наиболее интенсивные колебания подвода тепла. Обычно это начальный участок горения, особенно чувствительный к колебаниям параметров поступающей топливной смеси. За этой зоной в процессе догорания может выделяться значительная доля общего количества тепла, что будет вызывать изменение температуры и, следовательно, скорости течения газа. Однако эти эффекты при рассматриваемой идеализации области теплоподвода не могут быть учтены (параметры следует усреднять). Для их учета необходимо рассматривать распределенное по объему горение (§ 14).

Введем безразмерные возмущения скорости, давления, энтропии и теплоподвода

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v/a, \quad \bar{p} = p/\kappa p_0, \\ \bar{s} &= s/c_p, \quad \bar{Q} = Q/Q_0 \quad (\kappa = c_p/c_v). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Все величины, относящиеся к зонам до поверхности Σ и после нее, обозначим соответственно индексами 1 и 2.

Связь между параметрами одномерных (продольных) колебаний справа и слева от Σ при возмущении теплоподвода $\bar{Q}$, устанавливаемая с помощью законов сохранения массы, импульса и энергии, имеет вид [97]

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_2} \bar{v}_2 + \bar{p}_2 + \bar{s}_2 &= \frac{1}{M_1} \bar{v}_1 + \bar{p}_1, \\ 2\bar{v}_2 + \left(M_2 + \frac{1}{M_2} \right) \bar{p}_2 - M_2 \bar{s}_2 &= \frac{1}{n} \left[2\bar{v}_1 + \left(M_1 + \frac{1}{M_1} \right) \bar{p}_1 \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \left(3M_2 + \frac{2}{(\kappa-1)M_2}\right) \bar{v}_2 + \left(M_2^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1}\right) \bar{p}_2 - M_2^2 \bar{s}_2 = \\ & = \frac{1}{n^2} \left[\left(3M_1 + \frac{2}{(\kappa-1)M_1}\right) \bar{v}_1 + \left(M_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1}\right) \bar{p}_1 + \bar{Q} \right]. \end{aligned}$$

Здесь принято, что течение до Σ изэнтропично ($\bar{s}_1 = 0$), а показатели адиабаты в воздухе и газе одинаковы ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$); $n = a_2/a_1$. Вид третьего уравнения системы (4.2) зависит от реализуемого механизма обратной связи. Здесь оно записано для случая возмущений теплоподвода, происходящих вследствие колебаний полноты сгорания и представленных зависимостью (1.3).

Решив (4.2) с помощью (1.3) относительно $\bar{v}_2$ и $\bar{p}_2$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= c_{11}\bar{v}_1 + c_{12}\bar{p}_1, \\ \bar{p}_2 &= c_{21}\bar{v}_1 + c_{22}\bar{p}_1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где коэффициенты c_{ij} являются функциями M_1 , M_2 , Q_v , Q_p .

Как следует из (4.3), при подводе тепла потоку газа разрыв терпят все параметры. Если же фронт горения в камере представляет собой источник массы (вырыск топлива в ЖРД), где продукты сгорания с обеих сторон поверхности раздела Σ имеют одинаковую температуру, то разрыв терпит только скорость, а давление и плотность остаются без изменения. Кроме того, в камере ЖРД $M_1 = 0$, а $M_2 = M$ мало (порядка 0,1). Тогда нелинеаризованное выражение закона сохранения массы имеет вид

$$\bar{\rho}_2 + \frac{\bar{v}_2}{M}(1 + \bar{\rho}_2) = \frac{\bar{v}_1}{M}(1 + \bar{\rho}_1) + \frac{m}{\rho_{02} v_{02}}, \quad \bar{p}_2 = \bar{p}_1 = \bar{p}, \quad (4.4)$$

где m — возмущение притока массы.]

Соотношения (4.3) и (4.4) являются граничными условиями фронта горения.

Толщина зоны горения, примыкающей к поверхности твердого топлива в РДТТ, обычно измеряется долями миллиметра и действительно мала по сравнению с длинами волн звукового или низкого ультразвукового диапазонов, наблюдаемых в двигателях. Поэтому ее можно считать принадлежащей поверхности топлива и, несмотря на сложные процессы с высокими градиентами температуры и плотности, а также с большими скоростями энерго- и массообмена, характеризовать только акустическим импедансом.

Удельный акустический импеданс — это отношение возмущения давления к возмущению скорости $z = p/v$. Поскольку по координате p и v изменяются, то импеданс будет различным в разных сечениях трубы. Здесь нас будет интересовать значение z на поверхности горения. Величина, обратная импедансу, — акустическая проводимость

$$y = 1/z = v/p. \quad (4.5)$$

В дальнейшем будем пользоваться обоими понятиями.

Решение системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процессы в зоне горения, является сложной задачей [76]. Рассмотрим здесь простейшую модель зоны горения. Массовый расход продуктов сгорания, образующихся на поверхности горения, равен

$$m_* = \rho_* v_* \quad (m_* = m_0 + m, \quad v_* = V_0 + v, \dots). \quad (4.6)$$

Выражая возмущение плотности через возмущение давления с помощью соотношения адиабатичности (2.2) $\rho = (\rho_0/\kappa p_0)p$ из (4.6) находим, что $v = m/\rho_0 - V_0 p/\kappa p_0$. Подставив последнее в (4.5), с учетом (4.1) будем иметь

$$y = \frac{V_0}{p_0} \left(\frac{\bar{m}}{\kappa \bar{p}} - 1/\kappa \right) \quad \left(\bar{m} = \frac{m}{m_0} \right).$$

Отметим, что V_0 — средняя скорость газов, нормальная к поверхности горения. Поверхность горения является усилителем подходящих к ней аку-

стических волн, если вещественная часть γ положительна, и гасителем — если последняя отрицательна.

Перепишем полученное соотношение в несколько иной форме. Давление со стороны газа равно нормальному напряжению на поверхности заполнителя $p = -\sigma_{nn}$, а эффективной скоростью колебаний является разность $v_n = -\partial s_n / \partial t$, где n — нормаль к поверхности горения. Обозначив характеристики зоны горения ζ_1 и ζ_2 ($\zeta_1 + i\zeta_2 = 1/\kappa - \bar{m}/\kappa\bar{p}$), зависящие, в частности, от частот, найдем [76]

$$v_n - \partial s_n / \partial t = (V_0 / p_0) (\zeta_1 + i\zeta_2) \sigma_{nn}. \quad (4.7)$$

Условия на поверхности деформируемого твердого тела

Потенциал скорости ϕ в газе или жидкости, вектор смещения s и тензор напряжений σ_{ij} в деформируемом твердом теле, на ограничивающих их поверхностях, должны удовлетворять определенным граничным условиям.

Если сплошной упругий цилиндр прочно соединен с цилиндрической оболочкой, то на поверхности контакта должны соблюдаться условия: равенство векторов смещения —

$$s = u \quad (4.8)$$

и равенство напряжений —

$$X = -\sigma_{rx}, \quad Y = -\sigma_{r\theta}, \quad Z = -\sigma_{rr}. \quad (4.9)$$

Здесь X, Y, Z — проекции давления на поверхность оболочки, стоящие в правых частях уравнений изгиба (§ 5). Если она считается абсолютно жесткой, то для решения задач достаточно условия $s = 0$.

Когда заполнитель вставлен в жесткую оболочку с возможностью беспрепятственного скольжения между ними (так, чтобы тангенциальные усилия не возникали), будут иметь место условия

$$s \cdot r = 0, \quad (\sigma \cdot r) \times r = 0, \quad (4.10)$$

где r — единичный вектор, направленный по радиусу.

Если холодная поверхность заполнителя граничит с газом, то нормальные скорость и напряжение на ней равняются возмущениям скорости и давления в газе, а тангенциальные напряжения отсутствуют

$$\partial s_n / \partial t = \partial \phi / \partial r, \quad (\sigma \cdot r) \cdot r = -p, \quad (\sigma \cdot r) \times r = 0. \quad (4.11)$$

На горячей поверхности последние два условия (4.11) также справедливы, так как эту поверхность можно рассматривать как источник массы.

Условие относительно скоростей дано выше, где оно представлено в форме акустической проводимости (4.7).

На поверхности соприкосновения газа с нулевой средней скоростью и упругой оболочки ставятся условия

$$\partial w / \partial t = \partial \phi / \partial r, \quad Z = p, \quad X = Y = 0, \quad (4.12)$$

где w — перемещение по нормали к срединной поверхности оболочки.

Выведем первые условия (4.11) и (4.12) в более общем виде. Если $F = 0$ представляет собой уравнение колеблющейся стенки, то условие равенства нормальных скоростей жидкости и стенки (условие непроницаемости) имеет вид [70]: $\partial F / \partial t + \nabla F \nabla \phi_* = 0$. Отсюда при наличии среднего течения в цилиндрической полости с составляющими скорости U_0 по оси x и V_0 по углу θ согласно выражениям (2.14) находим

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \left(U_0 + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \left(RV_0 + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (4.13)$$

Подстановка в (4.13) уравнения цилиндрической поверхности $F = R + s_n - r = 0$ приводит к следующему условию на поверхности $r = R + s_n$:

$$\frac{\partial s_n}{\partial t} + \frac{\partial s_n}{\partial x} \left(U_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial s_n}{\partial \theta} \left(R V_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (4.14)$$

Заменив здесь s_n на w , находим условие на поверхности цилиндрической оболочки: $r = R - h/2 + w$.

Их линейные части при $U_0 = V_0 = 0$ совпадают с первыми условиями (4.11), (4.12). Указанные условия можно удовлетворить при $r = R$. В худшем случае это вызывает лишь погрешность порядка h/R [16].

Условия на концах трубы в общем виде

Из концов камеры установки, где могут быть расположены всевозможные устройства для подачи рабочего тела, сопло и т. д., происходит излучение акустической энергии. Для приближенного учета этих потерь можно вводить акустический импеданс (или проводимость), о чем уже говорилось в начале параграфа.

Импеданс состоит из активной и реактивной частей

$$z = z_r + iz_i = p/v. \quad (4.15)$$

Первая из них связана с трением и излучением звука во внешнюю среду, а вторая — реакцией сил инерции (масс) или сил упругости. Реактивная часть в соответствии с этим подразделяется на инерционное и упругое сопротивление.

К сожалению, далеко не всегда величина z может быть определена. Приведем несколько известных случаев конструкции конца трубы, для которых найдено значение удельного импеданса.

Скорость v на жестко закрытом конце равна нулю. Поэтому согласно (4.15) $z = \infty$. Пожалуй, это единственно точное граничное условие. В § 2 оно было уже использовано.

Другой важный случай — открытый конец трубы. Известен импеданс открытого конца круглой трубы без фланца, приближенное значение которого при низких частотах (длинных волнах) равно [99]

$$z \approx \rho_0 R \omega (R \omega / 4a + i2/\pi), \quad (4.16)$$

для открытого конца с фланцем при низких и высоких частотах [79]

$$\begin{aligned} z &\approx \rho_0 R \omega (R \omega / 2a + i8/3\pi), \\ z &\approx \rho_0 a (1 + i2a/\pi R \omega), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где R — радиус трубы; a — скорость звука; ρ_0 — плотность.

Как видно из (4.16) и (4.17), при низких частотах $z_r \rightarrow 0$, так что излучения энергии из открытого конца мало. В этом случае колебания в открытой трубе так же медленно затухают, как и в закрытой. Реактивная часть z_i учитывает инерцию внешней среды перед устьем трубы. Эффект инерции или, как принято говорить в акустике, «эффект открытого конца», учитывается увеличением длины трубы на величину $8R/3\pi = 0,85 R$, когда она снабжена фланцем, и на $2R/\pi = 0,63 R$ — без фланца.

При реализации колебаний с очень низкими частотами в узких трубах $z \rightarrow 0$ и граничное условие может быть записано $p = 0$. Происходит полное отражение приходящих к открытому концу волн. В этом сечении будет находиться узел акустического давления и пучность скорости. Если окружающая среда имеет очень малую плотность, где вытекающие из трубы газы быстро рассасываются, то можно предположить, что условие $p = 0$ выполняется более строго. Заметим, что приближенным условием $p = 0$ широко пользовались в своих исследованиях Эйлер, Бернулли, Лагранж.

Для высоких частот (коротких волн) z оказывается полностью активным и равным волновому сопротивлению газа $\rho_0 a$. В этом случае не будет отраженных от конца волн. Создается пучок направленных волн, выходящих в пространство, подобно лучу прожектора. Для плоской волны (2.26)

$$\Phi = [A_1 \exp(-i\alpha x) + A_2 \exp(i\alpha x)] \exp(i\omega t)$$

условие $A_2 = 0$ может быть получено при любой частоте подключением к рассматриваемой трубе бесконечной трубы того же сечения (см. § 2). Более подробное исследование условий у открытого конца трубы дано в работах [80], [24] и др.

Если конец трубы замкнут при помощи плоского поршня, уравнение движения которого есть $L(w) = p$, то соответствующий удельный импеданс $z = L(w)/v$. Очевидно, это граничное условие может быть сформулировано также с помощью соотношения (4.13).

Недостаток приведенных значений импедансов для наших целей заключается в том, что в них не учитывается отличие плотностей и температур внутри и вне трубы, среднее

течение газа, упругость оболочки. Автору известна лишь одна статья [89], где учитывается первая из указанных особенностей. Отношение амплитуд отраженной и падающей волн $\eta = A_2/A_1$, очевидно, так же может служить граничным условием. Если индексами 1 и 2 обозначить параметры внутри и вне трубы, то для плоской волны, отражающейся от открытого конца полубесконечной трубы без фланца, модуль коэффициента η равен [89]

$$|\eta| = \exp \left[-\frac{\omega^2 R^2}{2a_1 a_2} \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \right].$$

Из-за характера принятых условий для слутной струи это выражение не дает правильного результата в интересном случае $\rho_{02} = 0$.

Влияние среднего течения газов при малых числах Маха можно не учитывать. Впрочем, в некоторых случаях импеданс или коэффициент отражения вообще не зависят от

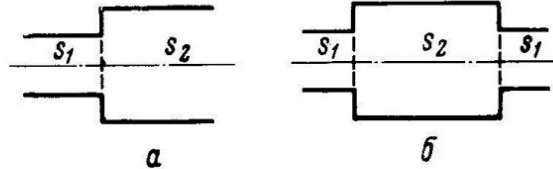


Рис. 6

числа Маха. Например, не изменяется акустическое сопротивление воздуха $\rho_0 a$. Коэффициент η в месте соединения двух труб сечения S_1 и S_2 (рис. 6, а) также не зависит от числа M [7]

$$\eta = \frac{1 - v}{1 + v}, \quad (v = S_2/S_1).$$

В качестве примера, когда коэффициент η зависит от M , приведем случай прохождения волн по трубе с расширением (рис. 6, б). В этом случае [7]

$$\eta = \frac{\exp \left(-\frac{2i\mu L}{1 - M^2} \right) - 1}{\left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right)^2 - \exp \left(-\frac{2i\mu L}{1 - M^2} \right)}.$$

Явление протекает так же, как и в покоящейся среде, но при длине трубы, равной $L/(1 - M^2)$. Так что, например, при $M = 0,2$ влияние среднего течения все еще мало.

Влияние упругости трубы на значения z и η по ряду причин также можно считать незначительным. Прямых расчетов в этом направлении, по-видимому, нет.

Здесь приводится не общая сводка найденных до настоящего времени значений концевых импедансов, а лишь иллюстрация тезиса — акустические граничные условия в принципе всегда могут быть сформулированы.

Акустическая проводимость сверхзвукового сопла

Поток в сверхзвуковом сопле при прохождении волн давления описан в работах [169], [139] и [138]. В [169] рассмотрен случай изотермических колебаний при очень низких и высоких частотах. В последних двух исследовался неизотермический случай, причем для средней области частот построены удобные графики, позволяющие определить акустическую проводимость сверхзвукового сопла. Изложим результаты работ, относящиеся к изэнтропическому прохождению волн в сверхзвуковом сопле.

Параметры стационарного потока p_0 , ρ_0 , v_0 , целиком определяемые формой сопла, считаются заданными. Полагая отношения $\bar{p} = p/p_0$, $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, $\bar{v} = v/v_0$ малыми по сравнению с единицей (p , ρ , v — возмущения) уравнения неразрывности и движения можно записать

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} + \bar{v}) = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{\rho} + 2\bar{v}) \frac{dv_0}{dx} + v_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \bar{p} \frac{dv_0}{dx} - \frac{p_0}{\rho_0 v_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}.$$

Третьим уравнением будет адиабатическое соотношение (2.2)

$$\bar{p} = \kappa \bar{\rho}. \quad (4.19)$$

Аналитическое решение системы уравнений (4.18) и (4.19) можно получить, если рассмотреть случай, когда v_0 в дозвуковой части сопла возрастает линейно. Пометив величины, относящиеся к критическому сечению, звездочками, будем иметь

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{v_0}{x} = \frac{a_*}{x_*}. \quad (4.20)$$

Введем новую переменную

$$y = \left(\frac{x}{x_*} \right)^2 = \left(\frac{v_0}{a_*} \right)^2, \quad (4.21)$$

а также приведенную частоту колебаний в сопле

$$\omega_* = \omega x_*^2 / a_*, \quad (4.22)$$

где ω — частота волн, идущих из камеры сгорания.

Подставляя (4.20), (4.21) в уравнение (4.18), (4.19) и исключая $\partial v / \partial x$, p и временной множитель $e^{i\omega t}$, получаем

$$(2 + i\omega_*) \bar{v} = (\kappa - 1 + i\omega_*) \bar{p} - (\kappa + 1)(1 - y) \frac{d\bar{p}}{dy}. \quad (4.23)$$

При помощи этого соотношения можно исключить $\bar{v}$ из любого уравнения (4.18), тогда находим

$$y(1 - y) \frac{d^2 \bar{p}}{dy^2} - 2 \left(1 + \frac{i\omega_*}{\kappa + 1} \right) y \frac{d\bar{p}}{dy} - \frac{i\omega_* (2 + i\omega_*)}{2(\kappa + 1)} \bar{p} = 0. \quad (4.24)$$

Уравнение (4.24) является комплексным гипергеометрическим уравнением с особыми точками при $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$. Однако нас интересует только решение в окрестности $y = 1$, ибо согласно (4.21) значение y должно находиться между неравным нулю минимумом у входа в сопло и конечным максимумом у выхода.

Поскольку поток в диффузоре сопла является сверхзвуковым, возмущения не могут передаваться к критическому сечению, поэтому распространение волн должно происходить только по направлению потока. Это условие впервые было использовано Цянь Сюэ-сеном.

Из уравнения состояния газов и (4.19) легко найти зависимости между безразмерными возмущениями $\bar{p}$, $\bar{\rho}$, $\bar{T}$ ($\bar{T} = T/T_0$) в каждом сечении. Например,

$$\bar{p} = \bar{T} \frac{1}{\kappa - 1}. \quad (4.25)$$

Нас будут интересовать параметры главным образом у входа в сопло.

При низких частотах $\bar{p}$ и $\bar{v}$ можно разложить по степеням $i\omega_*$

$$\bar{p}(y, \omega_*) = \bar{p}_0(y) + i\omega_* \bar{p}_{(1)}(y) + \dots, \quad (4.26)$$

$$\bar{v}(y, \omega_*) = \bar{v}_0(y) + i\omega_* \bar{v}_{(1)}(y) + \dots \quad (4.27)$$

Подставляя (4.26) в (4.24) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $i\omega_*$, получаем

$$(1 - y) \frac{d^2 \bar{p}_{(0)}}{dy^2} - 2 \frac{d\bar{p}_{(0)}}{dy} = 0, \quad (4.28)$$

$$y(1 - y) \frac{d^2 \bar{p}_{(1)}}{dy^2} - 2y \frac{d\bar{p}_{(1)}}{dy} = \frac{1}{\kappa + 1} \left(2y \frac{d\bar{p}_{(0)}}{dy} + \bar{p}_{(0)} \right). \quad (4.29)$$

Решение уравнения (4.28), которое не сингулярно при $y = 1$, равно $\bar{p}_{(0)} = \text{const}$. Поскольку решение (4.26) должно быть справедливо и при $\omega_* = 0$, согласно (4.25), будем иметь

$$\bar{p}_{(0)} = \bar{T}_1 / (\kappa - 1), \quad (4.30)$$

где $\bar{T}_1$ — температура у входа в сопло.

Интегрируя уравнение (4.29) с учетом (4.30), получаем

$$(1-y)^2 \frac{d\bar{\rho}_{(1)}}{dy} = \frac{\bar{T}}{\kappa^2 - 1} (\ln y - y) + C, \quad (4.31)$$

где постоянная C должна быть определена так, чтобы правая часть уравнения (4.31) при $y = 1$ обращалась в нуль, а производная $d\bar{\rho}_{(1)}/dy$ оставалась конечной. Следовательно

$$\frac{d\bar{\rho}_{(1)}}{dy} = \frac{\bar{T}_1}{\kappa^2 - 1} \frac{\ln y + 1 - y}{(1-y)^2}. \quad (4.32)$$

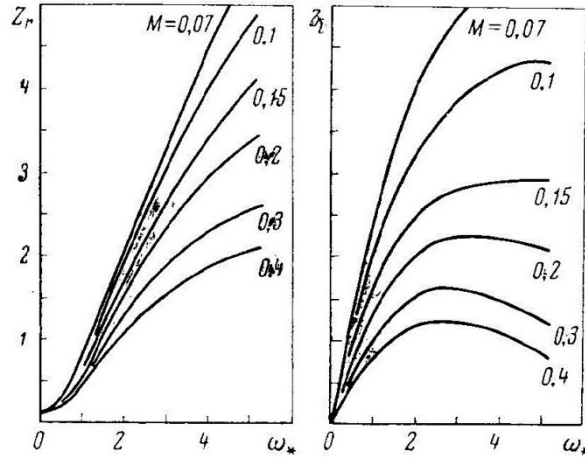


Рис. 7

Это выражение регулярно при $y = 1$. Интегрирование (4.32) и определение постоянной интегрирования из соотношений (4.25) и (4.30) дает для входного сечения ($y = y_1$)

$$\bar{\rho}_{(1)} = 0. \quad (4.33)$$

Вводя разложения (4.26), (4.27) в уравнение (4.23), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $i\omega_*$ и используя выражения (4.30), (4.32), (4.33), получаем для входа

$$\bar{v}_{(0)} = \frac{\bar{T}_1}{2}, \quad \bar{v}_{(1)} = -\frac{\bar{T}_1}{4} \left(\frac{2}{\kappa - 1} \cdot \frac{\ln y_1}{1 - y_1} + 1 \right). \quad (4.34)$$

Удельная акустическая проводимость сопла при низких частотах будет

$$y = v/p = \frac{M}{\rho_0 a} \cdot \frac{\bar{v}_{(0)} + i\omega_* \bar{v}_{(1)} + \dots}{\bar{\rho}_{(0)} + i\omega_* \bar{\rho}_{(1)} + \dots} = \frac{M}{2\rho_0 a} \left[\kappa - 1 - i\omega_* \left(\frac{\ln y_1}{1 - y_1} + \frac{\kappa - 1}{2} \right) \right]. \quad (4.35)$$

Проводимость сопла в линейном приближении прямо пропорциональна числу Маха на входе в дозвуковую часть. При малых M сопло будет иметь очень узкое критическое сечение. В пределе будет справедливо условие $v = 0$ (закрытый конец). Если дозвуковая часть сопла короткая, то согласно (4.22) ω_* мала, и удельная проводимость будет только активной

$$y_r = \frac{M(\kappa - 1)}{2\rho_0 a}.$$

Для всего диапазона частот решение уравнения (4.24), не сингулярное при $y = 1$, можно представить в виде

$$\bar{p} = C \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; 1 - y),$$

где Γ — гамма-функция; F — гипергеометрический ряд $1 + (ab/c)(1 - y) + \dots$. Коэффициенты a, b, c равны

$$ab = \frac{i\omega_*}{\kappa + 1} \left(1 + \frac{i\omega_*}{2} \right), \quad c = a + b + 1 = 2 \left(1 + \frac{i\omega_*}{\kappa + 1} \right),$$

т. е. зависят только от приведенной частоты ω_* . Теперь отношение $y = \frac{M}{\rho_0 a} \cdot \frac{\bar{v}_1}{\bar{\rho}_1}$ может быть вычислено, если предварительно определить $\bar{v}_1$ с помощью (4.23).

В зависимости от числа Маха на входе в сопло и приведенной частоты ω_* построены графики вещественной ($\rho_0 a/M$) y_r и мнимой ($\rho_0 a/M$) y_i частей числа ($\rho_0 a/M$) y (рис. 7) [138], где они обозначены z_r и z_i .

§ 5. Уравнения движения тонких упругих оболочек¹

Цилиндрические оболочки

Линейные уравнения изгиба тонкостенных цилиндрических оболочек, записанные относительно компонент перемещения срединной поверхности u, v, w по осям x, y, z (рис. 8), следующие [26]:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= - \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} X, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= - \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} Y, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} Z, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где L_{ij} — дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_{11} &= R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} R \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}, \\ L_{13} &= L_{31} = \nu R \frac{\partial}{\partial x} - b^2 R \left(R^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} \right), \\ L_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{3-\nu}{2} b^2 R^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta}, \\ L_{33} &= b^2 \left(\nabla^2 \nabla^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right) + 1; \\ \nabla^2 &= R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

— двумерный оператор Лапласа; X, Y, Z — компоненты поверхностного усилия, отнесенного к единице площади; R, h — радиус и толщина стенки оболочки; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; $b^2 = h^2/12R^2$, $\theta = y/R$.

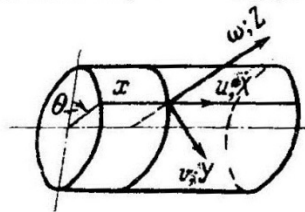


Рис. 8

При выводе уравнений (5.1) основными допущениями являются гипотеза Кирхгофа — Лява и предположение о малости компонент перемещения u, v, w .

Нормальные и сдвигающие усилия, изгибающие и крутящие моменты выражаются через перемещения по известным соотношениям [112], [26]. По этим усилиям и моментам легко найти напряженное состояние оболочки.

Для получения уравнений движения оболочки под действием нормального к поверхности давления p_* в (5.1) в соответствии с принципом Даламбера следует полагать

¹ В этом параграфе приведены лишь те уравнения, которые в дальнейшем часто будут использоваться. Уравнения конической оболочки, а также трехслойных оболочек даны при рассмотрении конкретных задач.

$$\begin{aligned} X &= -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ Z &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_*. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь ρ — плотность материала оболочки.

В некоторых случаях оказывается возможным пренебречь тангенциальными инерционными силами, полагая $X = Y = 0$. Тогда, вводя функцию F , связанную с перемещениями [26]

$$\begin{aligned} u &= b^2 R \left(R^4 \frac{\partial^5}{\partial x^5} - \frac{\partial^5}{\partial x \partial \theta^4} \right) F + R \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} - \nu R^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) F, \\ v &= 2b^2 R^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} \nabla^2 F - (2 + \nu) R^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 F}{\partial \theta^3}, \\ w &= \nabla^2 \nabla^2 F, \end{aligned} \quad (5.4)$$

систему (5.1) можно привести к одному уравнению (первые два уравнения удовлетворяются тождественно)

$$\begin{aligned} &(\nabla^2 + 1)^2 \nabla^2 \nabla^2 F - 2(1 - \nu) R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \nabla^2 F + \\ &+ \frac{R^4}{b_*^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \frac{R^2}{E h b_*^2} Z = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где введено новое обозначение $b_*^2 = h^2/12 (1 - \nu^2) R^2$. Недостаток этого более простого, чем система (5.1), уравнения состоит в том, что в ряде случаев трудно выбрать аппроксимирующую функцию для F , удовлетворяющую заданным граничным условиям.

Для тонких оболочек с отношением $h/R \leq 1/30$ члены, содержащие b^2 , в операторах (5.2) являются малыми, и их можно отбросить. Исключение составляет только член $b^2 \nabla^2 \nabla^2$ в операторе L_{33} , который должен быть оставлен. Если в (5.4) также отбросить члены с b^2 , то вместо (5.5) найдем

$$b_*^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F + R^4 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \frac{R^2}{E h} Z. \quad (5.6)$$

Это уравнение можно также получить из (5.5), пренебрегая младшими производными F по сравнению с $\nabla^8 F$. Такое пренебрежение справедливо при достаточно быстро меняющейся функции F , т. е. в тех случаях, когда на поверхности оболочки образуются частые волны (например, по окружности 4—5 волн).

Оболочку принято считать средней длины, если размеры ее таковы, что $kR \sim L$, где k — число полуволн, укладываемых на ее длине L .

Для получения уравнений осесимметричных деформаций в (5.1) следует положить нулю производные по θ . Второе уравнение (5.1), описывающее в этом случае кручение цилиндра, исключим из рассмотрения. Кроме того, отбросим малые члены, содержащие b^2 . Если не учитывать осевые инерционную и распределенную по поверхности внешнюю силы ($X = 0$), то, интегрируя первое уравнение (5.1), находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} w = C = \frac{1 - \nu^2}{E h} q,$$

где q — усилие, передающееся вдоль оболочки. Подстановка этого выражения и значения Z из (5.3) в третье уравнение (5.1) дает

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{E h}{R^2} w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p - \frac{\nu}{R} q, \\ D &= \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad m = \rho h. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Вопрос, когда осевую инерционную силу X можно считать пренебрежимо малой, будет обсуждаться при решении конкретных задач. Если ее учет не-

обходим, то, полагая для установившихся под действием силы $p_* = p(x, r) e^{i\omega t}$ колебаний

$$u = u(x) e^{i\omega t}, \quad w = w(x) e^{i\omega t},$$

первое и третье уравнения (5.1) можно записать в виде

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{v}{R} \frac{dw}{dx} + \sigma^2 u = 0, \quad \frac{v}{R} \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{1}{R^2} - \sigma^2 \right) w = \frac{1}{mc^2} p, \quad (5.8)$$

где $\sigma = \omega/c$, c — скорость распространения волн сжатия и расширения в оболочке

$$c^2 = E/\rho(1 - \nu^2).$$

Продифференцировав первое уравнение (5.8) один раз и подставляя в него выражение

$$\frac{du}{dx} = -\frac{R}{v} \left[\frac{h^2}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{1}{R^2} - \sigma^2 \right) w - \frac{p}{mc^2} \right], \quad (5.9)$$

а также $d^3 u/dx^3$, определенные из второго уравнения (5.8), получаем разрешающее уравнение относительно w [54]

$$\begin{aligned} \frac{d^6 w}{dx^6} + \sigma^2 \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{12}{h^2} \left(\frac{1 - \nu^2}{R^2} - \sigma^2 \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{12}{h^2} \sigma^2 \left(\frac{1}{R^2} - \sigma^2 \right) w = \\ = \frac{12}{h^2 mc^2} \left(\frac{d^2 p}{dx^2} + \sigma^2 p \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Решения приведенных уравнений должны удовлетворять определенным условиям закрепления на краях оболочки.

Сферические оболочки

Уравнения изгиба сферической оболочки, записанные относительно компонент перемещения u , v , w , направленных по угловым координатам β , θ (см. рис. 3) и внешней нормали, следующие [26]:

$$\frac{\partial \Delta_0}{\partial \beta} - b^2 \frac{\partial}{\partial \beta} (\nabla^2 + 2) w - (1 - \nu) \left(\frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial \Delta_1}{\partial \theta} - u + \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) = - \frac{(1 - \nu^2) R^2}{Eh} X, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\partial \Delta_0}{\partial \theta} - b^2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 + 2) w \right] + (1 - \nu) \left(\frac{\partial \Delta_1}{\partial \beta} + v - \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = \\ = - \frac{(1 - \nu^2) R^2}{Eh} Y, \end{aligned}$$

$$b^2 (\nabla^2 + 1 - \nu) [\Delta_0 - (\nabla^2 + 2) w] - (1 + \nu) \Delta_0 = - \frac{[(1 - \nu^2) R^2]}{Eh} Z,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (u \sin \beta) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + 2w, \\ \Delta_1 &= \frac{1}{2 \sin \beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (v \sin \beta) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right], \\ \nabla^2 &= \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь так же, как в случае цилиндрической оболочки, X , Y , Z — проекции поверхностного усилия на положительные направления β , θ , z .

При $X = Y = 0$ систему (5.11) можно привести к уравнению вида [26]

$$[b_*^2 (\nabla^2 + 1)^2 + 1] (\nabla^2 + 2) w = \frac{R_*^2}{Eh} (\nabla^2 + 1 - \nu) Z. \quad (5.12)$$

Уравнение равномерного растяжения — сжатия (без изгиба) получается из третьего уравнения (5.11) приравниванием нулю производных по β , θ

$$\frac{2Eh}{R^2(1 - \nu)} w = Z. \quad (5.13)$$

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ.
ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§6. Собственная частота и форма колебаний

*Колебания столба газа в трубе
конечной длины*

Рассмотрим колебания газа в трубе, учитывая результаты, изложенные ранее. Для простоты ограничимся одномерным случаем, т. е. только продольными колебаниями газа.

Пусть труба по концам замкнута на удельные импедансы z_1 и z_2 (рис. 9), так что имеем условия

$$\begin{aligned} p &= z_1 v, \quad (x = -L_1), \\ p &= z_2 v, \quad (x = L_2). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Предположим, что в сечении $x = 0$ находится плоскость теплоподвода Σ , на которой параметры слева и справа связаны соотношениями (4.3). Все величины, относящиеся к зонам $-L_1 < x < 0$ и $0 < x < L_2$, будем обозначать соответственно индексами 1 и 2.

Рассмотрим, при каких условиях в трубе могут возникнуть колебания, а также их частоты и формы при этом. Исчерпывающий ответ на эти вопросы может дать только нелинейная теория. Например, система, устойчивая относительно малых возмущений, описываемых линейной теорией, может стать неустойчивой при больших ее отклонениях («жесткое возбуждение»). Желая установить только пределы неустойчивости, когда возмущения еще малы, будем пользоваться линейным потенциалом скоростей (2.26) и линейными граничными условиями (4.3) и (6.1).

Введем в (2.26) вместо $i\omega$ комплексную величину $q = \nu + i\omega$ и запишем потенциалы для двух областей

$$\varphi_j = (A_{1j} e^{-\lambda_j' x} + A_{2j} e^{\lambda_j'' x}) e^{qt} \quad (j = 1, 2), \quad (6.2)$$

причем теперь

$$\lambda_j' = \frac{q}{a_j(1+M_j)}, \quad \lambda_j'' = \frac{q}{a_j(1-M_j)}.$$

Если в результате решения задачи получим $\nu > 0$, то потенциал (6.2) и, следовательно, давление и скорость со временем будут неограниченно возрастать. При $\nu < 0$ колебательный процесс будет затухающим. Случай $\nu = 0$ соответствует границе устойчивости или установившимся колебаниям. Действительно, тогда $q = i\omega$, а значит справедливы уравнения § 2.

Вычисляя давление p и скорость v по (2.17), (2.3), (6.2) и подставляя их в (4.3) и (6.1), приходим к четырем уравнениям относительно A_{11} , A_{21} , A_{12} , A_{22} . При этом следует учесть, что условия (4.3) записаны для безразмерных

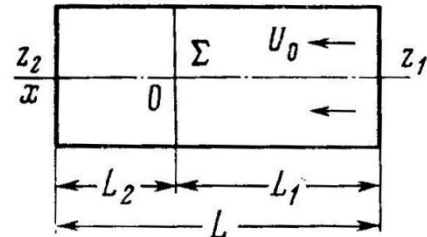


Рис. 9

параметров. Приравнивая нулю соответствующий определитель, получаем условие ненулевых решений

$$C_1 e^{(\beta_1 + \beta_2)q} + C_2 e^{\beta_1 q} + C_3 e^{\beta_2 q} + C_4 = 0, \quad (6.3)$$

причем

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{2L_1}{(1 - M_1^2) a_1}, \quad \beta_2 = \frac{2L_2}{(1 - M_2^2) a_2}, \\ C_1 &= (\bar{z}_1 - 1)(\bar{z}_2 + 1)(c_{12} - c_{22} - c_{11} + c_{21}), \\ C_2 &= (\bar{z}_1 - 1)(\bar{z}_2 - 1)(c_{12} + c_{22} - c_{11} - c_{21}), \\ C_3 &= (\bar{z}_1 + 1)(\bar{z}_2 + 1)(c_{12} - c_{22} + c_{11} - c_{21}), \\ C_4 &= (\bar{z}_1 + 1)(\bar{z}_2 - 1)(c_{12} + c_{22} + c_{11} + c_{21}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$ — безразмерные импедансы, которые получаются путем деления удельных импедансов на сопротивление волны $\rho_0 a$: $\bar{z}_1 = z_1 / \rho_0 a$, $\bar{z}_2 = z_2 / \rho_0 a$.

Уравнение (6.3) может быть решено численными способами. Частные случаи, допускающие аналитические и сравнительно простые численные решения, разобраны в [97], где показано, что различные моды колебаний затухают или усиливаются в разной степени. Наибольшее отличие в значениях собственных частот, определенных с учетом и без учета теплоподвода, составляет до 20%, что указывает на неточность упрощенного акустического правила определения частот. Такая разница объясняется тем, что поверхность разрыва Σ становится своеобразным отражателем волн.

Далее обнаруживается, что коэффициент ν зависит от положения поверхности теплоподвода Σ , в результате чего при перемещении этой поверхности вдоль трубы происходит затухание одних и возбуждение других мод колебаний. Соответственно в эксперименте при перемещении зоны подвода тепла происходило ступенчатое изменение частот.

Анализ условий возбуждения

Приведем анализ уравнения (6.3) для того простого случая, когда импедансы z_1 и z_2 только активные, и теплоподвод отсутствует. Этот случай для осесимметричных форм (не только одномерных) колебаний рассматривался в статье [55] с учетом упругости оболочки. Имеем: $Q_p = Q_v = 0$, $a_1 = a_2 = a$, $M_1 = M_2 = M$, $L_1 = 0$, $L_2 = L$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2L/a (1 - M^2)$. Поскольку теплоподвод отсутствует, то давление и скорость в сечении $x = 0$ должны быть непрерывными. Поэтому коэффициенты (4.3) будут равны $c_{12} = c_{21} = 0$, $c_{11} = c_{22} = 1$, а коэффициенты (6.4) примут значения

$$C_2 = C_3 = 0, \quad C_1 = -2(\bar{z}_1 - 1)(\bar{z}_2 + 1), \quad C_4 = 2(\bar{z}_1 + 1)(\bar{z}_2 - 1).$$

Введем обозначение $Z = -C_4/C_1$ и прологарифмируем уравнение (6.3)

$$\beta_2 (\nu + i\omega) = \ln Z. \quad (6.5)$$

Если $Z > 0$, то

$$\ln Z = \ln |Z| + 2ik_1\pi \quad (k_1 = 0, 1, 2, \dots),$$

при $Z < 0$

$$\ln Z = \ln |Z| + i\pi + 2ik_1\pi \quad (k_1 = 0, 1, 2, \dots).$$

Поэтому, приравнивая вещественные и мнимые части (6.5) и учитывая выражение для β_2 , найдем

$$\nu = \frac{(1 - M^2) a}{2L} \ln |Z|, \quad Z = \frac{(\bar{z}_1 + 1)(\bar{z}_2 - 1)}{(\bar{z}_1 - 1)(\bar{z}_2 + 1)}, \quad (6.6)$$

$$\omega_k = (1 - M^2) \frac{k\pi a}{2L} \begin{cases} k = 2k_1 = 0, 2, 4, \dots & \text{если } Z > 0 \\ k = 2k_1 + 1 = 1, 3, 5, \dots & \text{если } Z < 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

При $|Z| > 1$ процесс неустойчив ($\nu > 0$). Этот случай возможен, например, при $z_2 = \infty$ и любом положительном $\bar{z}_1$, или $\bar{z}_1 = \infty$ и отрицательном $\bar{z}_2$. Действительно, когда один конец трубы закрыт, а другой обладает отрицательным входным сопротивлением (приток энергии), система должна возбуждаться. Случаи $\bar{z}_1 > 0$ и $\bar{z}_2 < 0$ соответствуют притоку акустической энергии, так как импеданс $\bar{z}_1$ имеет положительный знак (направлен по положительной оси x), а $\bar{z}_2$ — отрицательный.

Если $|Z| < 1$, то система устойчива. Ясно, что это будет иметь место при истечении акустической энергии через какой-либо конец трубы или через оба конца, в чем легко убедиться по выражению (6.6).

Случаю $|Z| = 1$ соответствуют установившиеся колебания ($\nu = 0$). Этот режим осуществляется при сочетании значений $\bar{z}_1 = 0, \infty$ и $\bar{z}_2 = 0, \infty$, т. е. когда концы трубы полностью открыты или закрыты.

Следует пояснить, почему при открытых концах возможны незатухающие колебания. Такой вывод является следствием предположения, что при $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = 0$ на концах располагаются узлы давления ($p_1 = p_2 = 0$). Известно, что акустическая энергия $\Pi = \frac{1}{2} p v$ не передается через сечение, где расположены узлы давления ($p = 0$) или скорости ($v = 0$). Вопрос, насколько строго условие $p = 0$ соблюдается на открытом конце трубы, уже обсуждался в § 4. Установившиеся колебания имеют место также при $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$, т. е. при равенстве притока и излучения энергии.

Как видно из (6.7), собственные частоты ω_k зависят от скорости звука (или от температуры газа в трубе, ибо $a = (\kappa B T)^{\frac{1}{2}}$, где B — газовая постоянная), числа Маха, длины трубы и условий на ее концах. В трубе с условиями на концах $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$, $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = 0$, $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \infty$ реализуются колебания с $\nu = 0$ и четными k , ибо $Z = 1$. В случае $\bar{z}_1 = \infty$, $\bar{z}_2 = 0$, или $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_2 = \infty$ величина $Z = -1$, и, следовательно, $k = 1, 3, \dots$

Соответствующие собственные формы колебаний легко получаются из (6.2). Рассмотрим трубу с закрытым входом и открытым выходным сечением ($\bar{z}_1 = \infty$, $\bar{z}_2 = 0$). Из какого-либо граничного условия, например $v = 0$ при $x = 0$, находим $A_2 = A_1 (1 - M)/(1 + M)$. Используя эту зависимость и значения ω_k (6.7), при $\nu = 0$ запишем выражения для давления (2.17) и скорости (2.3) в виде

$$p = P_k \cos \frac{k\pi}{2L} x \exp \frac{ik\pi}{2L} [Mx + (1 - M^2) at], \quad (6.8)$$

$$v = -\frac{iP_k}{\rho_0 a} \sin \frac{k\pi}{2L} x \exp \frac{ik\pi}{2L} [Mx + (1 - M^2) at],$$

где

$$P_k = -2iA_{1k} \frac{\rho_0 \omega_k}{1 + M}$$

амплитуда колебаний давления в сечении $x = 0$, определяемая из начальных условий. Как видно из (6.8), возмущение давления представляет собой бегущую волну с амплитудой $P_k \cos \frac{k\pi}{2L} x$. Общими решениями, очевидно, являются суммы от (6.8) по нечетным k .

Из выражений (6.8) следует, что между давлением и скоростью существует сдвиг фаз $\pi/2$ (ν содержит множитель i). Там, где находится пучность давления (в сечении $x = 0$), располагается узел скорости и наоборот. При $M = 0$ получаем «чистую» стоячую волну, уже известную из § 2. По всей длине трубы давление одновременно обращается в нуль и одновременно достигает своего максимального значения, т. е. все точки системы находятся в одной фазе. Этого не происходит, когда есть среднее течение газа. Тогда сдвиг фаз колебаний давления или скорости между двумя сечениями x_2 и x_1 , как можно видеть по (6.8), равен $k\pi M (x_2 - x_1)/2L$.

Чтобы яснее представить довольно сложную картину изменения акустического давления, применим следующую интерпретацию [52]. По трем декартовым осям отложим длину трубы, вещественную и мнимую части давления (рис. 10). Тогда согласно первому выражению (6.8) получим некоторую

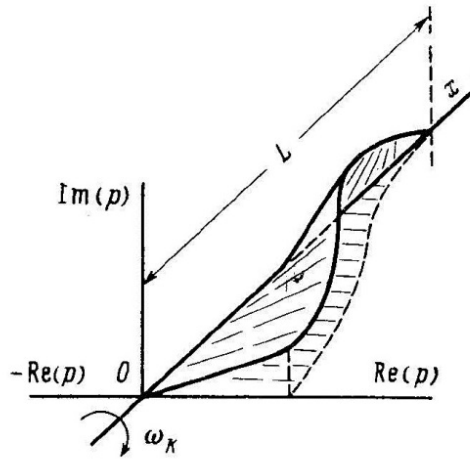


Рис. 10

винтовую поверхность с линейной закруткой по длине (взято $k = 1$). Проекция винтовой поверхности на вещественную плоскость при вращении винта относительно оси x с угловой скоростью ω_k будет давать фактическое значение давления. Теперь легко представить, что давление в разных сечениях достигает своего наибольшего значения и обращается в нуль в разное время; при этом гребень волны перемещается вдоль трубы. При $M=0$ винтовая поверхность обращается в плоскость, т. е. не будет сдвига фаз. Максимальный сдвиг фаз давления между входным и выходным сечениями (при $M \rightarrow 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = L$), для первой гармоники ($k = 1$) равен $\pi/2$, для $k = 2$ — полоборота и т. д.

Продольные колебания газа и твердого деформируемого тела

В качестве второго примера применения уравнения (6.3) рассмотрим совместные продольные колебания газа и деформируемого твердого тела. Пусть упругий наполнитель занимает область 1, а газ — область 2 (см. рис. 9). Наполнитель будет совершать продольные колебания, если только он может свободно скользить по корпусу. В этом случае твердая среда ведет себя как сжимаемая жидкость и колебания ее, как можно заключить из материалов § 3, описываются одним лишь скалярным уравнением. Это обстоятельство позволяет использовать для анализа колебаний указанной системы трансцендентное уравнение (6.3).

Предположим, что правый торец тела плотно скреплен с жестким дном $\bar{z}_1 = \infty$, а сечение 2 имеет только реактивный импеданс $\bar{z}_2 = i\bar{z}_i$. Кроме того, очевидно, $M_1 \equiv 0$. Рассмотрим «холодную» систему: $Q_v = Q_p = 0$, $M_2 = 0$. Чтобы было соблюдено условие непрерывности размерных значений давления и скорости на границе раздела $x = 0$, в (4.3) следует положить $c_{12} = c_{21} = 0$, $c_{11} = a_1/a_2$, $c_{22} = \rho_{01}/\rho_{02} = \rho_{01}a_1^2/\rho_{02}a_2^2$. Коэффициенты C_i примут следующие значения:

$$C_1 = -(\bar{z}_2 + 1) \left(1 + \frac{\rho_{01}a_1}{\rho_{02}a_2} \right) \frac{\bar{z}_1 a_1}{a_2}, \quad C_2 = -(\bar{z}_2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{01}a_1}{\rho_{02}a_2} \right) \frac{\bar{z}_1 a_1}{a_2},$$

$$C_3 = (\bar{z}_2 + 1) \left(1 - \frac{\rho_{01}a_1}{\rho_{02}a_2} \right) \frac{\bar{z}_1 a_1}{a_2}, \quad C_4 = (\bar{z}_2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{01}a_1}{\rho_{02}a_2} \right) \frac{\bar{z}_1 a_1}{a_2}.$$

Из мнимой части (6.3) получим уравнение для собственных частот установившихся колебаний ($v = 0$, $q = i\omega$)

$$\frac{\bar{z}_i \operatorname{tg} \frac{\omega}{a_2} L_2 + 1}{\bar{z}_i - \operatorname{tg} \frac{\omega}{a_2} L_2} = -\frac{\rho_{02}a_2}{\rho_{01}a_1} \operatorname{tg} \frac{\omega}{a_1} L_1. \quad (6.9)$$

Если предположить, что наполнитель абсолютно жесткий ($\rho_{01}a_1 \rightarrow \infty$), то собственные частоты колебаний газа определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{a_2} L_2 = -\frac{1}{\bar{z}_i}. \quad (6.10)$$

Их будем называть **парциальными газовыми частотами**. Для твердой среды (в отсутствии газа, т. е. при $\rho_{02}a_2 \rightarrow 0$) парциальные частоты определяются уравнением

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{a_1} L_1 = \infty. \quad (6.11)$$

Приведем пример. Пусть $L = 0,1$ м, $a_1 = 500$ м/сек, $a_2 = 1000$ м/сек, $\rho_{01} = 200$ кг/м³, $\rho_{02} = 10$ кг/м³, $\bar{z}_i = z_i/\rho_{02}a_2 = 0; 1; \infty$. Значения плотностей и скоростей заимствуем из работы [76], где относительно низкая плотность ρ_{01} выбрана специально для удобства графического изображения результатов.

На рис. 11 собственные частоты $f_k = \omega_k/2\pi$ в килогерцах приводятся для первой и второй моды ($k = 1, 2$) в зависимости от соотношения длин L_1 и L_2 . Пунктирными линиями показаны парциальные частоты, вычисленные по (6.10), и (6.11), а жирными — частоты, определяемые из уравнения (6.9). Как видим на графике, собственные частоты совместных колебаний лежат вблизи парциальных частот твердой среды, если газ занимает незначительную часть полости, и вблизи парциальных частот газа, если газ зани-

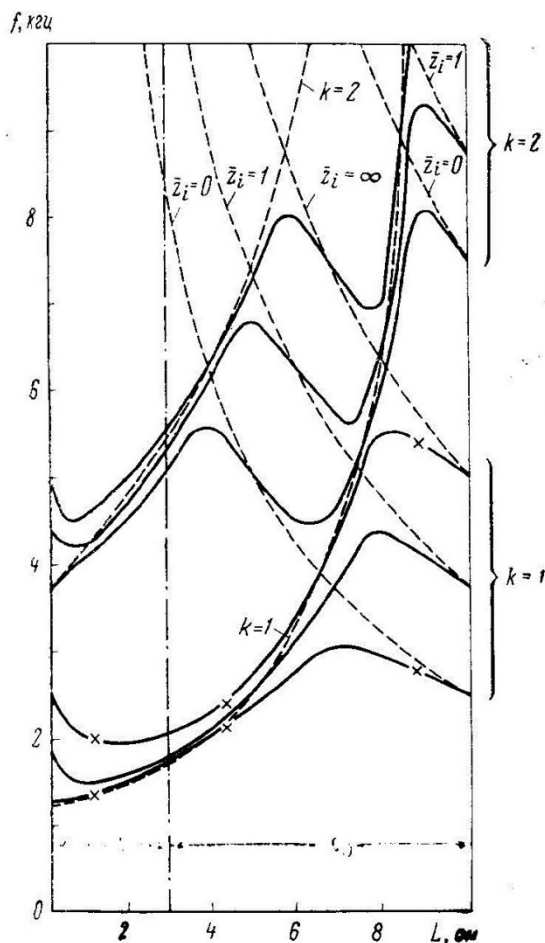


Рис. 11

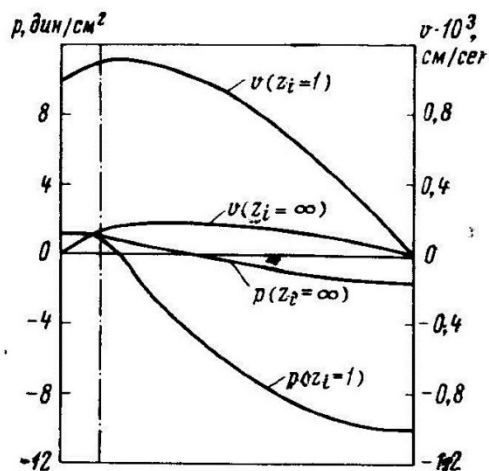


Рис. 12

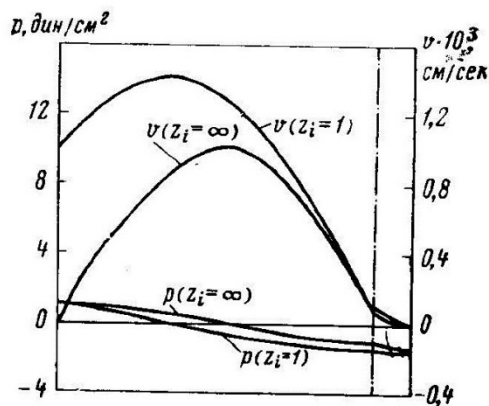


Рис. 13

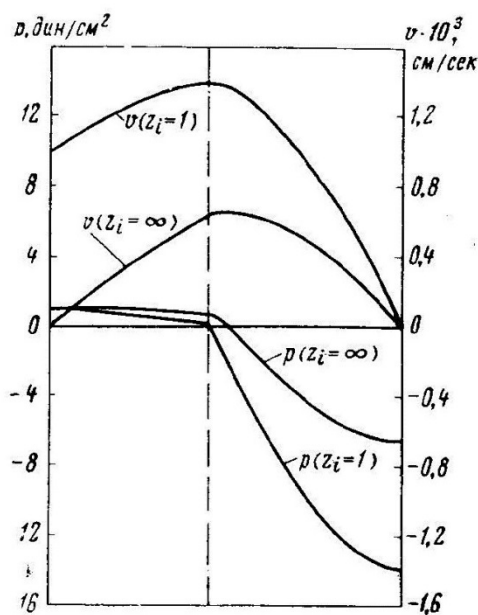


Рис. 14

мает почти всю полость. Обращает на себя внимание отклонение жирных линий от пунктирных при $\bar{z}_i = 1$; ∞ и $L_2 \rightarrow 0$. Это объясняется тем, что граница твердой среды находится вблизи выходного сечения с ненулевым импедансом, тогда как парциальная частота соответствует границе с нулевым импедансом (свободному краю).

Эпюры давлений и скоростей при значениях частот, отмеченных на рис. 11 крестиками, приводятся на рис. 12 ($k = 1$, $L_2 = 1,11$ см, $f = 1,47$ кГц), рис. 13 ($k = 1$, $L_2 = 8,89$ см, $f = 4,12$ кГц), рис. 14 ($k = 1$, $L_2 = 4,5$ см, $f = 2,29$ кГц). Для этого по потенциалу скоростей (6.2), упрощенному в соответствии с принятыми допущениями, вычислялись давление и скорость, при этом было положено $P_k = -2iA_{12}k\rho_0\omega_k = 1$.

§7. Нелинейные задачи

Общая характеристика нелинейностей

Исключительно важно знать величины амплитуд колебаний корпуса и заключенного в нем газа. Только с их помощью может быть оценена прочность корпуса. Чтобы определить амплитуды и частоты в автоколебательных системах, необходимо использовать нелинейные уравнения. Как известно из предыдущего параграфа, линейные соотношения позволяют установить только собственные частоты и пределы устойчивости малых колебаний. В системах с внешним источником возбуждения при помощи линейной теории можно найти зависимость амплитуд колебаний от мощности источника¹. Однако при рассмотрении резонансных случаев также приходится применять нелинейные уравнения.

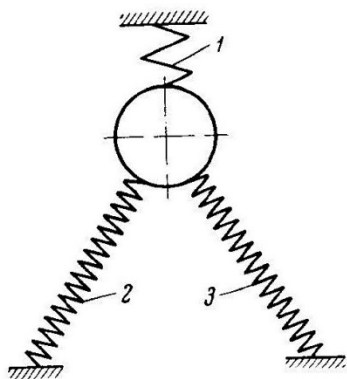


Рис. 15

Несмотря на важность изучения колебаний конечной амплитуды в рассмотренных системах (§ 1), известно мало работ, посвященных этому вопросу. Одна

из причин этого — чрезвычайная сложность указанных задач.

В общем случае для изучения колебаний с конечными амплитудами нужно учитывать нелинейности во всех звеньях колебательной системы: в газе, в местах подвода тепла, на ограничивающих газ поверхностях и т. д.

С другой стороны, можно смело утверждать, что при определенных условиях нелинейности будут преобладать в каком-либо одном звене, в то время как в других они не будут играть существенной роли. Например, в колебательной системе, представленной на рис. 15, где пружина 1 короткая, а пружины 2 и 3 длинные, можно ограничиться рассмотрением нелинейного закона деформирования только пружины 1.

На основании анализа опытных данных по вибрационному горению Б. В. Раушенбах [97] сделал вывод о доминирующем значении нелинейностей в зоне теплоподвода и показал возможность применения линейных уравнений гидромеханики в основном объеме газа. Наоборот, в задаче возбуждения сильных волн в трубе, на одном конце которой ходит плоский поршень, а другой жестко закрыт, необходимо пользоваться нелинейными уравнениями гидромеханики (2.12). Можно также указать случаи, когда важно учитывать нелинейности в упругой оболочке и отверстиях, через которые происходит излучение акустической энергии.

¹ Об этом см., например, § 8.

Ударные волны в закрытой трубе

Задаче возбуждения волн поршнем в закрытой трубе посвящены работы [125], [162], [34], [135], [168]. В них решение ведется с помощью метода последовательных приближений. В статье [130] рассматриваются вынужденные колебания газа конечной амплитуды, возбуждаемые периодическим подводом тепла в среднем сечении трубы. В работах [131], [165] рассмотрены автоколебания газа в закрытой трубе при теплоподводе в среднем сечении, а также в трубе, снабженной сверхзвуковым соплом и горящим заполнителем.

В этих трех работах для решения уравнений гидромеханики используется метод возмущений характеристических координат. В [40], [132] и других содержатся результаты экспериментальных исследований ударных волн. Во всех указанных работах изучаются лишь продольные колебания столба газа.

Задача сводится к решению уравнения (2.12) при $U_0 = 0$, записанного для одномерного случая

$$a_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\kappa - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t}, \quad (7.1)$$

при следующих условиях на концах трубы:

$$v = 0 \quad (x = 0), \quad v = l\omega \cos \omega t \quad (x = L). \quad (7.2)$$

Здесь l и ω — амплитуда и угловая частота поршня. Вместо (7.1) можно, очевидно, пользоваться системой уравнений (2.4) и (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p_* v) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -a^2 \left(\frac{p_*}{p_0} \right)^{\kappa-1} \frac{1}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Правая часть последнего уравнения равна члену $-\frac{1}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial x}$ уравнения (2.5). Так как в данном случае $U_0 = 0$, в уравнениях принято $v_* = v$. Л. П. Горьков [34] пользуется уравнением (7.1), а Р. Бетчев [125] и В. Честер [135] — системой (7.3). Ниже, следуя работе [135], приведем решение задачи (7.3), (7.2)¹. Более строгое решение дано в [51].

Используя следующее представление возмущения скорости звука a через возмущенную плотность ρ_*

$$a' = a_* - a = a (\rho_*/\rho_0)^{\frac{1}{2}(\kappa-1)} - a_*,$$

уравнения (7.3) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(v + \frac{2a'}{\kappa-1} \right) &= - (v + a') \frac{\partial}{\partial x} \left(v + \frac{2a'}{\kappa-1} \right), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(v - \frac{2a'}{\kappa-1} \right) &= - (v - a') \frac{\partial}{\partial x} \left(v - \frac{2a'}{\kappa-1} \right), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где нелинейные члены стоят в правых частях.

Уравнения (7.4) будем решать последовательными приближениями. Первыми приближениями для величин v , a' , которые обозначим через v_1 , a'_1 , будут решения уравнений (7.4) без их правых частей

$$\begin{aligned} v_1 + \frac{2}{\kappa-1} a'_1 &= 2af_1 \left(t - \frac{x}{a} \right), \\ v_1 - \frac{2}{\kappa-1} a'_1 &= 2af_2 \left(t + \frac{x}{a} \right), \end{aligned} \quad (7.5)$$

¹ Выбор этого варианта решения в ущерб общности подхода (в этой книге всюду используется потенциал скоростей) продиктован тем, что указанное решение более наглядно.

где f_1 и f_2 — произвольные функции. Второе приближение $v_1 + v_2$, $a'_1 + a'_2$ находим с помощью выражений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(v_2 + \frac{2}{\kappa - 1} a'_2\right) = 2af'_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) \times \\ \times \left[\frac{\kappa + 1}{2} f_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{3 - \kappa}{2} f_2 \left(t + \frac{x}{a}\right)\right], \quad (7.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(v_2 - \frac{2}{\kappa - 1} a'_2\right) = -2af'_2 \left(t + \frac{x}{a}\right) \left[\frac{3 - \kappa}{2} f_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\kappa + 1}{2} f_2 \left(t + \frac{x}{a}\right)\right].$$

Здесь штрих у f_1 и f_2 означает операцию дифференцирования. Далее непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости соотношений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\frac{x}{a} f_1 \left(t - \frac{x}{a}\right)\right] = f_1 \left(t - \frac{x}{a}\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\frac{1}{2} f_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) f_2 \left(t + \frac{x}{a}\right)\right] = f_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) f'_2 \left(t + \frac{x}{a}\right).$$

Следовательно, частные интегралы (7.6) будут равны

$$v_2 + \frac{2}{\kappa - 1} a'_2 = f'_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) \left[(\kappa + 1) x f_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{3 - \kappa}{2} a F_2 \left(t + \frac{x}{a}\right)\right], \quad (7.7)$$

$$v_2 - \frac{2}{\kappa - 1} a'_2 = -f'_2 \left(t + \frac{x}{a}\right) \left[\frac{3 - \kappa}{2} a F_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) - (\kappa + 1) x f_2 \left(t + \frac{x}{a}\right)\right], \quad (7.8)$$

где $F_i(t) = \int_0^t f_i(\tau) d\tau$ ($i = 1, 2$).

Первое граничное условие (7.2) дает $f_1 = -f_2 = f$. Тогда

$$v = v_1 + v_2 = af(t - x/a) - af(t + x/a) + \frac{1}{2}(\kappa + 1)x \times \\ \times [f(t - x/a)f'(t - x/a) + f(t + x/a)f'(t + x/a)] - \\ - \frac{1}{4}(3 - \kappa)a[f'(t - x/a)F(t + x/a) - f'(t + x/a)F(t - x/a)]. \quad (7.9)$$

Прежде чем удовлетворить выражение (7.9) второму условию (7.2), вспомним, что вблизи резонанса $|\omega L/a - N\pi| \ll 1$, где N — целое число. При этом

$$\operatorname{tg}(\omega L/a) = \operatorname{tg}(\omega L/a - N\pi) \approx \omega L/a - N\pi. \quad (7.10)$$

Можно допустить, что функция f будет периодической с периодом колебаний поршня. Тогда с учетом (7.10) будем иметь приближенное соотношение

$$f(t + L/a) = f(t - L/a) + (2/\omega) \operatorname{tg}(\omega L/a) f'(t - L/a). \quad (7.11)$$

Из второго условия (7.2), используя (7.11), найдем

$$l\omega \cos \omega t = -(2/\omega)a \operatorname{tg}(\omega L/a) f'(t - L/a) + (\kappa + 1)Lf(t - L/a)f'(t - L/a). \quad (7.12)$$

Здесь отброшены величины третьего порядка малости. Учитывая, что $|\cos(\omega L/a)| \approx 1$, (7.12) перепишем в виде

$$\frac{l\omega \cos \omega t}{(\kappa + 1)L \cos(\omega L/a)} = -\frac{2a}{(\kappa + 1)\omega L} \operatorname{tg}(\omega L/a) f'(t) + f(t) f'(t). \quad (7.13)$$

Вдали от резонанса, когда $\operatorname{tg}(\omega L/a)$ не мало и можно пренебречь величиной $f(t)f'(t)$, находим

$$f(t) = -\frac{\omega l \sin \omega t}{2a \sin(\omega L/a)}. \quad (7.14)$$

Подстановка этого значения $f(t)$ в (7.5) дает классическое акустическое решение задачи.

Интегрируя (7.13) и производя некоторые преобразования, получаем

$$(f - 2r \sqrt{\varepsilon/\pi})^2 = \varepsilon(b^2 + \cos^2 \tau), \quad (7.15)$$

где

$$\varepsilon = \frac{4l}{(\kappa + 1)L |\cos(\omega L/a)|}, \quad r = \frac{\pi a \operatorname{tg}(\omega L/a)}{(\kappa + 1)\omega L \sqrt{\varepsilon}};$$

$$2\tau = \omega t - \frac{1}{2}j\pi$$

$j=1$, если $\cos(\omega L/a) > 0$, $j=-1$, если $\cos(\omega L/a) < 0$; b — постоянная интегрирования, подлежащая определению. Число r характеризует близость частоты поршня к собственной частоте полости. Очевидно, средние по времени значения возмущений v и a' должны равняться нулю. Поэтому согласно (7.5) среднее значение функции f также равняется нулю. В решении уравнения (7.15)

$$f = \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{2r}{\pi} \pm \sqrt{b^2 + \cos^2 \tau} \right) \quad (7.16)$$

величина b должна определяться так, чтобы функция f удовлетворяла указанному условию¹ $\int_0^\pi f d\tau = 0$. Отсюда находим

$$|r| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 + \cos^2 \tau} d\tau = \sqrt{1 + b^2} \cdot E, \quad (7.17)$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \tau}{1 + b^2}} d\tau = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{2^2} \frac{1}{(1 + b^2)} - \dots \right].$$

При $|r| \gg 1$ из (7.16) и (7.17) получаем

$$b^2 = (2r/\pi)^2 - 1/2,$$

$$f = -\frac{\pi \sqrt{\varepsilon}}{8r} \cos 2\tau = -\frac{\omega l \sin \omega t}{2a \sin(\omega L/a)},$$

что согласуется с (7.14) и является акустическим решением. Практически уже при $|r| = 15$ наблюдаются синусоидальные колебания (рис. 16). Для случая $|r| = 1$, $b = 0$ вид функции f также показан на рис. 16.

При $|r| < 1$ не существует непрерывного решения (7.15) с нулевым средним значением. Остается допустить существование разрывных решений и

¹ Это может быть физически истолковано как условие постоянства массы в трубе.

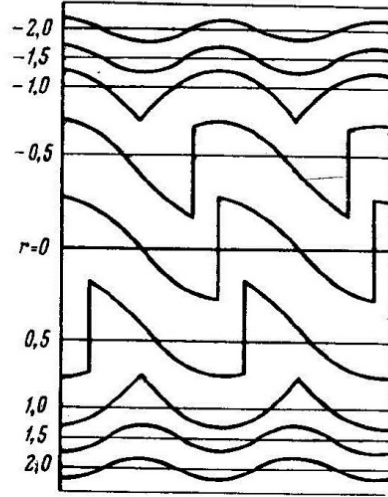


Рис. 16

принять $b = 0$. Решение (7.15) в этом случае удобно записать как периодическую функцию с периодом колебаний поршня, а именно $-2\pi/\omega$ по t или π по τ , такую, что

$$f = \sqrt{\varepsilon} (2r/\pi + \cos \tau),$$

$$\arcsin r < \tau < \pi + \arcsin r, \quad (7.18)$$

где

$$-\frac{1}{2}\pi \leq \arcsin r \leq \frac{1}{2}\pi.$$

Данное решение имеет одну разрывность на каждый полный период и описывает движение ударной волны взад и вперед по трубе. При $\omega L/a \approx N\pi$ образуется N таких ударных волн. Когда $r = 0$ функция f имеет вид, показанный на рис. 16, который подтверждается экспериментальными исследованиями ударных волн.

По найденному значению v или a' можно определить давление в трубе (см. § 15).

§ 8. Автоколебания газа

Колебания газа при вибрационном горении

В этом параграфе приближенно определяются установившиеся автоколебания газа (предельные циклы) в форсажной камере ТРД.

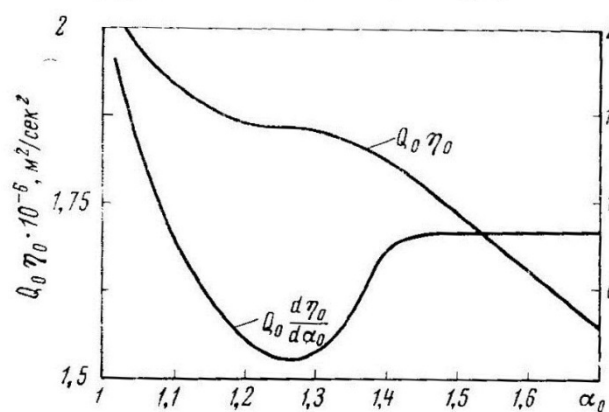


Рис. 17

Полагаем, что существенные нелинейности сосредоточены лишь в плоскости горения Σ , вне которой колебания газовых столбов описываются линейными уравнениями гидромеханики. Параметры, относящиеся к зонам с двух сторон плоскости Σ , по-прежнему будем писать с индексами 1 и 2. В работе [97] принимается, что в концевых сечениях находятся узлы давления ($p = 0$). В статье [121], выполненной по методике [97], берутся условия

$$v_1 = 0 \quad (x = -L_1), \quad v_2 = 0, \quad (x = L_2). \quad (8.1)$$

Обратимся к уравнениям зоны горения (4.2) и перейдем в них к размерным переменным. Возмущение Q теплоподвода зависит от конкретного вида механизма обратной связи. Пусть реализуется обратная связь, представленная соотношениями (1.1)

$$Q = Q_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \alpha_0} \alpha_0 \left(\frac{\rho_1}{\rho_{01}} + \frac{v_1}{v_{01}} - \frac{|\rho_1| v_1}{\rho_{01} v_{01}} \right). \quad (8.2)$$

Здесь $Q_0 = \text{Hu}/\alpha_0 L_0$, где Hu — теплотворная способность топлива в джоулях на килограмм, L_0 — стехиометрический коэффициент¹. Вследствие изменения полноты сгорания одновременно с коэффициентом α_0 изменяется тепло $Q_0 \eta_0$, подводимое к единице массы горючей смеси при разных степенях

¹ Теоретически необходимое количество воздуха в килограммах для полного сгорания 1 кг топлива (14,8 кг).

форсирования. Примеры кривых изменения величин $Q_0\eta_0$ и $Q_0\frac{\partial\eta_0}{\partial\alpha_0}$ приведены на рис. 17.

Второе условие (8.1) и простейшая нелинейность (8.2) для форсажной камеры двигателя являются грубыми, ибо означают отсутствие потерь энергии в сопле и не учитывают некоторые члены того же порядка, что $\rho_1 v_1$, содержащиеся в (1.1). Однако для приближенного решения задачи они, по-видимому, годятся. Следует отметить, что сколько-нибудь точные соотношения делают задачу весьма сложной.

Далее удобно ввести переменные U и W , характеризующие акустические импульсы, бегущие в положительном и отрицательном направлениях оси x [см. (2.26), (6.2) и § 7],

$$p = \frac{1}{2}(U - W), \quad v = \frac{1}{2\rho_0 a}(U + W). \quad (8.3)$$

В этих переменных граничные условия (8.1) принимают вид

$$U = -W \quad (x = -L_1, \quad x = L_2). \quad (8.4)$$

При установившихся колебаниях согласно (2.26) и (8.3)

$$U = U_0 \exp\left(-\frac{i\omega x}{a(1+M)}\right) e^{i\omega t} \quad W = W_0 \exp\left(\frac{i\omega x}{a(1-M)}\right) e^{i\omega t}. \quad (8.5)$$

Из уравнений (8.4), (8.5) определим углы сдвига фаз между амплитудами U_{01} и W_{01} , а также U_{02} и W_{02} , которые будут равны соответственно

$$\gamma_1 = \pi + \frac{2\omega L_1}{(1-M_1^2)a_1}, \quad \gamma_2 = \pi - \frac{2\omega L_2}{(1-M_2^2)a_2}. \quad (8.6)$$

Введем соотношение адиабатичности $\rho_1 = p_1/a_1^2$ и (8.3) в уравнения (4.2). Исключая в них ρ_2 , получаем два уравнения, связывающие переменные параметры с двух сторон поверхности горения Σ

$$\begin{aligned} 10^2 W_{02} &= c_{11} U_{01} + c_{12} W_{02} + c_{13} Q, \\ 10^2 U_{02} &= c_{21} U_{01} + c_{22} W_{01} + c_{23} Q. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Они аналогичны уравнениям (4.3).

Коэффициенты уравнений (8.7) зависят от параметров потока до и после зоны горения. Для фиксированных значений α_0 , при которых экспериментально определялись колебания давления, эти коэффициенты приведены в табл. 1. Характер изменения параметров потока по коэффициенту избытка воздуха α_0 показан на рис. 18.

Таблица 1

α_0	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	b_1	b_2	b_3
1,10	-32,9	100	1,165	62,0	-12,8	0,418	2000	3480	0,170
1,15	-33,3	97	1,170	62,5	-12,1	0,430	1230	2130	0,105
1,23	-33,7	94	1,174	64,4	-11,3	0,443	360	623	0,030
1,30	-34,2	92	1,179	66,5	-10,9	0,456	475	823	0,040
1,38	-34,6	90	1,184	68,6	-10,4	0,467	2190	3790	0,185
1,46	-35,0	88	1,188	70,6	-10,0	0,480	3020	5240	0,256
1,54	-35,4	86	1,193	72,5	-9,7	0,491	3190	5530	0,271
1,62	-35,9	85	1,197	74,0	-9,2	0,503	3360	5820	0,285

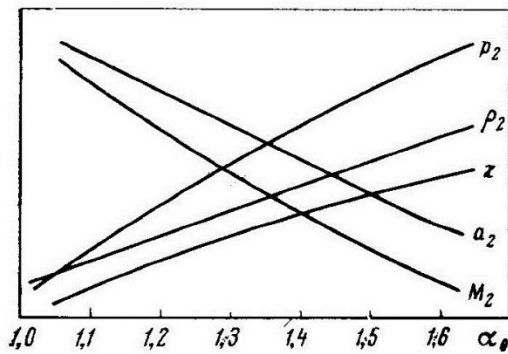


Рис. 18

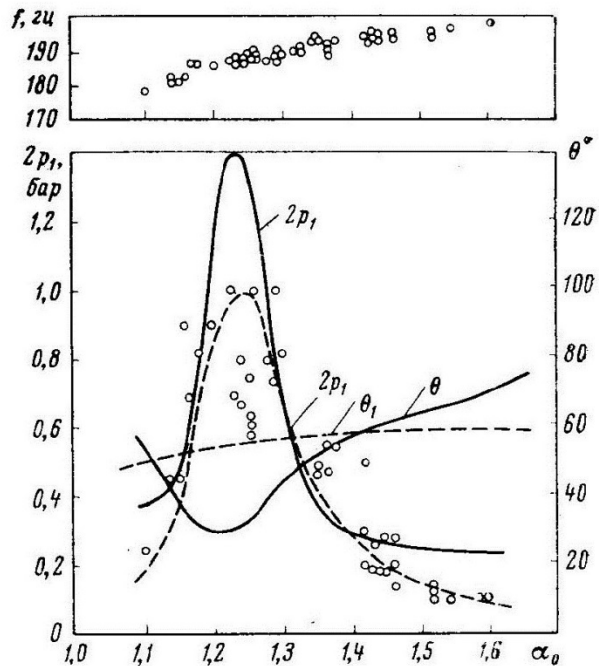


Рис. 20

На рис. 19 приведена векторная диаграмма переменных, входящих в уравнения (8.7). Фаза вектора Q относительно p_1 обозначена через θ и определена из условия (8.4). Значения θ для разных степеней форсирования даны на рис. 20. Угол ψ — неизвестный сдвиг фаз между векторами U_{01} и U_{02} . Из векторной диаграммы видно, что фаза вектора Q относительно амплитуды U_{01} равна

$$\beta = \frac{1}{2}(3\pi + \gamma_1) - \theta. \quad (8.8)$$

Подставляя (8.3) и соотношение адиабатичности в (8.2) и учитывая введенные выше углы γ_1 и γ_2 , получаем

$$Q = -\{b_1 + b_2 \exp(i\gamma_1) - b_3 \sqrt{2(1 - \cos \gamma_1)} [1 + \exp(i\gamma_1)] \times |U_{01}|\} U_{01}, \quad (8.9)$$

где

$$b_1 = \frac{Q_0}{p_{01}} \frac{d\eta_0}{d\alpha_0}, \quad b_2 = \frac{Q_0 \alpha_0}{2\rho_{01} v_{01} a_1} \frac{d\eta_0}{d\alpha_0}, \quad b_3 = \frac{\kappa Q_0 \alpha_0}{2\rho_{01}^2 v_{01} a_1^3} \frac{d\eta_0}{d\alpha_0}.$$

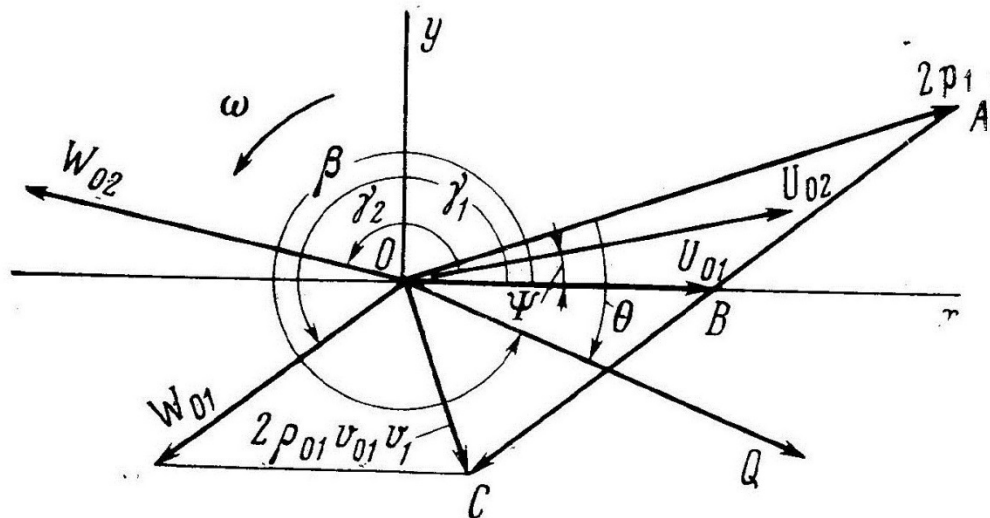


Рис. 19

Числовые значения коэффициентов b_1, b_2, b_3 приведены в табл. 1. Зависимость (8.9) представляет собой квадратичную параболу. При малых значениях U_{01} тепловыделение с ростом U_{01} растет, достигает максимума, а затем падает до нуля.

Система (8.7) связывает векторные величины. Чтобы перейти к скалярным соотношениям, спроектируем эти равенства на оси x и y (рис. 19). Исключим из полученных равенств функции неизвестного угла $\sin \psi$ и $\cos \psi$. Тогда с учетом (8.9) и граничных условий $|U_{01}| = |W_{01}|$, $|U_{02}| = |W_{02}|$ получим следующую систему уравнений для определения амплитуды и частоты колебаний газов:

$$\begin{aligned} U_{01} &= \frac{\sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)}}{b_3 \sin \gamma_1} \left\{ \frac{a_{21} \cos \gamma_2 + a_{22} \cos (\gamma_1 + \gamma_2) - a_{12} \cos \gamma_1 - a_{11}}{[a_{23} \cos (\gamma_2 + \beta) - a_{13} \sin \beta] \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)}} - \right. \\ &\quad \left. - b_1 \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma_1}{1 + \cos \gamma_1}} - b_2 \right\}, \\ U_{01} &= \frac{\sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)}}{b_3 \sin \gamma_1} \left\{ \frac{a_{21} \sin \gamma_2 + a_{22} \sin (\gamma_1 + \gamma_2) - a_{12} \sin \gamma_1}{[a_{23} \sin (\gamma_2 + \beta) - a_{13} \sin \beta] \sqrt{2(1 + \cos \gamma_1)}} - \right. \\ &\quad \left. - b_1 \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma_1}{1 + \cos \gamma_1}} - b_2 \right\}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

В этих уравнениях произведено сокращение на U_{01} , в силу чего они стали неоднородными линейными относительно U_{01} . Принимая ω за параметр и строя кривые $U_{01} = F(\omega)$ по обоим уравнениям, определяем значение U_{01} , соответствующее точке их пересечения. Исключая в (8.10) величину U_{01} , получаем частотное уравнение. Вычисления проводились на ЭЦВМ.

Как следует из треугольника AOB (см. рис. 19), размах колебаний давления перед зоной горения связан с решениями уравнений (8.10) равенством

$$2p_1 = U_{01} \sqrt{2(1 - \cos \gamma_1)}.$$

Расчетные значения размаха колебаний давления для второй моды в зависимости от коэффициента α_0 приведены на рис. 20. Здесь же нанесены экспериментальные значения давления и частоты, записанные с датчика, стоящего перед зоной горения.

Как видно из графика, расчетная кривая проходит выше экспериментальных точек. Но этого и нужно было ожидать, поскольку в расчетах не учитывалось излучение энергии из камеры. Постановка более точных граничных условий привела бы к изменению сдвига фазы θ между p_1 и Q . Можно подобрать такое изменение угла θ (см. рис. 20, штриховая линия θ_1), что расчетные значения $2p_1$ хорошо совпадут с экспериментальными данными.

Расчетные значения частоты колебаний для всех значений α_0 равны 225 гц. Колебания с этой частотой наблюдались в области бедных смесей ($\alpha_0 > 1,6$). При $\alpha_0 < 1,6$ экспериментальные значения лежат ниже расчетных.

Можно отметить, что собственные частоты ω , найденные из линейной и нелинейной теорий, отличаются незначительно. Поэтому приближенное значение амплитуд колебаний очень просто можно найти, вычислив значение ω по формуле линейной теории и подставив в одну из зависимостей (8.10).

Упруго-акустическая неустойчивость

В качестве примера простейшей автоколебательной системы, включающей газовое течение и упругий элемент, снова рассмотрим модель на рис. 9. Предположим (в отличие от § 6), что процессы в плоскости горения Σ описываются нелинейными уравнениями. Кроме того, конкретизируем условия в концевых сечениях трубы. Будем считать, что в сечении 1 расположен плоский поршень с упругой пружиной, способной перемещаться по оси цилиндра, а сечение 2 снабжено сверхзвуковым соплом с комплексной проводимостью (§ 4) $v_2/p_2 = y_r + iy_i$.

Малые перемещения u поршня под действием давления p_1 со стороны газов описываются уравнением

$$d^2u/dt^2 + \Omega^2 u = -p_1/\rho h, \quad (8.11)$$

где ρ , h , Ω — плотность, толщина и собственная частота поршня с невесомой пружиной.

Пусть условием в подвижном сечении Σ служит выражение (4.4). Так как в анализе принимается $p/p_0 \ll 1$, то условие (4.4) также линеаризуется. Будем считать, что скорость впрыска топлива не зависит от колебаний давления в камере и равна $\rho_{02}v_{02}$. Если процесс горения характеризуется временем запаздывания τ , то масса топлива, сгоревшая за время dt со скоростью $(\rho_{02}v_{02} + m)$, должна быть равна массе топлива, выпрыснутой за время $d(t - \tau)$

$$(\rho_{02}v_{02} + m)dt = \rho_{02}v_{02}d(t - \tau),$$

откуда возмущение притока массы $m = -\rho_{02}v_{02}(d\tau/dt)$. Таким образом, выражение (4.4) примет вид

$$d\tau/dt = (v_1 - v_2)/Ma - p_1/\kappa p_0, \quad (8.12)$$

где учтено, что $\bar{p}_0 = p_2/\kappa p_0 = p_1/\kappa p_0$. Значения v_1 , v_2 , p_1 нужно брать в колеблющемся сечении фронта пламени.

В камере ЖРД число Маха обычно мало ($M \sim 0,1$), в связи с чем величиной M^2 в сравнении с единицей пренебрегают. На число M наложим дополнительное ограничение, а именно, пусть $M \sim |v_1/a|$. О том, что при развитых автоколебаниях $|v_1/a|$ может стать порядка M , говорят неоднократно наблюдавшиеся в камере периодические забросы пламени против потока. Важно отметить, что колебания газа вне зоны горения являются при этом почти гармоническими, т. е. удовлетворительно описываются линейными уравнениями. Из (8.12) следует, что производная $|d\tau/dt|$ может иметь порядок единицы. С учетом сказанного в уравнении механизма обратной связи (1.6) члены, содержащие τ вплоть до второй степени, будем оставлять.

На рис. 9 за начало координат принята поверхность стационарного горения. Поэтому в уравнении (1.6) $x_2(t)$ показывает пространственные колебания фронта горения около его среднего положения. В дальнейшем будем полагать, что часть общего времени запаздывания $\tau_1 = 0$ и, следовательно, $x_1 = -L_1$. Разложим первый член в (1.6) в ряд Тейлора в окрестности $t - \tau_0$, а последний множитель во втором члене — в окрестности $t - \tau_0$

$$[p_0 + p(0, t)]^n + x_2(t) \frac{d}{dx} [p_0 + p(0, t)]^n + \dots, \quad (8.13)$$

$$[p_0 + p(-L_1, t - \tau_0)]^n + (\tau - \tau_0) \frac{d}{dt} [p_0 + p(-L_1, t - \tau_0)]^n + \dots \quad (8.14)$$

При оценке второго члена (8.13) учтем, что $x_2(t) \approx U_k(\tau - \tau_0)$, где U_k — скорость капли топлива. Так как $U_k \approx Ma$ и согласно (8.12) при гармонических колебаниях газа $\tau - \tau_0 \approx (v_1 - v_2)/Ma\omega$, то второй член (8.13) по сравнению с первым составляет $p(v_1 - v_2)/p_0 a$. Таким образом, в уравнении (1.6) колебания пространственного запаздывания можно не учитывать и полагать $x_2 = 0$. Аналогично, в (8.14) влияние изменения L_1 в результате малых перемещений поршня будет пренебрежимо малым. Однако в уравнении (8.12) при разложении разности $[v_1(x_2, t) - v_2(x_2, t)](Ma)^{-1}$ в ряд Тейлора (в окрестности $x = 0$) должен быть сохранен и член с x_2 .

Разложим первую скобку в (8.13) и первые три члена (8.14) в биномиальный ряд и отбросим в них величины выше первого порядка малости (p/p_0). Подставив полученные выражения в уравнение (1.6), найдем

$$\begin{aligned} p_1(0, t) - p_1(-L_1, t - \tau_0) - (\tau - \tau_0) \frac{dp_1(-L_1, t - \tau_0)}{dt} - \\ - \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2} \frac{d^2 p_1(-L_1, t - \tau_0)}{dt^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{d\tau}{dt} \left[\frac{p_0}{n} + p_1(-L_1, t - \tau_0) + (\tau - \tau_0) \frac{dp_1(-L_1, t - \tau_0)}{dt} \right] = 0. \quad (8.15)$$

Представим $U_k(t)$ в виде суммы $a[M + \overline{M}(t)]$, причем будем считать, что $\overline{M}(t)$ намного меньше M . Тогда в выражении

$$x_2 = \int_{t-\tau}^{t-\tau_0} U_k(t') dt' = aM(\tau - \tau_0) + a \int_{t-\tau}^{t-\tau_0} \overline{M}(t') dt'$$

второй член можно опустить. При этом уравнение (8.12) запишется

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{Ma} [v_1(0, t) - v_2(0, t)] + (\tau - \tau_0) \frac{\partial}{\partial x} [v_1(0, t) - v_2(0, t)] - \frac{p_1(0, t)}{\kappa p_0}. \quad (8.16)$$

Уравнения (8.15), (8.16) совместно с уравнениями для двух областей (1 и 2) и условиями в сечениях $x = -L_1$ и $x = L_2$ могут быть решены приближенно.

Рассматривая установившиеся колебания газа, согласно (6.2) запишем решения для двух областей ($v = 0$, $q = i\omega$)

$$\begin{aligned} v_j &= a(A_j e^{-i\lambda'_j x} + B_j e^{i\lambda''_j x}) e^{i\omega t}, \quad (j = 1, 2; \lambda'_1 = \lambda''_1 = \frac{\omega}{a} = \alpha), \\ p_j &= \kappa p_0(A_j e^{-i\lambda'_j x} - B_j e^{i\lambda''_j x}) e^{i\omega t}, \quad \left(\lambda'_2 = \frac{\alpha}{1+M}, \lambda''_2 = \frac{\alpha}{1-M}\right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Задача состоит в определении коэффициентов A_j , B_j и частоты ω . Примем решение уравнения (8.11) в виде $u = U e^{i\omega t}$ и удовлетворим условию $\partial u / \partial t = v_1$ при $x = -L_1$. Тогда из уравнений (8.14) и (8.17) находим $B_1 = (\chi_r + i\chi_i) A_1$, где

$$\begin{aligned} \chi_r &= [(b^2 - c^2) \cos 2\alpha L_1 - 2bc \sin 2\alpha L_1] (b^2 + c^2)^{-1}, \quad b = -\kappa p_0 / \rho h, \\ \chi_i &= [(b^2 - c^2) \sin 2\alpha L_1 + 2bc \cos 2\alpha L_1] (b^2 + c^2)^{-1}, \quad c = (\Omega^2 - \omega^2) / \alpha. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Заметим, что $|\chi_r + i\chi_i| = 1$, так как поршень, перемещающийся без трения, представляет собой чисто реактивный импеданс.

Связь между A_2 и B_2 находим из условия у входа в сопло $B_2 = (\eta_r + i\eta_i) A_2$, где

$$\eta_r = [(y_r^2 - g^2 + y_i^2) \cos 2\alpha L_2 + 2gy_i \sin 2\alpha L_2] [(y_r + g)^2 + y_i^2]^{-1}, \quad g = a / \kappa p_0, \quad (8.19)$$

$$\eta_i = [-(y_r^2 - g^2 + y_i^2) \sin 2\alpha L_2 + 2gy_i \cos 2\alpha L_2] [(y_r + g)^2 + y_i^2]^{-1} \quad (M^2 \ll 1)$$

Итак, v_1 и p_1 выражены через A_1 , а v_2 и p_2 через A_2 . Используя условие $p_1 = p_2$ при $x = x_2 \approx 0$, устанавливаем связь между оставшимися константами $(1 - \chi_r - i\chi_i) A_1 = (1 - \eta_r - i\eta_i) A_2$, после чего вещественная часть p_1 будет равна

$$p_1 = \kappa p_0 A_1 [(1 - \chi_r) \cos \alpha x + \chi_i \sin \alpha x] \cos \omega t + [(1 + \chi_r) \sin \alpha x + \chi_i \cos \alpha x] \sin \omega t. \quad (8.20)$$

Вещественные части p_2 , v_1 , v_2 через константу A_1 записываются аналогично. В частности v_2 при $x = 0$

$$v_2 = a A_1 (\mu_r \cos \omega t - \mu_i \sin \omega t), \quad (8.21)$$

$$\mu_r = [2\eta_i \chi_i + (1 - \chi_r)(1 - \eta_r^2 - \eta_i^2)] [(1 - \eta_r)^2 + \eta_i^2]^{-1},$$

$$\mu_i = [2\eta_i (1 - \chi_r) - \chi_i (1 - \eta_r^2 - \eta_i^2)] [(1 - \eta_r)^2 + \eta_i^2]^{-1}.$$

Представим изменение времени запаздывания в виде

$$\tau - \tau_0 = C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

и будем определять колебания в системе только с частотой ω . Подставив в (8.16) соотношения (8.21), (8.20), а также значения v_1 , v_2 , приравняв коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ найдем

$$C = A_1 \sigma_i^* (\omega M)^{-1}, \quad D = A_1 \sigma_r (\omega M)^{-1}, \quad \sigma_r = 1 - M + (1 + M) \chi_r - \mu_r,$$

$$\sigma_i = (1 + M) \chi_i - \mu_i. \quad (8.22)$$

Подстановка выражений (8.20), (8.21), (8.22) в уравнение (8.15) в приравнивание нулю членов при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ дает два уравнения для определения приближенных значений A_1 и ω

$$A_1^2 = 8M^2 \frac{\chi_r + \beta_1 - 1 - \sigma_r (n\kappa M)^{-1}}{(5\sigma_i^2 - \sigma_r^2)\beta_1 + 6\sigma_r \sigma_i \beta_2}, \quad (8.23)$$

$$\frac{\chi_r + \beta_1 - 1 - \sigma_r (n\kappa M)^{-1}}{(5\sigma_i^2 - \sigma_r^2)\beta_1 + 6\sigma_r \sigma_i \beta_2} = \frac{\chi_i - \beta_2 - \sigma_i (n\kappa M)^{-1}}{(\sigma_i^2 - 5\sigma_r^2)\beta_2 - 6\sigma_r \sigma_i \beta_1}. \quad (8.24)$$

Здесь обозначено:

$$\beta_1 = [(1 - \chi_r) \cos \alpha L_1 - \chi_i \sin \alpha L_1] \cos \omega \tau_0 - [\chi_i \cos \alpha L_1 - (1 + \chi_r) \sin \alpha L_1] \sin \omega \tau_0, \quad (8.25)$$

$$\beta_2 = [(1 - \chi_r) \cos \alpha L_1 - \chi_i \sin \alpha L_1] \sin \omega \tau_0 + [\chi_i \cos \alpha L_1 - (1 + \chi_r) \sin \alpha L_1] \cos \omega \tau_0.$$

Для того чтобы амплитуда A_1 была вещественной, знаменатель и числитель (8.23) должны иметь одинаковые знаки. Анализ уравнений (8.23) и (8.24) может быть осуществлен только численно. Полагая $A_1^2 = 0$, из (8.23) и (8.24) получаем уравнения для определения областей неустойчивости (критического сочетания величин n , τ_0 , ω) по линейной теории

$$\chi_r + \beta_1 - \sigma_r (n\kappa M)^{-1} = 1, \quad \chi_i - \beta_2 - \sigma_i (n\kappa M)^{-1} = 0. \quad (8.26)$$

Графический анализ для случая абсолютно жесткой головки камеры ($\Omega = \infty$) весьма подробно был проведен в работе [138]. Исследованные в [138] уравнения несколько отличаются от (8.26) при $\Omega = \infty$, так как при их выводе в уравнении механизма обратной связи отождествлялись колебания давления при $x = 0$ и $x = -L_1$. Уравнения совпадают в случае $L_1 = 0$. Устойчивость камеры сгорания с упругим корпусом исследована в работе [18].

Автоколебания с амплитудой A_1 и частотой ω в действительности будут иметь место в том случае, если найденное периодическое решение устойчиво относительно малых возмущений. В предыдущем разделе не рассматривались вопросы устойчивости лишь потому, что имелись экспериментальные данные, в какой-то степени подтверждавшие существование предельного цикла. Получим приближенное условие устойчивости решений (8.17), (8.23) и (8.24).

Параметры, характеризующие отклонение от стационарного режима колебаний, обозначим: p' , v' , τ' , ... Относительно них линейные уравнения для двух зон и условия при $x = -L_1$, L_2 сохраняют свой вид, а уравнения (8.15) и (8.16) линеаризуются:

$$p'_1(0, t) - \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) p'_1 - (\tau - \tau_0) \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right) \frac{dp'_1}{dt} - \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2} \frac{d^2 p'_1}{dt^2} + \frac{p_0}{n} \frac{d\tau'}{dt} = 0, \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau'}{dt} = \frac{1}{Ma} [v'_1(0, t) - v'_2(0, t)] + (\tau - \tau_0) \frac{\partial}{\partial x} [v'_1(0, t) - v'_2(0, t)] + \\ + \frac{\partial}{\partial x} [v_1(0, t) - v_2(0, t)] \tau' - \frac{p'_1(0, t)}{\kappa p_0}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

В (8.27) $p'_1 = p'_1(-L_1, t - \tau_0)$. При линеаризации учтено, что $p_1/p_0 \ll 1$. В дальнейшем для простоты вычислений положим $L_1/L \ll 1$.

Потенциал скоростей примем в виде (6.2) и об устойчивости периодического решения будем судить по знаку показателя ν (см. § 6). Удовлетворяя условию на поршне, p'_1 и v'_1 при $x = 0$ запишутся

$$\begin{aligned} p'_1 = \kappa p_0 A'_1 (1 - \chi'_r - i\chi'_i) e^{qt}, \quad v'_1 = a A'_1 (1 + \chi'_r + i\chi'_i) e^{qt} \quad (q = \nu + i\omega_1) \\ \chi'_r = \frac{b'^2 - c'^2}{b'^2 + c'^2}, \quad \chi'_i = \frac{2b'c'}{b'^2 + c'^2}, \quad b' = -\frac{\kappa p_0}{\rho h} - \nu a \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right), \quad c' = \frac{a}{\omega_1} (\Omega^2 - \omega_1^2), \end{aligned}$$

где положено $v_1^2 \ll \omega_1^2$. Считая приближенное значение проводимости сопла таким же, что и в стационарном случае, B_2' выражаем через A_2' , а по условию $p' = p_1$ — константу A_2' через A_1' . Приравнявая в уравнении с переменными коэффициентами (8.28) члены при $\cos \omega_1 t$ и $\sin \omega_1 t$, получаем

$$\frac{d\tau'}{dt} = \frac{A_1'}{M} e^{v\tau'} (\sigma_r' \cos \omega_1 t - \sigma_i' \sin \omega_1 t).$$

Здесь $\sigma_r', \sigma_i', \mu_r', \mu_i'$ имеют вид выражений для $\sigma_r, \sigma_i, \mu_r, \mu_i$, в которых $\chi_r, \chi_i, \eta_r, \eta_i$ нужно заменить величинами $\chi_r', \chi_i', \eta_r' = \eta_r \exp\left(-\frac{2v}{a} L_2\right)$ и $\eta_i' = \eta_i \exp\left(-\frac{2v}{a} L_2\right)$. Из (8.27), приравнявая нулю члены при $\cos \omega_1 t$ и $\sin \omega_1 t$ и считая $\exp(v\tau_0) \approx 1$, находим два уравнения относительно ω_1 и v

$$4M^2\omega^2[\chi_r' - 1 + \beta_1' - \sigma_r'(n\kappa M)^{-1}] - A_1'^2(\sigma_r'^2 + \sigma_i'^2)(f_1 \cos \omega_1 \tau_0 - f_2 \sin \omega_1 \tau_0) = 0,$$

$$4M^2\omega^2[\chi_i' - \beta_2' - \sigma_i'(n\kappa M)^{-1}] + A_1'^2(\sigma_r'^2 + \sigma_i'^2)(f_1 \sin \omega_1 \tau_0 + f_2 \cos \omega_1 \tau_0) = 0,$$

где β_1' и β_2' определяются из (8.25) при $L_1 = 0$ подстановкой χ_r', χ_i' вместо χ_r и χ_i ; $f_1 = \omega_1(\omega_1 - \omega_1\chi_r' - 2v\chi_i')$, $f_2 = \omega_1(\omega_1\chi_i' + 2v - 2v\chi_r')$. По этим уравнениям при заданных $A_1'^2$ и ω численно может быть определен знак показателя v .

§ 9. Совместные колебания прямоугольной оболочки и заключенного в ней газа

Собственные колебания

Рассмотрим гармонические колебания газа в герметической прямоугольной полости, одна грань которой закрыта упругой пластиной, а все другие — абсолютно жесткие. Пусть эта пластина расположена в сечении $x = 0$ (см. рис. 4). Нашей задачей является вывод характеристического уравнения, учитывающего взаимодействие между формами колебаний газа в полости и пластины при некоторых условиях закрепления последней по краям.

Кроме условий закрепления пластины ставятся следующие граничные условия (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} \partial\varphi/\partial y &= 0 \text{ при } y = 0, L_2, & \partial\varphi/\partial x &= 0 \text{ при } x = L_1, \\ \partial\varphi/\partial z &= 0 \text{ при } z = 0, L_3, & \partial\varphi/\partial x &= \partial w/\partial t \text{ при } x = 0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

При $U_0 = 0$ волновое уравнение (2.18) имеет решение (2.30), удовлетворяющее первым двум условиям (9.1),

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}(x) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z e^{i\omega t}, \quad (9.2)$$

$$(\beta_m = m\pi/L_2, \gamma_n = n\pi/L_3).$$

Здесь $A_{mn}(x)$ — функция координаты x , подлежащая определению; найденная в (2.30) функция от x в нашей задаче не годится, ибо удовлетворяет граничным условиям, отличным от последних двух условий (9.1).

Подстановка (9.2) в (9.1) дает уравнение

$$\frac{d^2 A_{mn}}{dx^2} - \alpha_{mn}^2 A_{mn} = 0 \quad (\alpha_{mn}^2 = -\frac{\omega^2}{a^2} + \beta_m^2 + \gamma_n^2),$$

решение которого имеет вид

$$A_{mn} = B_{mn} \operatorname{sh} \alpha_{mn} x + C_{mn} \operatorname{ch} \alpha_{mn} x. \quad (9.3)$$

Уравнение колебаний пластинки может быть получено из последнего уравнения системы (5.1). Для этого следует положить $R = \infty$,

$$Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p.$$

Тогда, заменяя переменную x на z , получим

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p, \quad (9.4)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$;

прогиб w считается положительным, если он направлен по положительной оси x . Выражение для прогиба примем в виде

$$w = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} W_{pq} Y_p(y) Z_q(z) e^{i\omega t}. \quad (9.5)$$

Теперь удовлетворим последним двум условиям (9.1). Из первого из них, с учетом (9.2), (9.3) находим

$$C_{mn} = -B_{mn} \operatorname{cth} \alpha_{mn} L_1. \quad (9.6)$$

Подставляя (9.2), (9.3) и (9.5) в последнее условие (9.1), умножая его на ортогональные функции $\cos \beta_r y \cos \gamma_s z$ ($r, s = 0, 1, 2, \dots$) и интегрируя в пределах от 0 до L_2 и от 0 до L_3 , получим¹

$$B_{mn} = \frac{i\omega}{L_2 L_3} \cdot \frac{\varepsilon_{mn}}{\alpha_{mn}} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} W_{pq} Y_{pm} Z_{qn}, \quad (9.7)$$

где $\varepsilon_{00} = 1$, $\varepsilon_{m0} = \varepsilon_{0n} = 2$, $\varepsilon_{mn} = 4$ при $m \geq 1$, $n \geq 1$,

$$Y_{pm} = \int_0^{L_2} Y_p(y) \cos \beta_m y dy, \quad Z_{qn} = \int_0^{L_3} Z_q(z) \cos \gamma_n z dz. \quad (9.8)$$

В (9.7) и (9.8) везде r и s заменили на m и n , так как только при их равенстве левая часть (9.7) не обращается в нуль.

Функции $Y_p(y)$ и $Z_q(z)$ следует подбирать исходя из условий закрепления пластинки по краям. Хорошим ориентиром при их подборе служат базисные функции. Так, если края свободно оперты, то

$$Y_p(y) = \sin \beta_p y, \quad Z_q(z) = \sin \gamma_q z, \quad (\beta_p = p\pi/L_2, \gamma_q = q\pi/L_3). \quad (9.9)$$

Для защемленных краев при $y = 0$, L_2 имеем [151]

$$Y_p(y) = (\operatorname{ch} \lambda_p y - \cos \lambda_p y) - g_p (\operatorname{sh} \lambda_p y - \sin \lambda_p y), \quad (9.10)$$

причем

$$g_p = \frac{\operatorname{ch} \lambda_p L_2 - \cos \lambda_p L_2}{\operatorname{sh} \lambda_p L_2 - \sin \lambda_p L_2}, \quad \operatorname{ch} \lambda_p L_2 \cos \lambda_p L_2 = 1.$$

Аналогичное выражение берется и для $Z_q(z)$. С учетом (9.9) и (9.10) вычислим интегралы (9.8)

$$Y_{pm} = \begin{cases} \frac{2\beta_p}{(\beta_p^2 - \beta_m^2)}, & p + m \text{ нечетно} \\ 0, & p + m \text{ четно} \end{cases} \quad \text{для (9.9),}$$

¹ Такой способ решения уравнений называется методом Бубнова — Галеркина [94], [101]. Равноценный способ заключается также в разложении функций $Y_p(y)$ и $Z_q(z)$ в

ряд по $\cos \beta_m y$ и $\cos \gamma_n z$: $Y_p = \sum_{m=0}^{\infty} Y_{pm} \cos \beta_m y$, $Z_q = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{qn} \cos \gamma_n z$. В дальнейшем будут использоваться оба способа.

$$Y_{pm} = \begin{cases} \frac{4g_p \lambda_p^3}{(\lambda_p^4 - \beta_m^4)}, & p + m \text{ нечетно} \\ 0, & p + m \text{ четно} \end{cases} \text{ для (9.10).}$$

Подставляя (9.3), (9.6) и (9.7) в (9.2), получаем выражение потенциала скоростей

$$\Psi = \frac{i\omega}{L_2 L_3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{mn}}{\alpha_{mn}} W_{pq} (\operatorname{sh} \alpha_{mn} x - \operatorname{cth} \alpha_{mn} L_1 \operatorname{ch} \alpha_{mn} x) \times \\ \times Y_{pm} Z_{qn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z e^{i\omega t}. \quad (9.11)$$

Переменное давление на пластинку ($x = 0$) определяется по формуле (2.17)

$$p = -\frac{\rho_0 \omega^2}{L_2 L_3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{mn}}{\alpha_{mn}} W_{pq} \operatorname{cth} \alpha_{mn} L_1 Y_{pm} Z_{qn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z e^{i\omega t}. \quad (9.12)$$

Введем (9.12) и (9.5) в уравнение (9.4) и решим его методом Бубнова — Галеркина. Умножая (9.4) на функции $Y_k(y)$ и $Z_j(z)$ и интегрируя, получим характеристическое уравнение задачи

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[(\Omega_{pq, kj}^2 - \delta_{kj} \omega^2) W_{kj} - \frac{\chi \rho_0 \omega^2}{\rho h L_2^2 L_3^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_{mn} Y_{pm} Y_{km} Z_{qn} Z_{jn} W_{kj} \right] = 0. \quad (9.13)$$

Здесь

$$G_{mn} = \frac{\varepsilon_{mn} \operatorname{cth} \alpha_{mn} L_1}{\alpha_{mn}}, \quad \Omega_{pq, kj} = \frac{D}{\rho h} F_{pq, kj}, \\ F_{pq, kj} = F_{pk} + 2H_{pk}H_{qj} + F_{qj}, \quad \frac{1}{\chi} = \int_0^{L_2} Y_p^2(y) dy \int_0^{L_3} Z_q^2(z) dz,$$

где δ_{kj} — символ Кронеккера (1 при $k = j$, 0 при $k \neq j$), $\Omega_{pq, kj}$ — собственные частоты пластинки.

Уравнение, аналогичное (9.13), получено в работах [156], [151]. В них для величин F_{pk} , H_{pk} найдены следующие значения: для свободно опертых краев ($y = 0, L_2$)

$$F_{pk} = \begin{cases} \beta_p^4 & k = p \\ 0 & k \neq p, \end{cases} \quad (9.14) \\ H_{pk} = \begin{cases} \beta_p^2 & k = p \\ 0 & k \neq p; \end{cases}$$

для защемленных краев ($y = 0, L_2$)

$$F_{pk} = \begin{cases} \lambda_p^4 & k = p \\ 0 & k \neq p, \end{cases} \\ H_{pk} = \begin{cases} \lambda_p^2 g_p^2 - 2\beta_p g_p & k = p. \\ 0 & (k + p = \text{нечетно}) \quad k \neq p \\ \frac{8\lambda_p^2 \lambda_k^2 (\lambda_p g_p - \lambda_k g_k)}{\lambda_k^4 - \lambda_p^4} & (k + p = \text{четно}) \quad k \neq p. \end{cases} \quad (9.15)$$

Выражения для F_{qj} и H_{qj} получаются из (9.14), (9.15) заменой соответствующих индексов.

Постоянная χ для свободно опертой пластины равна $1/4$. В случае пластинки, свободно опертой по двум параллельным сторонам и защемленной по остальным, $\chi = 1/2$. Для полностью защемленной пластинки $\chi = 1$.

Наибольшее влияние на пластину оказывает основная форма колебаний воздуха в полости ($m = n = 0$), т. е. одномерные колебания по оси x . Это влияние больше сказывается на основной форме собственных колебаний пластинки и постепенно убывает для высших форм. Некоторые оценки сходимости рядов, входящих в (9.13), будут даны ниже.

Заметим, что двумерные колебания несжимаемой жидкости в сосуде с упругими стенками рассмотрены в статье [9].

Вынужденные колебания

Поставим задачу об установившихся вынужденных колебаниях газа и упругой пластинки под действием источника, находящегося в газовой полости. Пусть источник имеет размеры, малые по сравнению с длинами возбуждаемых волн. Тогда его можно принять за точечный источник. Далее предполагаем, что производительность Q и частота ω источника заданы и не испытывают обратного влияния ранее возбуждаемых волн. Таким образом, это является колебательной системой с внешним источником возбуждения (§ 1).

Задача рассматривается в линейном приближении без учета диссипативных сил. Заметим, что вынужденные колебания газа в полости с жесткими стенками рассмотрены в книге [79].

Как уже упоминалось в § 2, волновое уравнение для среды с распределенной системой источников, имеет вид

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = q. \quad (9.16)$$

В нашем случае $q = Q \exp(i\omega t)$. Пусть x_0, y_0, z_0 — координаты источника. Представляя точечный источник дельта-функцией Дирака $\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, равной $\delta = \infty$ при $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ и $\delta = 0$ при $x \neq x_0, y \neq y_0, z \neq z_0$, волновое уравнение (9.16) перепишем так:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = Q_0 \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) e^{i\omega t}, \quad (9.17)$$

где $\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$. Условия (9.1) остаются без изменений.

Решение уравнения (9.17) будем разыскивать в виде ряда (9.2). Производя интегрирование по методу Бубнова — Галеркина, для A_{mn} находим неоднородное уравнение

$$\frac{d^2 A_{mn}}{dx^2} - \alpha_{mn}^2 A_{mn} = Q_{mn}(x), \quad (9.18)$$

где

$$Q_{mn} = \frac{\varepsilon_{mn}}{L_2 L_3} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} Q_0 \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z dy dz,$$

$$\varepsilon_{00} = 1, \varepsilon_{m0} = \varepsilon_{0n} = 2, \varepsilon_{mn} = 4,$$

$$\alpha_{mn}^2 = \beta_m^2 + \gamma_n^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2.$$

Пользуясь свойством дельта-функции [79]

$$\int_0^L f(z) \delta(z - z_0) dz = f(z_0), \dots,$$

получим

$$Q_{mn} = \frac{\varepsilon_{mn}}{L_2 L_3} Q_0 \delta(x - x_0) \cos \beta_m y_0 \cos \gamma_n z_0.$$

Согласно (9.3) фундаментальная система решений уравнения (9.18) без правой части суть $\text{sh } \alpha_{mn}x$ и $\text{ch } \alpha_{mn}x$. С учетом этого частное решение неоднородного уравнения находим по методу вариации постоянных

$$A'_{mn} = \frac{1}{\alpha_{mn}} \left[\text{sh } \alpha_{mn}x \int \text{ch } \alpha_{mn}x Q_{mn}(x) dx - \text{ch } \alpha_{mn}x \int \text{sh } \alpha_{mn}x Q_{mn}(x) dx \right] \quad (9.19)$$

Общее решение (9.18) равно

$$A_{mn} = B_{mn} \text{sh } \alpha_{mn}x + C_{mn} \text{ch } \alpha_{mn}x + A'_{mn}. \quad (9.20)$$

Коэффициенты B_{mn} и C_{mn} , как и выше, определяются из последних двух условий (9.1). Вместо (9.6) и (9.7) теперь будут следующие выражения:

$$C_{mn} = -B_{mn} \text{cth } \alpha_{mn}L_1 - \frac{1}{\alpha_{mn}} \left[\text{cth } \alpha_{mn}L_1 \left(\int \text{ch } \alpha_{mn}x Q_{mn}(x) dx \right)_{x=L_1} - \left(\int \text{sh } \alpha_{mn}x Q_{mn}(x) dx \right)_{x=L_1} \right], \quad (9.21)$$

$$B_{mn} = \frac{\varepsilon_{mn} i \omega}{\alpha_{mn} L_2 L_3} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} W_{pq} Y_{pm} Z_{qn} - \frac{1}{\alpha_{mn}} (\text{ch } \alpha_{mn}x Q_{mn}(x) dx)_{x=0}.$$

Заметим, что при вычислении производной dA'_{mn}/dx произошло сокращение двух членов типа $\text{sh } \alpha_{mn}x \text{ch } \alpha_{mn}x Q_{mn}(x)$.

Подстановка (9.20), (9.19) и (9.21) в (9.2) дает выражение потенциала скоростей при вынужденных колебаниях газа. При этом следует воспользоваться формулой

$$\int f(x) dx \Big|_{x=L_1} - \int f(x) dx \Big|_{x=0} = \int_0^{L_1} f(x) dx$$

и применить приведенное выше правило интегрирования дельта-функции. Давление на пластину будет равно ($x = 0$)

$$p = \frac{i \omega \rho_0}{L_2 L_3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{mn}}{\alpha_{mn}} \left[i \omega \text{cth } \alpha_{mn}L_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} W_{pq} Y_{pm} Z_{qn} + \frac{Q_0}{\text{sh } \alpha_{mn}L_1} \cos \beta_m y_0 \cos \gamma_n z_0 \text{ch } \alpha_{mn}(L_1 - x_0) \right] \cos \beta_m y \cos \gamma_n z e^{i \omega t}. \quad (9.22)$$

Первый и второй члены этого выражения соответствуют вкладу колебаний пластинки и источника на акустическое давление при $x = 0$. Замечаем, что когда источник находится в точке, через которую проходит одна из узловых плоскостей ($\cos \beta_m y_0 = 0$, $\cos \gamma_n z_0 = 0$), соответствующая форма собственных колебаний газа не возбуждается. Наоборот, та или иная поперечная мода становится преобладающей, когда источник находится на пучностях поперечных колебаний ($\cos \beta_m y_0 = 1$, $\cos \gamma_n z_0 = 1$). Далее, пластина испытывает наибольшее давление, когда источник находится вблизи нее ($x_0 = 0$, $\text{ch } \alpha_{mn}L_1 > 1$), и наименьшее — когда находится у противоположной стенки ($x_0 = L_1$, $\text{ch } 0 = 1$). Сказанное справедливо при вещественном α_{mn} , т. е. при частотах возбуждения, низких по сравнению с собственными частотами поперечных колебаний. Если частота источника высокая (α_{mn} — мнимое), то давление у пластинки в зависимости от местоположения источника изменяется по закону $\cos |\alpha_{mn}(L_1 - x_0)|$. Наконец, значение $\text{sh } \alpha_{mn}L_1 = 0$ соответствует резонансу газовой полости со всеми жесткими гранями.

Отсюда находим, что $\alpha_{mn} = 0$ или $\omega_{mn} = a \sqrt{\beta_m^2 + \gamma_n^2}$. Это есть собственные частоты поперечных форм колебаний. Придавая α_{mn} мнимое значение, по-

лучим собственные частоты трехмерных колебаний газовой полости

$$\alpha_{mn}L_1 = k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{или } \omega_{kmn} = \sqrt{\left(\frac{k\pi}{L_1}\right)^2 + \beta_m^2 + \gamma_n^2}.$$

Подставим (9.22) и выражение прогиба (9.5) в уравнение колебаний пластинки (9.4), причем ограничимся случаем свободного опирания пластины. Производя интегрирование по методу Бубнова — Галеркина, найдем бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов W_{pq}

$$\begin{aligned} [\Omega_{pq}^2 - \omega^2] W_{pq} - \frac{4\rho_0\omega^2}{\rho h L_2^2 L_3^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{mn}}{\alpha_{mn}} \operatorname{cth} \alpha_{mn} L_1 Y_{pm} Z_{qn} Y_{pr} Z_{qs} W_{rs} = \\ = - \frac{4i\omega\rho_0 Q_0}{\rho h L_2^2 L_3^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{mn}}{\alpha_{mn} \operatorname{sh} \alpha_{mn} L_1} Y_{pm} Z_{qn} \operatorname{ch} \alpha_{mn} (L_1 - x_0) \cos \beta_m y_0 \cos \gamma_n z_0, \\ (p, q = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (9.23)$$

где $\Omega_{pq}^2 = \frac{D}{\rho h} (\beta_p^2 + \gamma_q^2)^2$. Значения коэффициентов Y_{pm} и Z_{qn} даны в (9.9). Вещественная часть ряда (9.5) дает действительный прогиб пластинки.

Полагая $Q_0 = 0$ и приравнявая определитель системы (9.23) нулю, получаем уравнение для собственных частот. В случае свободного опирания краев пластины такое же уравнение получится из (9.13).

Метод решения

с использованием функции Грина [61]

Другой, более изящный метод решения поставленной в предыдущем разделе задачи заключается в использовании функции Грина.

Решение уравнения (9.17) разыскиваем в виде [80]

$$\begin{aligned} \varphi = \left\{ \iiint_{(V_0)} q(x_0, y_0, z_0) G(x, y, z | x_0, y_0, z_0) dV_0 + \right. \\ \left. + \iint_{(S_0)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{S_0} G(x, y, z | x_0^s, y_0^s, z_0^s) dS_0 \right\} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (9.24)$$

Где x_0, y_0, z_0 и x_0^s, y_0^s, z_0^s — координаты источника звука и точек поверхности полости; x, y, z — координаты точки наблюдения; V_0, S_0 — объем и поверхность; $G(x, y, z | x_0^s, y_0^s, z_0^s)$ — функция Грина для точки наблюдения в x, y, z и источника на границе. Функцию G находим из решения уравнения Гельмгольца, которое будет неоднородным всего лишь в одной точке (в источнике)

$$\nabla^2 G + (\omega/a)^2 G = \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad (9.25)$$

и из условий

$$\partial G / \partial x = 0 \quad (x = 0, L_1), \quad \partial G / \partial y = 0 \quad (y = 0, L_2), \quad \partial G / \partial z = 0 \quad (z = 0, L_3). \quad (9.26)$$

Представим G в виде суммы собственных функций однородного уравнения (9.25) при однородных граничных условиях (9.26)

$$\begin{aligned} G = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{kmn} \cos \alpha_k x \cos \beta_m y \cos \gamma_n z \\ (\alpha_k = k\pi/L_1, \quad \beta_m = m\pi/L_2, \quad \gamma_n = n\pi/L_3). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Подставляя это выражение в (9.25) и интегрируя последнее по методу

Бубнова — Галеркина с учетом интегрального свойства дельта-функции, найдем

$$A_{kmn} = - \frac{\varepsilon_k \varepsilon_m \varepsilon_n a^2}{V (\omega_{kmn}^2 - \omega^2)} \cos \alpha_k x_0 \cos \beta_m y_0 \cos \gamma_n z_0. \quad (9.28)$$

Здесь

$$V = L_1 L_2 L_3, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 2, \text{ а}$$

$$\omega_{kmn} = a \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_m^2 + \gamma_n^2}$$

собственная частота колебаний газа в полости с абсолютно жесткими стенками.

Введем (9.27) и (9.28) в выражение (9.24) и учтем, что согласно условиям (9.1) на поверхности $x_0^s = 0$ $\partial \varphi / \partial z = \partial w / \partial t$, а на остальных поверхностях производные от φ равны нулю. Тогда получим

$$\varphi = - \frac{a^2}{V} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_k \varepsilon_m \varepsilon_n}{\omega_{kmn}^2 - \omega^2} \cos \alpha_k x \cos \beta_m y \cos \gamma_n z \times \\ \times \left[\iiint_{(V_0)} q \cos \alpha_k x_0 \cos \beta_m y_0 \cos \gamma_n z_0 dV_0 + \iint_{(S_0)} \frac{\partial w}{\partial t} \cos \beta_m y_0^s \cos \gamma_n z_0^s dS_0 \right] e^{i\omega t}. \quad (9.29)$$

Можно показать, что справедливо следующее разложение в ряд Фурье

$$\frac{\operatorname{ch} \alpha_{mn} (L_1 - x)}{\alpha_{mn} \operatorname{sh} \alpha_{mn} L_1} = \frac{a^2}{L_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{(\omega_{kmn}^2 - \omega^2)} \cos \alpha_k x,$$

где

$$\alpha_{mn} = i\alpha_k = \sqrt{\beta_m^2 + \gamma_n^2 - (\omega/a)^2}.$$

Используя это соотношение, выражение для акустического давления на пластинку ($x = 0$) можно привести к двойной сумме по m и n

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{i\omega\rho_0}{L_2 L_3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\alpha_{mn}} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z \times \\ \times \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_{mn} L_1} \iiint_{(V_0)} Q \cos \beta_m y_0 \cos \gamma_n z_0 \operatorname{ch} \alpha_{mn} (L_1 - x_0) dV_0 + \right. \\ \left. + i\omega \operatorname{cth} \alpha_{mn} L_1 \iint_{(S_0)} W(y_0^s, z_0^s) \cos \beta_m x_0^s \cos \gamma_n z_0^s dS_0 \right] e^{i\omega t}. \quad (9.30)$$

Для случая свободного опирания пластины w по-прежнему аппроксимируем тригонометрическим рядом

$$w = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} W_{pq} \sin \beta_p y_0^s \sin \gamma_q z_0^s \quad (9.31) \\ (\beta_p = p\pi/L_2, \quad \gamma_q = q\pi/L_3).$$

В случае только одного сосредоточенного источника в точке x_0, y_0, z_0 $Q = Q_0 \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Подставляя это, а также (9.31) в выражение (9.30) и производя интегрирование по объему полости и поверхности пластины, приходим к уже выведенной формуле для возмущения давления (9.22). После этого тем же путем, что и выше, легко получить систему уравнений (9.23).

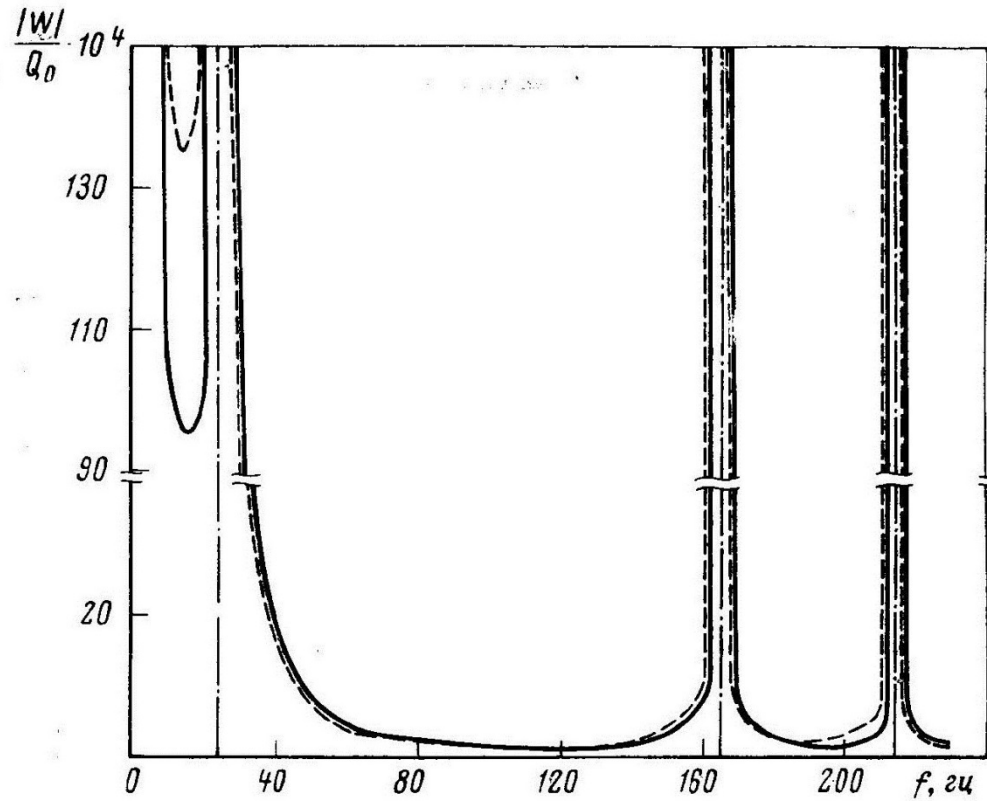


Рис. 21

Полученное решение довольно громоздко. Поэтому для ориентировочного расчета приведем приближенное решение, основанное на пренебрежении рассеянными упругой пластиной волнами. Это решение будет удовлетворительным по крайней мере для случая наполнения полости воздухом и для режимов, далеких от резонансов. Соответствующие уравнения для определения W_{pq} получим из (9.23), отбросив в них члены с четверными суммами.

Числовые примеры [61]

Числовые вычисления были проделаны для двумерных колебаний (в плоскости xy), когда источник располагался на линии $y_0 = L_2/2$. Из последнего условия вытекает, что в полости и пластине возбуждаются только симметричные стоячие волны ($m = 0, 2, 4, \dots$; $p = 1, 3, 5, \dots$). Вычисления проводились по уравнениям точной и приближенной теорий (в смысле вышеизложенного)

$$\begin{aligned}
 (\Omega_p^2 - \omega^2) W_p - \frac{2\rho_0\omega^2}{\rho h L_2^2} \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m L_1} Y_{pm} Y_{pr} W_r = \\
 = - \frac{2i\omega\rho_0 Q_0}{\rho h L_2^2} \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \varepsilon_m}{\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m L_1} Y_{pm} \operatorname{ch} \alpha_m (L_1 - x_0), \\
 (p = 1, 3, 5, \dots),
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

$$\begin{aligned}
 (\Omega_p^2 - \omega^2) W_p = - \frac{2i\omega\rho_0 Q_0}{\rho h L_2^2} \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \varepsilon_m}{\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m L_1} Y_{pm} \operatorname{ch} \alpha_m (L_1 - x_0), \\
 (p = 1, 3, 5, \dots).
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

Числовые данные: $L_1 = 1,0$ м, $L_2 = 0,5$ м, $x_0^0 = 1$ м, $h = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м, $E = 1,96 \cdot 10^6$ бар, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_0 = 1,29$ кг/м³ (воздух при нормальном давлении и температуре). Низшие собственные частоты пластинки в вакууме равны $f_1 = 23,8$ гц, $f_2 = 214,3$ гц, $f_3 = 595,4$ гц, ... Низшая частота газовой квазимоды $m = 0$, $n = 1$ (одномерных колебаний по оси x) составляет 165 гц.

Из расчетов можно сделать некоторые выводы о сходимости рядов, области применимости приближенной формулы (9.33). Если частота источника $f = \omega/2\pi$ ниже, чем первая собственная частота пластинки f_1 , то в ряду по r в формуле (9.32) достаточно взять лишь один член ($r = 1$). Например, при $f = 20$ гц значение прогиба посередине пролета пластинки в одночленном приближении ($r = 1$) равно $|w| = 107,21 \cdot 10^{-4} Q_0$ м (вещественная часть комплексного прогиба), а в двучленном приближении ($r = 1, 3$) составляет $|w| = 107,06 \cdot 10^{-4} Q_0$ м. Причем в ряду по m было взято пять членов. Сразу отметим, что сходимость ряда по m весьма хорошая: при $f = 160$ гц с одним членом по m прогиб равен $|w| = 7,06 \cdot 10^{-4} Q_0$ м, а с пятью членами — $|w| = 7,12 \cdot 10^{-4} Q_0$ м, при $f = 212$ гц $|w| = 4,80 \cdot 10^{-4} Q_0$ м ($m = 0$) и $|w| = 4,77 \cdot 10^{-4} Q_0$ м ($m = 0, 2, 4, 6$). Далее вычислим ряд по r . Если f лежит между f_1 и f_2 , то сходимость зависит от близости f к f_1 или f_2 . В первом случае можно ограничиться одним членом ряда ($r = 1$), в другом — необходимо взять два первых члена. Пусть $f = 30$ гц. Тогда неучет члена, соответствующего $r = 5$, дает погрешность 0,02%, а члена $r = 3$ — 0,07%. Но при $f = 212,5$ гц неучет члена $r = 3$ приводит к ошибке 99,2% а члена $r = 5$ — к ошибке 1,4%. Таким образом, при вычислениях рядов необходимо руководствоваться тем, в какой части спектра собственных частот находится частота вынуждающей силы. Это относится также к суммированию ряда по индексу m .

Приближенной формулой (9.33) можно пользоваться при частотах возбуждения, не близких к резонансным. Так, при $f = 30$ гц (близость к f_1), 50 гц, 100 гц, 160 гц (близость к собственной частоте воздуха) и 212 гц для наших данных погрешность этой формулы по сравнению с (9.32) соответственно равна 39,5%; 1,5%; 1,1%; 15%; 10,8%. На рис. 21 сплошная кривая показывает зависимость амплитуды прогиба от частоты возбуждения, вычисленной по формуле (9.32). Штриховая кривая построена по приближенной формуле (9.33). Как видно из графика, сильное возрастание амплитуд, кроме точек резонанса, наблюдается при $f \rightarrow 0$. Это объясняется тем, что в расчетах полагаем $Q_0 = \text{const}$. Если источник представить в виде пульсирующей сферы, то $Q_0 = i\omega SV$, где S — площадь поверхности сферы, V — амплитуда перемещения точек сферы по радиусу. В режиме работы источника $Q_0 = \text{const}$ случаю $\omega \rightarrow 0$ теоретически соответствуют сильные изменения объема сферы (следовательно, и объема полости, занимаемой газом), что приводит к большим давлениям на пластину со стороны газа. Возможен режим работы источника $V = \text{const}$. В этом случае прогибы при $\omega \rightarrow 0$ будут конечными (прогиб пластины под статическим давлением, возникшим в результате изменения объема полости при расширении сферы).

Если акустической средой является тяжелая жидкость, то формулой (9.33) пользоваться нельзя. Например, в случае воды ($\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $a = 1490$ м/сек) она дает результаты, в десятки раз отличающиеся от истинных прогибов. Интересно отметить, что рост амплитуд колебаний пластинки первой формы в плохо сжимаемой среде затруднен. Поэтому в отличие от газа в этом случае могут преобладать колебания пластинки высших форм. Например, для $f = 100$ гц $|w|_{p=1} = 18,6 \cdot 10^{-4} Q_0$ м, $|w|_{p=3} = 189,8 \cdot 10^{-4} Q_0$ м, $|w|_{p=5} = 3,5 \cdot 10^{-4} Q_0$ м. Это объясняется тем, что изгиб пластинки по одной полуволне ($p = 1$) сопровождается большими изменениями объема полости, в то время как для высших форм этого не происходит, а жидкость имеет возможность перетекать из одной пристеночной зоны в другую.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК
И ГАЗА§ 10. Распространение осесимметричных волн
в жидкости, заключенной в цилиндрической
оболочке бесконечной длины*Историческая справка*

Наиболее простой является теория распространения волн вдоль цилиндрической оболочки бесконечной длины, свободной от подкреплений. Изучение бесконечной системы помогает выявить особенности, характерные и для других систем, хотя эта модель не отображает реальной конструкции.

Вопросу определения скоростей, с которыми распространяются импульсы в упругих цилиндрических трубах, наполненных жидкостью, посвящена обширная литература. Первые исследования были связаны скорее с физиологическими вопросами (распространение пульса в кровеносных сосудах), чем с техническими.

Первым исследованием количественной стороны явления, как указывает И. С. Громека [39], была работа Г. Резаля [159]. В ней определена скорость распространения плоской волны без учета инерции стенок трубы и сжимаемости жидкости. С учетом последних двух факторов задачу рассмотрел Д. Кортевег [152], однако его работа имеет некоторые недостатки. Анализ распространения осесимметричных волн в трубе, наполненной вязкой несжимаемой жидкостью, учитывающий радиальную и продольную инерцию трубы, а также трение о стенки, дал в 1883 г. И. С. Громека [39]. Это во многих отношениях замечательная работа. В ней использована система уравнений осесимметричных колебаний оболочки, условие равенства скоростей газа и оболочки на колеблющейся поверхности и т. д. Более подробный анализ автор провел для невязкой жидкости и получил две скорости распространения волны. Аналогичную задачу (звуковые колебания) без учета вязкости рассмотрел Г. Лэмб [153]. В широко известной работе о гидравлическом ударе в трубопроводах Н. Е. Жуковский [41] принимает во внимание сжимаемость жидкости и показывает, что влияние инерционных и моментных членов в уравнении движения упругой трубы для рассматриваемой им задачи несущественно. Он получил следующее выражение для скорости распространения ударной волны

$$a_0 = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{2\rho_0 R}{Eh} a^2}},$$

где ρ_0 , a — плотность и скорость звука в жидкости; E , R , h — модуль упругости, радиус и толщина стенки трубы. По-видимому, эта работа явилась первым техническим применением разбираемой здесь теории. В книге Ф. М. Морза и Г. Фешбаха [80] приводится исследование распространения осесимметричных звуковых волн, где как частный случай (нижний корень уравнения) получена скорость звука, равная скорости, определяемой формулой Кортевега — Жуковского.

Более поздние исследования в этом направлении можно проследить по работам Г. В. Моргана и В. Р. Ферранте [155], Р. Скалака [166], Дж. Е. Гринспона [146]. Н. А. Кильчевского и др. [65], И. Т. Селезова [102], К. С. Колесникова [68]. В некоторых из них использованы классические уравнения оболочек и учтены радиальные и продольные инерционные силы, что позволило установить существование волн, соответствующих возмущениям либо преимущественно в оболочке, либо преимущественно в жидкости. И. Т. Селезов [102], используя более точные уравнения оболочек (не основанные на гипотезах Кирхгофа — Лява), показал существование еще нескольких семейств волн.

Вопросам взаимодействия цилиндрических оболочек и акустической среды посвящены работы Г. Г. Блейха, М. Л. Барона [128], Г. Г. Блейха [129], М. Г. Джангера [150], В. В. Болотина [15], [16], [14], Г. В. Гахне [147], Н. Н. Мойсеева [78], Б. П. Бублика, В. И. Меркулова [23], Г. Б. Варбуртона [170], В. Е. Бреславского [22], Н. А. Кильчевского и др. [66], Б. И. Рабиновича [95], В. П. Шмакова [119], В. С. Гонч-

кевича [33], Л. И. Балабуха, А. И. Ганичева, А. Г. Молчанова [8], И. М. Рапопорта [96], В. Ф. Натупкина, И. С. Рахимова [87], Н. И. Карпова, Л. С. Палько [64], Н. А. Николаенко [88], В. В. Степанюка [109], Ю. Н. Новичкова [91] и др.

К этим исследованиям в дальнейшем мы будем неоднократно возвращаться. Пока отметим лишь, что в них рассматриваются также неосесимметричные формы колебаний.

Характеристическое уравнение задачи

Пусть в невязкой сжимаемой жидкости, заключенной в упругую цилиндрическую оболочку, распространяются незатухающие осесимметричные волны с потенциалом скоростей

$$\varphi = AJ_0(\gamma r) e^{-i(\alpha x - \omega t)}. \quad (10.1)$$

Это есть частное решение волнового уравнения (2.18), конечное на оси цилиндра ($U_0 = 0$).

В самом деле, разыскивая потенциал в форме

$$\varphi = X(x) \Gamma(r) e^{i\omega t}, \quad (10.2)$$

указанное уравнение приводим к двум

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0, \quad \frac{d^2 \Gamma}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Gamma}{dr} + \gamma^2 \Gamma = 0,$$

при этом

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \mu^2 \quad (\mu = \omega/a). \quad (10.3)$$

Подставляя их решения в (10.2), найдем

$$\varphi = (A_1 e^{-i\alpha x} + A_2 e^{i\alpha x}) [B_1 J_0(\gamma r) + B_2 N_0(\gamma r)] e^{i\omega t}, \quad (10.4)$$

где J_0 и N_0 — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка. Здесь a — скорость распространения волны в свободном пространстве или, что то же самое, скорость плоской волны в газе, заключенном в абсолютно жесткую оболочку. Если рассматривать только бегущую в положительном направлении оси x волну ($A_2 = 0$), конечную на оси цилиндра ($B_2 = 0$), выражение (10.4) приводится к виду (10.1).

Амплитуда A и частота ω определяются источником, находящимся в начале координат. Значения γ находятся из граничного условия на стенке оболочки. Таким образом, волновое число продольных волн $\alpha = \sqrt{\mu^2 - \gamma^2}$ будет зависеть от упругости оболочки.

Поскольку возмущения в жидкости осесимметричные, то можно ожидать осесимметричных форм колебаний оболочки (в гл. IV будет показано, что это не единственная форма колебаний, которые могут возникать в оболочке при возбуждении в жидкости осесимметричных волн). Колебания оболочки в этом случае описываются уравнением (5.10). Примем для функции прогиба выражение

$$w = W e^{-i(\alpha x - \omega t)}. \quad (10.5)$$

Чтобы показать влияние внешней среды на колебания, учтем излучение оболочкой звуковых волн во внешнее пространство. Соответствующий потенциал скоростей примем в виде

$$\psi = B H_0^{(2)}(\gamma_1 r) e^{-i(\alpha x - \omega t)}, \quad (10.6)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\mu_1^2 - \alpha^2}$, $\mu_1 = \omega/a_1$, a_1 — скорость звука во внешней среде. Функция Ханкеля второго рода $H_0^{(2)}(z)$, будучи комплексной функцией

$$H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iN_0(z), \quad (10.7)$$

характеризует расходящиеся волны. Выражение (10.6) является частным решением волнового уравнения. В акустике при помощи функции (10.7) разобрано много задач на излучение.

Перейдем к определению коэффициентов A и B в (10.1) и (10.6); выразим их через W , используя условия на поверхностях оболочки (§ 4)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (r = R - 0), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (r = R + 0).$$

С учетом (10.5) будем иметь

$$A = -\frac{i\omega W}{\gamma J_1(\gamma R)}, \quad B = -\frac{i\omega W}{\gamma_1 H_1^{(2)}(\gamma_1 R)}. \quad (10.8)$$

Здесь использованы формулы дифференцирования

$$\frac{\partial J_0(\gamma r)}{\partial r} = -\gamma J_1(\gamma r), \quad \frac{\partial H_0^{(2)}(\gamma_1 r)}{\partial r} = -\gamma_1 H_1^{(2)}(\gamma_1 r).$$

Подставляя значения A и B в (10.1) и (10.6), по формуле (2.17) находим выражения для акустических давлений на внутреннюю и внешнюю поверхности оболочки [16]

$$p_\Phi = m^* \omega^2 W e^{-i(\alpha x - \omega t)}, \quad (10.9)$$

$$p_\Psi = -(m_1^* - i m_2^*) \omega^2 W e^{-i(\alpha x - \omega t)},$$

где ρ_1 — плотность внешней среды,

$$\begin{aligned} m^* &= \rho_0 R \Delta, \quad m_1^* = \rho_1 R \Delta_1, \quad m_2^* = \rho_1 R \Delta_2, \quad \Delta = -\frac{1}{z} \frac{J_0(z)}{J_1(z)}, \\ \Delta_1 &= \frac{1}{z_1} \frac{J_0(z_1) J_1(z_1) + N_0(z_1) N_1(z_1)}{J_1^2(z_1) + N_1^2(z_1)}, \quad \Delta_2 = -\frac{1}{z_1} \frac{J_0(z_1) N_1(z_1) + N_0(z_1) J_1(z_1)}{J_1^2(z_1) + N_1^2(z_1)}, \\ z &= \gamma R, \quad z_1 = \gamma_1 R. \end{aligned} \quad (10.10)$$

При записи Δ_1 и Δ_2 использована связь между функциями Ханкеля и Бесселя. Очевидно, нагрузка на оболочку будет равна

$$p = p_\Phi - p_\Psi.$$

Подставляя соотношения (10.5) и (10.9) в упомянутое выше уравнение изгиба оболочки (5.10), получаем уравнение для волнового числа

$$\left[\frac{h^2}{12} \alpha^4 + \frac{1}{R^2} - (m + m^* + m_1^* - i m_2^*) \frac{\sigma^2}{m} \right] (\sigma^2 - \alpha^2) + \frac{v^2}{R^2} \alpha^2 = 0. \quad (10.11)$$

Если

$$\alpha^2 \gg \sigma^2, \quad (\sigma = \omega/c), \quad (10.12)$$

т. е. распространяются короткие волны (квадрат длины волны $(2\pi/\alpha)^2$ намного меньше величины $(2\pi/\sigma)^2$), то из (10.11) вытекает приближенное уравнение

$$\frac{h^2}{12} \alpha^4 + \frac{1 - v^2}{R^2} - (m + m^* + m_1^* - i m_2^*) \frac{\sigma^2}{m} = 0$$

или

$$\Omega^2 - \frac{1}{m} (m + m^* + m_1^* - i m_2^*) \omega^2 = 0, \quad (10.13)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{1}{m} \left(D \alpha^4 + \frac{E h}{R^2} \right), \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - v^2)}.$$

Выражение (10.13) можно получить, используя вместо (5.10) уравнение (5.7), не учитывая осевые инерционные силы. При этом в последнем полагают $q = 0$. Следовательно, в случае образования на поверхности оболочки коротких волн осевые инерционные силы несут, вследствие чего оправдано применение уравнения (5.7).

Исследование корней уравнения (10.13)

Вначале исследуем уравнение (10.13) без учета членов, соответствующих внешней области ($\rho_1 = 0$, $m_1^* = m_2^* = 0$). Такой анализ проведен в статье [55]. С учетом выражения для m^* , уравнение (10.13) перепишем так:

$$-\frac{J_0(\gamma R)}{\gamma R J_1(\gamma R)} = \frac{\rho h (\Omega^2 - \omega^2)}{\rho_0 R \omega^2}. \quad (10.14)$$

Рассмотрим наименьший корень уравнения. Его правая часть представляет собой обычно большое число (причем $\omega < \Omega$). Тогда из анализа левой части легко установить, что аргумент γR мал, и в разложении бесселевых функций можно ограничиться одним или двумя членами. Подставив в (10.14) величины $J_0(\gamma R) \approx 1$, $J_1(\gamma R) \approx \frac{1}{2} \gamma R$, получаем

$$\gamma_0^2 \approx -\frac{2\rho_0\omega^2}{\rho h R (\Omega^2 - \omega^2)}. \quad (10.15)$$

В случае абсолютно жесткой оболочки $\Omega^2 = \infty$ и согласно (10.15) $\gamma_0 = 0$.

Учитывая соотношение $\alpha_m = \sqrt{\mu^2 - \gamma_m^2}$, где m — номер корня уравнения (10.14), выражение потенциала (10.1) перепишем в виде

$$\varphi = A_m J_0(\gamma_m r) \exp \left[-i\omega \left(\frac{x}{a_m} - t \right) \right].$$

Из § 2 известно, что величина

$$a_m = \frac{\omega}{\sqrt{\mu^2 - \gamma_m^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\omega} \right)^2 \gamma_m^2}} \quad (10.16)$$

представляет собой фазовую скорость распространения волны в сжимаемой жидкости вдоль оси цилиндра.

Для низшего корня γ_0 будем иметь приближенно

$$\varphi = A_0 \left[1 - \frac{1}{4} (\gamma_0 r)^2 \right] \exp \left[-i\omega \left(\frac{x}{a_0} - t \right) \right].$$

Отсюда и из (10.15) следует, что амплитуда волны, равная в центре A_0 , по радиусу возрастает

$$A_0 \left[1 + \frac{\rho_0 \omega^2 r^2}{2\rho h R (\Omega^2 - \omega^2)} \right]. \quad (10.17)$$

Таким образом, в газе, заключенном в упругую оболочку, плоских волн не существует. Фазовая скорость для моды $m = 0$ равна

$$a_0 = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{2\rho_0 a^2}{\rho h R (\Omega^2 - \omega^2)}}} \approx a \left[1 - \frac{\rho_0 a^2}{\rho h R (\Omega^2 - \omega^2)} \right]. \quad (10.18)$$

Зависимость фазовой скорости от частоты называют дисперсией волн. Различают дисперсию, связанную с поглощением звука при его распространении и со свойствами ограничивающей поверхности. В данном случае она вызывается упругостью оболочки. Если оболочка бесконечно жесткая ($\Omega^2 \rightarrow \infty$), то, как следует из (10.18), дисперсии нет. Дисперсия приводит к из-

менению формы всякого звукового сигнала при его движении. Заметим, что дисперсия присуща всем волнам высших типов ($m \neq 0$), если даже оболочка абсолютно жесткая. Примером могут служить выражения (2.34) — (2.36).

Вопросы прохождения волн, критические частоты и т. д. трактуются, как и в § 2.

Если $\omega^2 \ll \Omega^2$, то для не очень коротких волн (тогда $\Omega^2 = E/\rho R^2$) выражение (10.18) приводится к виду

$$a_0 = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{2\rho_0 R}{Eh} a^2}},$$

что совпадает с формулой Кортвега — Жуковского, приведенной выше. Если использовать соотношение $\rho_0 a^2 = \kappa \rho_0$, подкоренное выражение будет $1 + \frac{2\kappa \rho_0 R}{Eh}$. Следовательно, уменьшение скорости звука в трубе по сравнению со скоростью в свободном пространстве a тем сильнее, чем меньше жесткость оболочки и выше стационарное давление в трубе.

Обозначив через c скорость распространения упругих волн по оболочке ($c^2 = E/\rho$), получаем вместо (10.18) выражение

$$a_0 = a \left[1 - \frac{2\pi R^2 \rho_0}{2\pi R h \rho} \left(\frac{a}{c} \right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2} \right]. \quad (10.19)$$

Таким образом, изменение скорости при $\omega^2 \ll \Omega^2$ зависит от отношения удвоенной массы газов, заключенных в оболочке, к массе оболочки и от квадрата отношения звуковых скоростей в жидкости и оболочке. При комнатной температуре отношения скоростей звука в сталях к звуковым скоростям в воздухе и воде равны: $c/a = 14 \div 18$, $c/a_b = 3,4$. Поэтому влияние колебаний стальной оболочки на скорость волны типа $m = 0$ в газе ничтожно. Оно возрастает с повышением температуры газов и стенок оболочки, так как при этом скорость в газе согласно $a = \sqrt{\kappa B T_0}$ возрастает, а $c = \sqrt{E/\rho}$ (ввиду зависимости E от T_0) — убывает. Интересно отметить, что максимально возможное значение второго члена (10.19) не зависит ни от размеров оболочки, ни от параметров газа. В самом деле, статическое давление p_0 не может быть больше $p_0 = \frac{\sigma_b h}{R}$, где σ_b — допускаемое напряжение на разрыв. Тогда, принимая во внимание выражения для a и c , получаем

$$a_0 = a \left(1 - \kappa \frac{\sigma_b}{E} \right),$$

откуда следует, что максимальное изменение скорости зависит только от механических свойств материала оболочки. Таким образом, при $\omega^2 \ll \Omega^2$ скорость a_0 в газе, заключенном в металлическую оболочку, очень незначительно отличается от a , ибо даже для самых прочных сталей отношение σ_b/E не превышает 0,01. Когда значение ω приближается к Ω , отличие может стать значительным. Для неметаллических конструкционных материалов σ_b/E может достигать величины 0,1—0,5. Аналогичные рассуждения можно привести в отношении амплитуды (10.17).

Напомним, что этот анализ касался только низшего корня уравнения (10.14). Другие корни γ_m уравнения (10.14) могут быть проще всего определены численным решением.

Однако качественную картину можно установить, не прибегая к вычислениям. При $\omega < \Omega$ корни γ_m уравнения (10.14), кроме γ_0 , вещественны (рис.

22). Поэтому фазовые скорости $a_m = a \left[1 - \left(\frac{\gamma_m}{\Omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$ для высших форм волн всегда больше, чем скорость в свободном пространстве, но остаются несколь-

ко меньшими по сравнению с a_m в абсолютно жесткой оболочке. Сказанное относится к случаю, когда упругость оболочки превалирует над ее инерционностью и стенки колеблются в фазе с волнами в газе. Если же превалирует инерционность ($\omega > \Omega$), то корни γ_m вещественны для всех форм волн (включая $m = 0$). Значения γ_m больше, чем соответствующие корни для случая $\omega < \Omega$, а также для случая абсолютно жесткой оболочки. Следовательно, для всех m фазовые скорости a_m больше, чем скорости в абсолютно жесткой оболочке. В этом «зарезонансном» случае ($\omega > \Omega$) стенки колеблются в противофазе к давлению волны в газе, из-за чего волны продвигаются («проталкиваются» стенками) быстрее, чем в абсолютно жесткой оболочке.

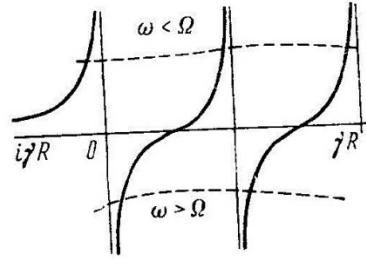


Рис. 22

Учет влияния внешней среды

Теперь вернемся к уравнению (10.13). Мнимый член im_2^* соответствует затуханию в системе, которое происходит вследствие излучения акустической энергии во внешнее пространство (аэродинамическое демпфирование); m_1^* — присоединенной массе внешней среды. Для внутренней области общий импеданс упругой оболочки и внешней среды является комплексным. Вспомним, что импеданс только упругой оболочки — чисто мнимый. Вместо (10.15) теперь будем иметь комплексное выражение

$$\gamma_{m=0}^2 = - \frac{2\rho_0 R \omega^2}{\rho h \left\{ \Omega^2 - \left[1 + \frac{\rho_1 R}{\rho h} (\Delta_1 - i\Delta_2) \right] \omega^2 \right\}}. \quad (10.20)$$

Для малых $z_1 = \gamma_1 R$, когда $J_0(z_1) \approx 1$, $J_1(z_1) \approx \frac{1}{2} z_1$, $N_0 \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1,12}{z_1}$, $N_1 \approx -\frac{2}{\pi z_1}$, коэффициенты Δ_1 и Δ_2 равны

$$\Delta_1 \approx \ln \frac{1,12}{\gamma_1 R}, \quad \Delta_2 \approx \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{\gamma_1 R}{2} \right)^2 \ln \frac{1,12}{\gamma_1 R} \right]. \quad (10.21)$$

При $\gamma_1 R = 0$ они принимают значения $\Delta_1 = \infty$, $\Delta_2 = \pi/2$.

Для широкого диапазона $\gamma_1 R$ имеются таблицы значений Δ_1 и Δ_2 [150], [128], по которым построены и соответствующие графики [16]. На рис. 23 приведены указанные кривые. Важно отметить, что Δ_1 и Δ_2 не меняют знака (т. е. внешняя среда всегда является дополнительной массой и поглотителем энергии). Как видно из графика, влияние внешней среды может оказаться существенным лишь при малых $\gamma_1 R$. Тогда Δ_1 и Δ_2 могут быть вычислены по простым формулам (10.21). Кроме того, в наших задачах ρ_1 всегда меньше ρ_0 . Поэтому в дальнейшем влияние внешней среды учитывать не будем. Более подробные исследования явления излучения во внешней среде при неосесимметричных формах колебаний и в присутствии стационарного течения вдоль оболочки можно найти в работах [16], [33], [150].

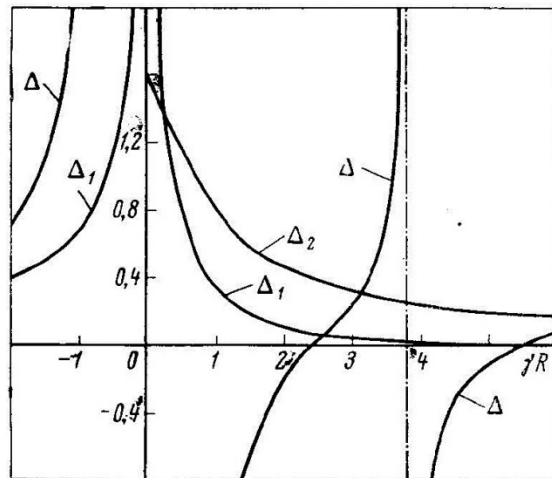


Рис. 23

Перепишем неравенство (10.12) в виде

$$a_m^2 \ll c^2, \quad (10.22)$$

где a_m — фазовая скорость (10.16). Как уже указывалось выше, отношение c/a для стали и воздуха при комнатной температуре изменяется в пределах от 14 до 18. Так как для нулевой моды колебаний фазовая скорость a_0 незначительно отличается от a , то условие (10.22) действительно выполняется. Но при высоких температурах газов и оболочки квадраты скоростей a и c становятся соизмеримыми. Пусть при температуре газов $T_0 = 2900^\circ \text{ К}$ модуль упругости материала оболочки понижается в три раза. Тогда согласно формулам для скоростей звука $c/a = 3,2$.

Так как для высших мод фазовая скорость a_m может принимать значения до бесконечности, то условие (10.22) для указанных мод может нарушаться независимо от температур газа и оболочки.

Чтобы сразу стал ясен смысл корней уравнения (10.11), примем в нем коэффициент поперечной деформации оболочки $\nu = 0$. Тогда (10.11) распадается на два уравнения. Одно из них совпадает с (10.13) (при $\nu = 0$) и, следовательно, указывает на существование серии волн, распространяющихся со скоростями, близкими скоростям волн в жидкости. Второе уравнение

$$\alpha^2 = \sigma^2 = \omega^2 \rho / E$$

показывает, что есть волна, бегущая со скоростью (и длиной), равной скорости (и длине) волны, распространяющейся вдоль оболочки в отсутствие жидкости. То обстоятельство, что в оболочке, не соприкасающейся со средой, обнаруживается существование только одной волны, является следствием, во-первых, приведения с помощью гипотез Кирхгофа — Лява уравнений трехмерной теории упругости к уравнениям оболочки, рассматриваемой как двумерное тело, а во-вторых, осесимметричности задачи.

Когда $\nu \neq 0$, уравнение (10.11) будет иметь корни, отличающиеся от указанных поправкой на ν . Заметим, что первый член (10.11) при $\alpha \sim \sigma$, т. е. когда имеет смысл применение этого уравнения, по сравнению с членом $1/R^2$ пренебрежимо мал. Уравнение (10.11) может быть решено численными способами. Однако, как и выше, низший корень можно найти, пользуясь малостью аргумента γR . Тогда оно будет биквадратным относительно γ^2

$$\left[\frac{1}{R^2} - \left(1 - \frac{2\rho_0}{\rho h R \gamma^2} \right) \sigma^2 \right] (\sigma^2 - \mu^2 + \gamma^2) + \frac{\nu^2}{R^2} (\mu^2 - \gamma^2) = 0.$$

При наличии среднего течения со скоростью $U_0 < a$, направленной по положительной оси x , потенциал скоростей осесимметричной прямой волны имеет вид

$$\varphi = A J_0(\gamma r) \exp[-i(\lambda x - \omega t)].$$

Коэффициент λ был приведен в первом выражении (2.25)

$$\lambda = \frac{1}{1-M^2} \left(\sqrt{(1-M^2)\alpha^2 - M^2\mu^2} - M\mu \right) \quad (\mu^2 = \alpha^2 + \gamma^2).$$

При $M = 0$ волновое число $\lambda = \alpha$, и получаем рассмотренный выше случай. Вместо (10.14) будем иметь уравнение

$$-\frac{J_0(\gamma R)}{\gamma R J_1(\gamma R)} = \frac{\rho h (\Omega^2 - \omega^2)}{\rho_0 R (\omega - U_0 \lambda)^2}.$$

Его анализ может быть проведен так же, как в случае $U_0 = 0$. В частности, низший корень будет равен

$$\gamma_0^2 = -\frac{2\rho_0 (\omega - U_0 \lambda)^2}{\rho h R^2 (\Omega^2 - \omega^2)}.$$

§11. Собственные колебания цилиндрической и сферической оболочек, содержащих газ

Цилиндрическая оболочка

Предположим, что одно из жестких днищ закреплено неподвижно, а другое может свободно перемещаться. Влияние внешней среды и массы днища, а также осевую инерционную силу в оболочке учитывать не будем.

Уравнение осесимметричных колебаний оболочки (5.7), исключая временной множитель $\exp(i\omega t)$, можно записать в виде

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{1}{D} \left(p - \frac{\nu}{R} q \right), \quad (11.1)$$

$$4\beta^4 = \frac{\rho h}{D} (\Omega^2 - \omega^2), \quad \Omega^2 = \frac{E}{\rho R^2},$$

где q — удельное осевое усилие, передающееся на оболочку от днища.

При $\beta^4 > 0$ общим решением однородного уравнения (11.1) является [112], [20]

$$w_1 = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x), \quad (11.2)$$

а при $\beta^4 < 0$

$$w_1 = C_1 e^{\beta_1 x} + C_2 e^{-\beta_1 x} + C_3 \sin \beta_1 x + C_4 \cos \beta_1 x \quad (\beta_1^2 = 2\beta^2). \quad (11.3)$$

В этом параграфе будем рассматривать только первый случай, когда силы упругости превалируют над инерционностью ($\omega^2 < \Omega^2$). Для обычных параметров оболочки βL большое число, поэтому w_1 при возрастании x и $L - x$ быстро затухает. Ширина этого краевого эффекта $l \approx \sqrt{Rh}$. Практически на расстоянии $(2-3)l$ от конца прогиб w_1 можно принимать равным нулю. Второй, более сложный с точки зрения применяемого здесь метода случай будет изложен в § 12, где решение ведется в бесконечных рядах. Сложность заключается в том, что решение (11.3) по удалении от краев оболочки не стремится к нулю.

Решения уравнения (11.1), соответствующие статическим усилиям p_0 , q_0 и возмущениям p и q , определяются отдельно. Деформации в оболочке, вызываемые постоянным давлением p_0 , будут определены в § 13.

При рассмотрении колебаний газа будем пренебрегать перемещениями подвижного днища вследствие удлинения оболочки. Поэтому скорость газа на торцах оболочки принимаем равной нулю: $\partial \varphi / \partial x = 0$ ($x = 0, L$). Удовлетворяя этим условиям, находим собственные значения α и связь между коэффициентами A_1 и A_2 (10.4). В результате этого устанавливаем, что волна является стоячей

$$\varphi = A_k J_0(\gamma_k r) \cos \alpha_k x e^{i\omega t}, \quad (11.4)$$

причем

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{L} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \gamma_k^2 = \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 - \alpha_k^2. \quad (11.5)$$

Очевидно, общим решением будет сумма выражений (11.4) по k . В отличие от постановки задачи в § 10, здесь частота ω не задана, а является искомой величиной.

Усилия p и q равны

$$p(x) = -i\rho_0 \omega A_k J_0(\gamma_k R) \cos \alpha_k x,$$

$$q = \frac{1}{2\pi R} \int_0^R 2\pi r p(L) dr = -\frac{i\rho_0 \omega}{R} (-1)^k A_k \int_0^R r J_0(\gamma_k) dr = (-1)^{k+1} i\rho_0 \omega A_k \frac{J_1(\gamma_k R)}{\gamma_k}.$$

С учетом этих выражений для p и q частное решение неоднородного уравнения (11.1) можно записать в виде

$$w_2 = -\frac{i\rho_0\omega A_k}{4\beta^4 D} \left[\frac{J_0(\gamma_k R)}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha_k}{\beta} \right)^4} \cos \alpha_k x + (-1)^{k+1} \frac{v J_1(\gamma_k R)}{R \gamma_k} \right]. \quad (11.6)$$

Общий прогиб будет равен

$$w = w_1 + w_2. \quad (11.7)$$

Коэффициенты в выражении w_1 (11.2) определяются обычным образом из условий закрепления оболочки по кромкам.

При удовлетворении условию на колеблющейся стенке

$$\partial \varphi / \partial r = \partial w / \partial t \quad (r = R) \quad (11.8)$$

в выражении (11.7) и (11.2) опускаем члены, описывающие краевой эффект. Это значит, что действительный прогиб, описываемый выражением (11.7), заменяем прогибом, не обращающимся на концах в нуль. Такой прогиб будет наблюдаться, когда кромки оболочки не подкреплены. Очевидно, в случае некототких оболочек ($L \gg \sqrt{Rh}$) погрешность в величине собственного числа γ или ω , вызванная этим допущением, будет совершенно ничтожной. Подставляя (11.6) $w_2 = w_2(x)e^{i\omega t}$ и (11.4) в (11.8), получим

$$\frac{J_0(\gamma_k R)}{\gamma_k J_1(\gamma_k R) \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha_k}{\beta} \right)^4 \right]} + \frac{(-1)^{k+1} v}{R \gamma_k^2} = -\frac{4\beta^4 D}{k \rho_0 \omega^2}.$$

При $\omega \neq \Omega$ член $(\alpha_k/\beta)^4$ в соответствии с (11.1) и (11.5) имеет порядок $(kl/L)^4$. Если $l < L/k$, т. е. половина длины звуковой волны больше ширины краевого эффекта (что в нашей задаче и имеет место), то членом $(\alpha_k/\beta)^4$ можно пренебречь. При этом уравнение приводится к виду, аналогичному (10.14),

$$\frac{J_0(\gamma_k R)}{\gamma_k J_1(\gamma_k R)} + \frac{(-1)^{k+1} v}{R \gamma_k^2} = -\frac{\rho h (\Omega^2 - \omega^2)}{\rho_0 \omega^2}. \quad (11.9)$$

Второй член в левой части (11.9) дает влияние осевых сил от днищ. Если положить $v = 0$, то уравнение (11.9) полностью совпадает с (10.14).

Подставляя в (11.9) вместо γ_k его выражение из (11.5) $\sqrt{(\omega/a)^2 - \alpha_k^2}$, получим уравнение для определения собственных частот ω осесимметричных колебаний системы оболочка — газ, которое может быть решено графически или методом последовательных приближений. Можно сначала найти корни γ_{km} и по ним определить частоты ω_{km} . Числа $m = 0, 1, 2, \dots$ представляют собой номера корней уравнения.

Одной из особенностей осесимметричных форм колебаний оболочки является то, что они происходят с большими частотами Ω . Поэтому по крайней мере несколько низших частот совместных колебаний ω могут оказаться ниже собственной частоты колебаний оболочки Ω . Тогда правая часть уравнения (11.9) будет большим числом, а его низший корень γR — малым. Следовательно, в разложении бесселевых функций можно будет ограничиться одним — двумя членами. Имеем

$$\frac{2 + (-1)^{k+1}}{R \gamma_k^2} \approx -\frac{\rho h (\Omega^2 - \omega^2)}{\rho_0 \omega^2}.$$

Подстановка выражения γ_k^2 из (11.5) дает относительно ω^2 квадратное уравнение. Его корни есть ¹

$$\begin{aligned}\omega_{k0}^2 &\approx \omega_k^2 \left\{ 1 - [2 + (-1)^{k+1} \nu] \frac{\rho_0 a^2}{\rho h R (\Omega^2 - \omega_k^2)} \right\} \quad (m=0; k=0, 1, 2, \dots), \\ \omega_{k1}^2 &\approx \Omega^2 \left\{ 1 + [2 + (-1)^{k+1} \nu] \frac{\rho_0 a^2}{\rho h R (\Omega^2 - \omega_k^2)} \right\} \quad (m=1; k=0, 1, 2, \dots).\end{aligned}\quad (11.10)$$

Здесь через $\omega_k = a\alpha_k$ обозначены собственные частоты чисто продольных колебаний газа в абсолютно жесткой оболочке. Видно, что одна серия низших частот совместных колебаний располагается около частот ω_k , а следующая серия — около Ω . Впрочем, последнее выражение (11.10) дает скорее только качественную оценку: им нельзя пользоваться для количественных расчетов, так как при $\omega = \omega_{k1}$ правая часть (11.9) уже не столь велика, чтобы можно было ограничиться первыми членами разложения бесселевых функций. Первое выражение (11.10) будет справедливо до тех пор, пока значение ω_k при высоких k не сойдется со значением Ω .

Частоты колебаний газа, заключенного в абсолютно жесткой оболочке, как и в § 6, будем называть парциальными частотами газа, а частоты колебания оболочки в отсутствии газовой среды — соответственно парциальными частотами оболочки. Тогда $\omega_{k0} = \omega_k$, что получается из (11.10) при $\Omega^2 \rightarrow \infty$, будут парциальными частотами газа, а $\omega_{k1} = \Omega$ ($\rho_0 \rightarrow 0$) — частотой оболочки.

Выясним, насколько отличаются собственные частоты системы от парциальных частот. Необходимость учета взаимодействия оболочки и капельной жидкости очевидна. Следует оценить лишь взаимодействие газа и оболочки. Анализ может быть проделан, как в § 9 и 10. Максимальное отличие зависит только от механических характеристик материала оболочки и отношения парциальных частот газа и оболочки

$$\omega_{k0}^2 \approx \omega_k^2 \left\{ 1 - [2 + (-1)^{k+1} \nu] \frac{\kappa \sigma_b}{E} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_k}{\Omega} \right)^2} \right\}. \quad (11.11)$$

Пусть $T_0 = 2500^\circ \text{K}$, а температура стенок стальной оболочки такова, что $E = 0,85 \cdot 10^6$ бар, $\sigma_b = 6000$ бар, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $\kappa = 1,3$, $\nu = 0,3$, $L = 2R$. Квадрат низшей парциальной частоты газа ($k=1$) равен

$$\omega_k^2 = \left(\frac{k\pi a}{L} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot 33 \cdot 100^2 \frac{2500}{273} = 9,90 \cdot 10^{10} \frac{1}{L^2}, \text{ а } \Omega^2 = \frac{E}{\rho R^2} = 10,61 \cdot 10^{10} \frac{1}{R^2}.$$

При этих данных второй член (11.11) равняется 0,028, т. е. влияние упругости оболочки мало. Если $L = R$ или по-прежнему $L = 2R$, но $k = 2$, то второй член (11.11) становится равным 0,315 и 0,233. Следовательно, влияние упругости оболочки на величину частоты совместных колебаний составит соответственно 21 и 14%.

Таким образом, можно сделать вывод, что собственные частоты колебаний системы стальная оболочка — газ заметно отличаются от парциальных частот только при приближении значений последних. В противном случае при определении частоты колебаний оболочки можно не учитывать влияние газа и наоборот. Заметим, что отношение σ_b/E для неметаллических конструкционных материалов, как указывалось в предыдущем параграфе, может достигать до 0,1—0,5. В этом предельном случае учет взаимодействия совершенно необходим.

¹ Малый по сравнению с единицей член $[\rho_0 a^2 / \rho h R (\Omega^2 - \omega^2)]^2$ отброшен.

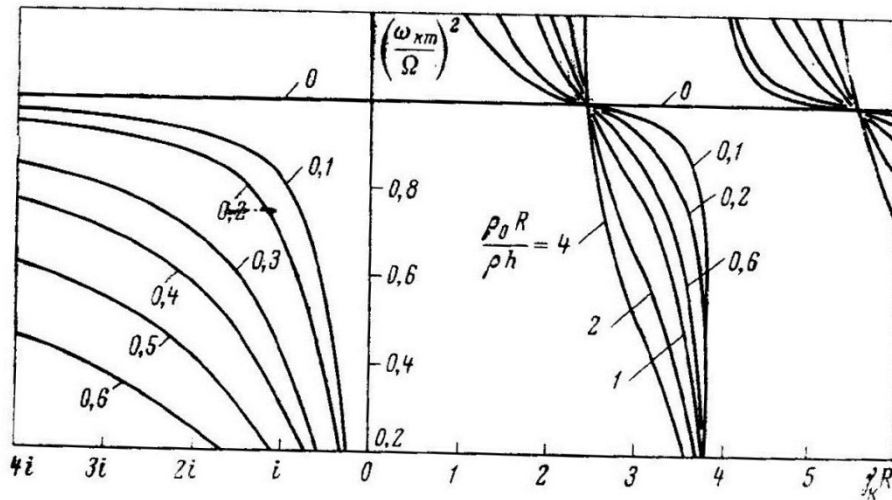


Рис. 24

На рис. 24 изображена зависимость величин

$$\left(\frac{\omega_{km}}{\Omega}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\rho_0 R}{\rho h} \Delta}, \quad \Delta = -\frac{1}{\gamma_k R} \frac{J_0(\gamma_k R)}{J_1(\gamma_k R)},$$

полученная из (11.9) в предположении $\nu = 0$. Кривые построены для значений $\frac{\rho_0 R}{\rho h} = 0; 0,1; 0,2; 0,6; 1; 2$ по аргументу

$$\gamma_k R = R \sqrt{\left(\frac{\omega_{km}}{a}\right)^2 - \alpha_k^2} = \frac{R}{a} \sqrt{\omega_{km}^2 - \omega_k^2}. \quad (11.12)$$

Частоты ω_{km}^2 можно находить последовательными приближениями. Взяв какое-либо значение $(\gamma_k R)_{(0)}$, по графику определяем $(\omega_{km}/\Omega)_{(0)}^2$ в нулевом приближении. Используя это значение ω_{km}^2 из (11.12), находим $(\gamma_k R)_{(1)}$, а по нему $(\omega_{km}/\Omega)_{(1)}^2$ в первом приближении и т. д.

Колебания растяжения — сжатия сферической оболочки

Практический интерес представляет задача о собственных колебаниях газа и сферической оболочки с отверстием, через которое происходит истечение газа. Учесть влияние этого отверстия и среднего течения газа внутри сферы сложно. Однако, как это следует из теории резонаторов, при малом в сравнении с размерами сферы отверстию влияние последнего на собственные частоты колебаний незначительно. Будем считать это условие выполненным и ограничимся рассмотрением замкнутой сферы. Далее предполагаем отсутствие опорных усилий, вызывающих изгиб оболочки.

Уравнение колебаний растяжения — сжатия сферической оболочки согласно (5.13) будет

$$\frac{2Eh}{(1-\nu)R^2} w + \rho h \frac{d^2 w}{dt^2} = p. \quad (11.13)$$

Решение этого уравнения, соответствующее равновесному постоянному давлению p_0 , равно

$$w_0 = \frac{p_0 R^2 (1-\nu)}{2Eh}.$$

Потенциал скоростей радиальных движений газа описывается уравнением (2.16), линеаризованным в случае малых колебаний,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Решение его

$$\varphi = \frac{1}{r} (A_1 e^{-i\mu r} + A_2 e^{i\mu r}) e^{i\omega t}$$

после удовлетворения условию симметрии в центре $\partial \varphi / \partial r = 0$ ($r = 0$) принимает вид

$$\varphi = A \frac{\sin \mu r}{r} e^{i\omega t} \quad \left(\mu = \frac{\omega}{a} \right). \quad (11.14)$$

Подставляя выражение акустического давления, вычисленного по (11.14), в уравнение (11.13), получаем функцию прогиба

$$w = - \frac{i A \rho_0 \omega \sin \mu R}{\rho h R (\Omega^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad \left(\Omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2E}{(1-\nu)\rho}} \right), \quad (11.15)$$

где Ω — собственная частота оболочки. Подстановка (11.14) и (11.15) в условие непроницаемости дает частотное уравнение

$$\frac{1}{1 - \gamma R \operatorname{ctg} \mu R} = - \frac{\rho h (\Omega^2 - \omega^2)}{\rho_0 R \omega^2}.$$

По аналогии с предыдущим цилиндрическим случаем его можно представить в виде

$$\left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\rho_0 R}{\rho h} \Delta} \quad \left(\Delta = - \frac{1}{1 - \mu R \operatorname{ctg} \mu R} \right). \quad (11.16)$$

Умножив и поделив коэффициент $\frac{\rho_0 R}{\rho h}$ на величину площади сферы $4\pi R^2$

$$4\pi R^3 \rho_0 / 4\pi R^2 h \rho = 3m_2/m,$$

приходим к выводу, что указанный коэффициент в случае сферической системы представляет утроенное отношение масс газа и оболочки (в случае цилиндрической системы — удвоенное отношение масс).

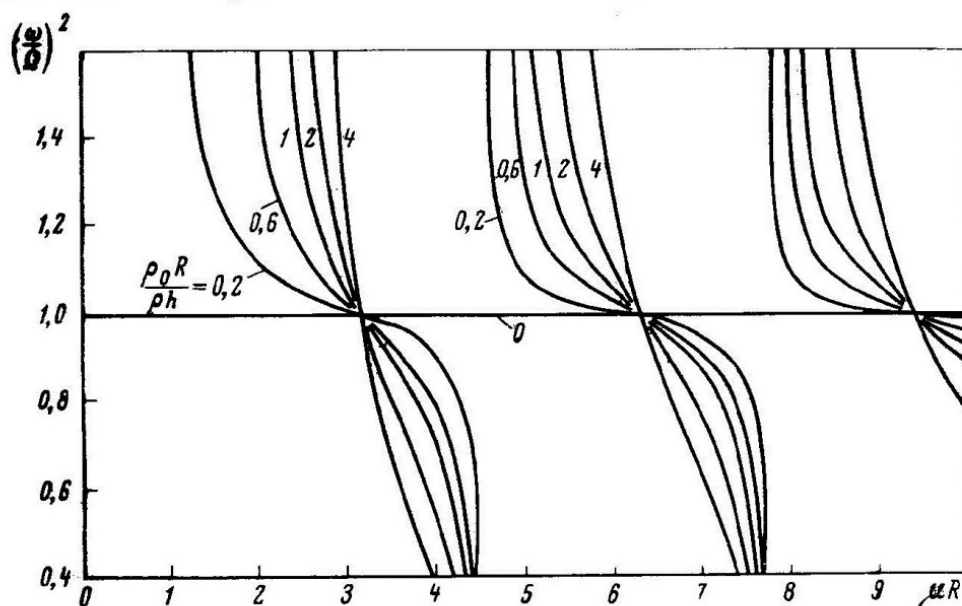


Рис. 25

В гл. IV при рассмотрении несимметричных колебаний коэффициент Δ для рассматриваемого случая будет представлен через сферические функции нулевого и первого порядка ¹

$$\Delta = -\frac{j_0(\mu R)}{\mu R j_1(\mu R)},$$

что по виду совпадает с выражением для Δ в (10.10). Парциальные частоты газа, как видно из (11.16), определяются уравнением

$$\operatorname{tg} \frac{\omega R}{a} = \frac{\omega R}{a} \quad \text{или} \quad j_1\left(\frac{\omega}{a} R\right) = 0.$$

График зависимости (11.16) от безразмерного аргумента $\mu R = R\omega/a$, аналогичный графику для цилиндрического случая, приводится на рис. 25. В отличие от цилиндрического случая этим графиком можно пользоваться и для значений ω/Ω , больших единицы.

§ 12. Вынужденные колебания оболочек и днищ

Постановка задачи о вынужденных колебаниях

Можно наметить два подхода в решении задач вынужденных колебаний упругой оболочки под действием возмущений среды. Первый из них заключается в том, что для описания движения среды вводится потенциал скоростей ϕ , который должен удовлетворять всем граничным условиям (в том числе и на источнике). Этот естественный подход применялся во втором разделе § 8. Однако часто более предпочтительным оказывается другой, приближенный подход, заключающийся во введении суммы двух потенциалов ϕ и ψ . Один из них, например ϕ , определяется как потенциал волн в абсолютно жесткой оболочке, возбуждаемых источником, а ψ — как потенциал рассеянных волн, порождаемых колеблющейся упругой оболочкой; ϕ и ψ можно называть потенциалами «первичных» и «вторичных» возмущений [57]. При этом будем предполагать, что «вторичные» возмущения значительно меньше «первичных».

Если потенциал ψ выбран так, что на поверхности источника соответствующие ему давление или нормальная скорость (в зависимости от вида источника) обращаются в нуль, то разницы между двумя решениями, очевидно, не будет. Так как часто функцию ψ не удастся выбрать указанным образом, то соответствующее решение носит приближенный характер. Если нас интересуют вынужденные колебания только оболочки и мы не стремимся получить точное решение для акустической среды, то этот подход может быть приемлемым. Решение для среды приближается к точному, если источник находится вблизи узла давления или скорости «вторичных» волн. Вторым подходом позволяет использовать для расчета упругих оболочек результаты исследований по возмущениям газа, проведенных, как правило, в предположении об абсолютной жесткости стенок трубы (см., например § 7, 15).

В случае самовозбуждающихся колебаний упругая оболочка входит как элемент единой автоколебательной системы. Но, поскольку автоколебания газа поддерживаются и в абсолютно жесткой трубе, малые колебания упругой оболочки под действием волн ϕ формально можем рассчитывать как вынужденные. Заметим, что упругая оболочка, будучи чисто реактивным импедансом (если она не рассеивает в окружающее пространство волн), не вносит изменения в первоначальный энергетический баланс автоколебаний. Таким

¹ Графическое изображение функции Δ приведено на рис. 34 в главе IV (оно обозначено Δ_0).

образом, несмотря на природу возникновения «первичных» возмущений, колебания оболочки под их действием будем рассчитывать как вынужденные.

Если в (2.11), (2.12) вместо φ подставить сумму $\varphi + \psi$, то для давления p_φ и потенциала φ получатся те же уравнения (2.11) — (2.12), а уравнения для p_ψ и ψ будут содержать и потенциал φ . Производя в последних линейризацию относительно ψ , найдем

$$p_\psi = -\rho_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + (1 - M^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{M}{a} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right], \quad (12.1)$$

$$a^2 \nabla^2 \psi = \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} + (\kappa - 1) \nabla^2 \varphi + 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi + \left[(\kappa - 1) \nabla^2 \psi + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi. \quad (12.2)$$

Условие непроницаемости на колеблющейся стенке цилиндрической оболочки (4.14) также разобьется на два

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (r = R), \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left(U_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (r = R). \quad (12.4)$$

Аналогично для концевой круглой пластины (днища) будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, L) \quad (12.5)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = 0 \quad (x = 0, L). \quad (12.6)$$

Уравнения (12.1) — (12.6) справедливы для общего случая неосесимметричных колебаний. Рассмотрим простейший пример решения задачи.

Малые вынужденные колебания цилиндрической оболочки с жесткими днищами

Источник колебательной энергии с осевой симметрией расположен внутри цилиндрической оболочки, шарнирно закрепленной к жестким неподвижным днищам. Из примеров, приведенных в § 2 и 7, известно, как сопрягать функции, описывающие поле и распределение скоростей или давления на поверхности источника. Предположим, что при $x = L$ задано распределение скорости $V(r)$ (например, в жесткое днище вделан поршень меньшего диаметра). Тогда возмущения описываются линейной комбинацией функций

$$\varphi = A_m J_0(\gamma_m r) \cos \alpha_m x e^{i\omega t}, \quad \alpha_m^2 = (\omega/\alpha)^2 - \gamma_m^2. \quad (12.7)$$

Здесь A_m — значение потенциала в точке $x = 0$, $r = 0$; ω — круговая частота источника. Волновые числа

$$\gamma_m R = 0; 3,83; 7,01; \dots \quad (12.8)$$

найлены из граничных условий (12.3). Выражение (12.7), очевидно, удовлетворяет линейризованному уравнению для потенциала φ при $M = 0$. Ввиду линейности задачи будем рассматривать одну только m -ю собственную функцию (12.7).

Потенциал скоростей рассеянных колеблющейся упругой оболочкой волн при $x = 0, L$ должен удовлетворять одинаковым условиям $\partial\psi/\partial x = 0$, так как условие $\partial(\varphi + \psi)/\partial x = V(r)$ разбито на два: $\partial\varphi/\partial x = V(r)$, $\partial\psi/\partial x = 0$ и при определении φ (12.7) первое из них уже использовано. Итак

$$\psi = \sum_{q=0}^{\infty} B_q J_0(\gamma_q r) \cos \alpha_q x e^{i\omega t} \quad (\alpha_q = q\pi/L). \quad (12.9)$$

Уравнение (12.2) в рассматриваемой задаче используется для определения собственного значения γ_q . Можно предположить, что собственные значения «вторичных» волн будут мало зависеть от неравномерности исходного акустического поля, которая учитывается членами, содержащими φ (более подробный анализ порядка этих членов дан в § 20). Поэтому, отбрасывая в (12.2) указанные члены и подставляя в него выражение (12.9), получим

$$\gamma_q^2 = (\omega/a)^2 - \alpha_q^2. \quad (12.10)$$

Условия шарнирного закрепления концов оболочки ($w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$) будут выполнены, если

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} W_j \sin \alpha_j x e^{i\omega t} \quad (\alpha_j = j\pi/L), \quad (12.11)$$

Разлагая косинус аргумента $\alpha_m x$ по синусам $\alpha_j x$

$$\cos \alpha_m x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\alpha_j}{(\alpha_j^2 - \alpha_m^2)L} [1 - (-1)^j \cos \alpha_m L], \quad (12.12)$$

Представим давление p_φ на стенки жесткой оболочки, вычисленное по (12.7), в виде

$$p_\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} P_{\xi mj} J_0(\gamma_m R) \sin \alpha_j x e^{i\omega t}, \quad (12.13)$$

$$P_{\xi mj} = -i\rho_0 \omega A_{\xi m} \frac{2\alpha_j}{(\alpha_j^2 - \alpha_m^2)L} [1 - (-1)^j \cos \alpha_m L].$$

Используя разложение (12.12), потенциал (12.9) переписываем следующим образом:

$$\psi = \sum_q \sum_{\substack{j \\ (j+q=\text{нечетное число})}} B_{qj} J_0(\gamma_q r) \sin \alpha_j x e^{i\omega t},$$

$$\left(B_{qj} = B_q \frac{4j}{\pi(j^2 - q^2)} \right). \quad (12.14)$$

Для описания осесимметричных колебаний оболочки используем уравнение (5.10), куда следует ввести полное давление $p e^{i\omega t} = p_\varphi + p_\psi$. Подставляя в указанное уравнение выражения (12.11), (12.13), а также значение для давления p_ψ , вычисленное по (12.14), получим

$$\kappa_j W_j = P_{mj} J_0(\gamma_m R) - i\omega\rho_0 \sum_q B_{qj} J_0(\gamma_q R). \quad (12.15)$$

Здесь

$j + q = \text{нечетное число } (j = 0, 1, 2, \dots),$

$$\kappa_j = \rho h c^2 \left[\frac{h^2}{12} \alpha_j^4 + \frac{1}{R^2} - \sigma^2 - \frac{v^2 \alpha_j^2}{R^2 (\alpha_j^2 - \sigma^2)} \right],$$

$$\sigma^2 = (\omega / c)^2, \quad c^2 = E / \rho (1 - v^2).$$

Условие на поверхности оболочки (12.4) в силу малости «первичных» возмущений также возьмем без члена, содержащего Φ (порядок отброшенного члена оценивается в § 20): $\partial w / \partial t = \partial \psi / \partial r (r = R)$. Оно дает

$$i\omega W_j = - \sum_q B_{qj} \gamma_q J_1(\gamma_q R), \quad (12.16)$$

$j + q = \text{нечетное число } (j = 0, 1, 2, \dots).$

Система уравнений (12.15) и (12.16) служит для определения амплитуд прогибов W_j . Чтобы вычислить прогиб оболочки w , найденные W_j следует подставить в (12.11). Вещественная часть w будет давать действительный прогиб.

Число членов, которые необходимо вычислять, диктуется требуемой точностью расчета. Как видно из (12.15), а также выражений для P_{mj} и κ_j , ряды по j при малых значениях j сходятся со скоростью $1/j$. Однако начиная со значения $j \sim L/\sqrt{Rh}$ скорость становится равной $1/j^5$. Если оболочка имеет размеры $L = 0,5 \text{ м}$, $R = 0,25 \text{ м}$, $h = 0,002 \text{ м}$, то это значение j равно 22.

Вместо (12.16) можно рассматривать систему, получающуюся из (12.15) и (12.16) исключением W_j

$$\sum_q B_{qj} [\omega^2 \rho_0 J_0(\gamma_q R) + \kappa_j \gamma_q J_1(\gamma_q R)] = - i\omega P_{mj} J_0(\gamma_m R), \quad (12.17)$$

$j + q = \text{нечетное число } (j = 0, 1, 2, \dots)!$

Подставляя в (12.15) найденные отсюда коэффициенты B_{qj} , будем получать W_j . Когда присоединенная масса газов, учитываемая членами, содержащими коэффициенты B_{qj} , мала по сравнению с массой оболочки, прогибы W_j можно определять только по (12.15), положив в них $B_{qj} = 0$. Очевидно, это соответствует решению задачи без учета рассеянных оболочкой волн (12.9).

Полагая в (12.17) амплитуду давления, вызванного источником, равной нулю ($P_{mj} = 0$), найдем следующую систему характеристических уравнений:

$$\sum_{q=0}^{\infty} B_{qj} \left\{ \omega^2 \rho_0 J_0 \left[R \sqrt{\left(\frac{\omega}{a} \right)^2 - \alpha_q^2} \right] + \right. \\ \left. + \kappa_j \sqrt{\left(\frac{\omega}{a} \right)^2 - \alpha_q^2} J_1 \left[R \sqrt{\left(\frac{\omega}{a} \right)^2 - \alpha_q^2} \right] \right\} = 0. \quad (12.18)$$

Для каждого значения j ряд (12.18) представляет собой уравнение с бесконечным числом членов по B_{qj} . Эта система линейных уравнений имеет нетривиальное решение для бесконечного ряда дискретных значений ω_m ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Приравняв нулю определитель системы (12.18), получим частотное уравнение. Оно является более общим, чем уравнение (11.9), при выводе которого

не было учтено влияние осевых инерционных сил и поведение оболочки преимущественно как массы ($\beta < 0$; $\omega > \Omega$).

При $\rho_0 = 0$ выделяются парциальные частоты оболочки, которые даются уравнением $\kappa_j = 0$. Это будет квадратное относительно ω^2 уравнение, корнями которого являются

$$\omega_j^2 = \frac{\Omega^2}{2(1-\nu^2)} [(1 + R^2\alpha_j^2) \pm \sqrt{(1 - R^2\alpha_j^2)^2 + 4\nu^2 R^2\alpha_j^2}],$$

$$\Omega^2 = E / \rho R^2. \quad (12.19)$$

*Вынужденные колебания
шарнирно закрепленного днища*

Предположим, что упругие днища шарнирно закреплены к абсолютно жесткой оболочке. Если оба днища одинаковой толщины и изготовлены из одинаковых материалов, то, ограничиваясь симметричными по длине акустическими волнами, можно рассматривать только одну половину оболочки, считая, что среднее сечение $x = 0$ закрыто абсолютно жестко. Как и в предыдущем параграфе, примем, что начальное поле задается выражением (12.7).

Колебания круглой пластины описываются уравнением

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_\phi(L, r, t) + p_\psi(L, r, t),$$

$$\left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (12.20)$$

при граничных условиях

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (r=R). \quad (12.21)$$

Во втором условии (12.21) коэффициент Пуассона обычно полагают равным единице ($\nu = 1$), что упрощает расчеты [88], [106]. Однако это приводит к меньшему значению прогиба.

Функцию прогиба, удовлетворяющую условиям (12.21) при $\nu = 1$, представим в виде

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} W_j J_0(\beta_j r) e^{i\omega t}. \quad (12.22)$$

Значения волновых чисел $\beta_j R = 2,40; 5,52; 8,65; \dots$ являются корнями уравнения $J_0(\beta R) = 0$. Для потенциала «вторичных» волн должны быть поставлены условия

$$\begin{aligned} \partial\psi / \partial r &= 0 \quad (r = R), \\ \partial\psi / \partial x &= 0 \quad (x = 0), \\ \partial\psi / \partial x &= \partial w / \partial t \quad (x = L). \end{aligned} \quad (12.23)$$

Первые два из них будут удовлетворены, если

$$\psi = \sum_s B_s J_0(\gamma_s r) \cos \alpha_s x e^{i\omega t}, \quad (12.24)$$

где γ_s — корни уравнения $J_1(\gamma R) = 0$, а $\alpha_s = \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - \gamma_s^2}$.

Разлагая $J_0(\gamma_s r)$ в ряд по бесселевым функциям¹ аргумента $\beta_j r$

$$J_0(\gamma_s r) = \sum_j C_{sj} J_0(\beta_j r), \quad C_{sj} = - \frac{2\beta_j}{R(\gamma_s^2 - \beta_j^2)} \frac{J_0(\gamma_s R)}{J_1(\beta_j R)},$$

¹ При вычислении коэффициентов Фурье C_{sj} учтено, что $J_1(\gamma_s R) = 0$ и $J_0(\beta_j R) = 0$.

выражение (12.24) перепишем в виде

$$\psi = \sum_s \sum_j B_{sj} J_0(\beta_j r) \cos \alpha_s x e^{i\omega t} \quad (B_{sj} = B_s C_{sj}). \quad (12.25)$$

Потенциал (12.7) через функции Бесселя аргумента $\beta_j r$ выразится

$$\varphi = \sum_j A_{mj} J_0(\beta_j r) \cos \alpha_m (L-x) e^{i\omega t} \quad (A_{mj} = A_m C_{mj}). \quad (12.26)$$

Третье условие (12.23) и уравнение (12.20) дают

$$i\omega W_j = - \sum_s B_{sj} \alpha_s \sin \alpha_s L, \quad (12.27)$$

$$\rho h (\Omega_j^2 - \omega^2) W_j = P_{mj} - i\rho_0 \omega \sum_s B_{sj} \cos \alpha_s L. \quad (12.28)$$

Здесь

$$\Omega_j^2 = \frac{D}{\rho h} \beta_j^4, \quad P_{mj} = -i\rho_0 \omega A_{mj}$$

собственные частоты симметричных колебаний пластинки и амплитуды давления «первичных» волн. Прогибы пластинки при ее вынужденных колебаниях должны быть определены из систем (12.27) и (12.28) исключением коэффициентов B_{sj} . Заметим, что коэффициенты, стоящие при B_{sj} , представляют собой известные нам числа, так как α_s определяется из выражения

$$\alpha_s = \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - \gamma_s^2}.$$

Из уравнений (12.27) и (12.28), полагая $P_{mj} = 0$, получаем систему уравнений

$$\sum_s B_{sj} \left[(\Omega_j^2 - \omega^2) \alpha_s \sin \alpha_s L + \frac{\rho_0 \omega^2}{\rho h} \cos \alpha_s L \right] = 0. \quad (\alpha_s = \sqrt{(\omega/a)^2 - \gamma_s^2}). \quad (12.29)$$

Определитель ее, приравненный нулю, дает частотное уравнение.

Жестко заземленное днище [75]

Рассмотрим свободные колебания той же модели, что выше, но с разницей в граничных условиях для днища (жесткое заземление).

Потенциал (12.24), удовлетворяющий первым двум условиям (12.23), остается без изменения. Общее решение уравнения (12.20) при $p_\Phi = 0$, конечное в центре пластины, следующее:

$$w = [D_1 J_0(\beta r) + D_2 I_0(\beta r)] e^{i\omega t} + w_1(r), \quad \left(\beta^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2 \right), \quad (12.30)$$

где частное решение неоднородного уравнения равно

$$w_1 = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i\rho_0 \omega B_s \cos \alpha_s L}{D(\gamma_s^4 - \beta^4)} J_0(\gamma_s r) e^{i\omega t}.$$

Определяя коэффициенты D_1 и D_2 из условий заземления ($w = \partial w / \partial r = 0$ при $r = R$) и учитывая, что $J_1(\gamma_s R) = 0$, (12.30) перепишем в виде

$$w = -w_1(R) \frac{1}{8} [I_1(\beta R) J_0(\beta r) + J_1(\beta R) I_0(\beta r)] + w_1(r), \quad (12.31)$$

где

$$\delta = J_0(\beta R) I_1(\beta R) + I_0(\beta R) J_1(\beta R).$$

Используя разложения

$$J_0(\beta r) = \sum_s C_s J_0(\gamma_s r), \quad I_0(\beta r) = \sum_s \bar{C}_s J_0(\gamma_s r),$$

$$C_s = \frac{2\beta}{R(\beta^2 - \gamma_s^2)} \frac{J_1(\beta R)}{J_0(\gamma_s R)}, \quad \bar{C}_s = \frac{2\beta}{R(\beta^2 + \gamma_s^2)} \frac{I_1(\beta R)}{J_0(\gamma_s R)},$$

из (12.31), (12.24) и последнего условия (12.23) получаем систему

$$d_s B_s = \sum_s g_s B_s, \quad (12.32)$$

где

$$d_s = - \frac{\delta R J_0(\gamma_s R)}{4\beta^2 J_1(\beta R) I_1(\beta R)} \left[\frac{\rho h}{\rho_0} (\gamma_s^4 - \beta^4) \alpha_s \sin \alpha_s L + \beta^4 \cos \alpha_s L \right],$$

$$g_s = \frac{J_0(\gamma_s R) \cos \alpha_s L}{\gamma_s^4 - \beta^4}.$$

Можно показать [75], что d_s и B_s не обращаются в нуль ни при каком значении индекса s . Обозначая бесконечную сумму, одинаковую для всех уравнений системы, через G

$$G = \sum_s g_s B_s, \quad (12.33)$$

перепишем (12.32) в виде

$$B_s = G / d_s. \quad (12.34)$$

Исключая B_s в выражениях (12.33) и (12.34) и производя сокращение на G , приходим к следующему частотному уравнению:

$$\sum_{s=1}^{\infty} g_s / d_s = 1.$$

§ 13. Приближенные решения более сложных задач вынужденных колебаний оболочек

Колебания цилиндрической оболочки при наличии среднего течения газа

Более сложные задачи вынужденных колебаний оболочек под действием акустических нагрузок можно решить, если пренебречь волнами, рассеянными от колеблющихся стенок.

Как указывалось выше, влияние этих волн можно не принимать во внимание, если мала присоединенная масса сжимаемой жидкости. Если парциальные частоты оболочки и газа не близки друг к другу, то, как это следует из выражения (11.10), присоединенная масса мала (второй член в фигурных скобках мал).

В статьях [52], [53], [54], где, по-видимому, впервые рассматривались вынужденные колебания оболочки при возбуждении внутри нее акустических колебаний газа, задача ставилась именно без учета «вторичных» волн.

Пусть труба длиной L заканчивается каким-либо устройством, имеющим активный импеданс. Например, импеданс сверхзвукового сопла с короткой по сравнению с длиной трубы дозвуковой частью является активным. Вели-

чина его, согласно формуле (4.35), равна $z_r = 2\rho_0 a/M (\kappa - 1)$. Предположим, что источник массы расположен в сечении $x = +0$ и по всей трубе текут газы с постоянными средними параметрами. Рассмотрим только установившиеся продольные колебания газов. При этом амплитуду P и частоту ω колебаний в сечении $x = +0$ будем считать заданными. Таким образом, в концевых сечениях будут следующие условия:

$$p = Pe^{i\omega t} (x = 0), \quad p = z_r v (x = L). \quad (13.1)$$

Так как рассматриваются только продольные колебания газов, то условие равенства скоростей на поверхности оболочки не требуется.

Акустическое давление, вычисленное по потенциалу скоростей одномерных возмущений (2.26) и удовлетворяющее условиям (13.1), имеет вид

$$p = \frac{P}{1 + \eta} \left[e^{-\frac{i\omega x}{a(1+M)}} + \eta e^{\frac{i\omega x}{a(1-M)}} \right] e^{i\omega t}, \quad (13.2)$$

где

$$\eta = Z \exp [-2i\omega L/a(1 - M^2)] - \text{коэффициент отражения от конца} \\ (x = L), \quad Z = (z_r - \rho_0 a)/(z_r + \rho_0 a).$$

Далее рассмотрим тот случай, когда акустические колебания происходят с k -й собственной частотой $\omega_k = (1 - M^2) \frac{k\pi a}{2L}$. При этом коэффициент η станет только вещественным, ибо экспонента будет равна единице. Если $Z > 0$, как это получается при вышеприведенном импедансе сопла, то, согласно (6.7), $k = 0, 2, 4, \dots$

Воспользуемся уравнением осесимметричных колебаний оболочки (5.7), приведенным к виду (11.1). При этом ограничимся его решением для $\beta^4 > 0$. Для случая $\beta^4 < 0$, который имеет место при параметрах оболочки и газового течения, удовлетворяющих условию

$$(1 - M^2) k\pi a > 2 \frac{L}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (a = \sqrt{\kappa B T_0}),$$

все расчеты могут быть проведены аналогично изложенному ниже. Однако этот случай возможен лишь при высоких модах продольных колебаний газа и высоких температурах, когда скорость звука в газе возрастает, а модуль упругости материала падает. Кроме того, не учитывается осевая сила q .

Приняв функцию прогиба в виде

$$w = (w' + iw'') e^{i\omega t}, \quad (13.3)$$

уравнение (11.1) с учетом (13.2) и выражения для ω_k переписываем так:

$$\frac{d^4 w'}{dx^4} + 4\beta^4 w' = \frac{P}{D(1 + \eta)} [\cos(1 - M) \alpha_k x + \eta \cos(1 + M) \alpha_k x], \\ \frac{d^4 w''}{dx^4} + 4\beta^4 w'' = -\frac{P}{D(1 + \eta)} [\sin(1 - M) \alpha_k x - \eta \sin(1 + M) \alpha_k x], \quad (13.4)$$

$$\alpha_k = k\pi / 2L.$$

Общие решения неоднородных уравнений (13.4) следующие

$$w' = e^{\beta x} (C'_1 \cos \beta x + C'_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C'_3 \cos \beta x + C'_4 \sin \beta x) + \\ + \frac{P}{4D(1 + \eta)\beta^4} [\cos(1 - M) \alpha_k x + \eta \cos(1 + M) \alpha_k x], \\ w'' = e^{\beta x} (C''_1 \cos \beta x + C''_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C''_3 \cos \beta x + C''_4 \sin \beta x) - \\ - \frac{P}{4D(1 + \eta)\beta^4} [\sin(1 - M) \alpha_k x - \eta \sin(1 + M) \alpha_k x]. \quad (13.5)$$

В обоих выражениях (13.5) отброшены члены с коэффициентами $DR^2 (1 \pm$

$\pm M)^4 \alpha_k^4 / Eh$ как малые порядка $(lk/L)^4$ по сравнению с единицей ($l \approx \sqrt{Rh}$ — ширина зоны краевого эффекта).

Коэффициенты $C_1, \dots, C_4$ определим для случаев шарнирного закрепления ($w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$) и скользящего защемления краев трубы. Процедура их определения значительно упрощается, если учесть, что для некратких оболочек влияние краев друг на друга отсутствует. Например, при удовлетворении условиям в начале координаты $x = 0$ в выражении прогиба следует сохранить только члены $w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + w_2$, а в сечении $x = L$ — члены $w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + w_2$, где w_2 — частное решение неоднородного уравнения.

Находя коэффициенты $C_1, \dots$ с учетом сказанного в случае шарнирного закрепления, будем иметь

$$\begin{aligned} w' &= \frac{P}{4(1+\eta)D\beta^4} \left\{ \cos(1-M)\alpha_k x + \eta \cos(1+M)\alpha_k x - \right. \\ &\quad - e^{-\beta x} \left[(1+\eta) \cos \beta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_k}{\beta} \right)^2 [(1-M)^2 + \eta(1+M)^2] \sin \beta x \right] - \\ &\quad - e^{\beta(x-L)} [\cos(1-M)\alpha_k L + \eta \cos(1+M)\alpha_k L] \cos \beta(x-L) + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{\beta(x-L)} \left(\frac{\alpha_k}{\beta} \right)^2 [(1-M)^2 \cos(1-M)\alpha_k L + \\ &\quad + \eta(1+M)^2 \cos(1+M)\alpha_k L] \sin \beta(x-L) \Big\}, \\ w'' &= \frac{P}{4(1+\eta)D\beta^4} \left\{ -\sin(1-M)\alpha_k x + \eta \sin(1+M)\alpha_k x + \right. \\ &\quad + e^{\beta(x-L)} [\sin(1-M)\alpha_k L - \eta \sin(1+M)\alpha_k L] \cos \beta(L-x) + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{\beta(x-L)} \left(\frac{\alpha_k}{\beta} \right)^2 [(1-M)^2 \sin(1-M)\alpha_k L - \\ &\quad - \eta(1+M)^2 \sin(1+M)\alpha_k L] \sin \beta(L-x) \Big\}, \end{aligned} \quad (13.6)$$

а в случае защемленных краев

$$\begin{aligned} w' &= \frac{P}{4(1+\eta)D\beta^4} \left\{ \cos(1-M)\alpha_k x + \eta \cos(1+M)\alpha_k x - \right. \\ &\quad - (1+\eta) e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \\ &\quad + e^{\beta(x-L)} [\cos(1-M)\alpha_k L + \eta \cos(1+M)\alpha_k L] [\sin \beta(x-L) - \cos \beta(x-L)] + \\ &\quad + e^{\beta(x-L)} \frac{\alpha_k}{\beta} [(1-M) \sin(1-M)\alpha_k L + \\ &\quad + \eta(1+M) \sin(1+M)\alpha_k L] \sin \beta(x-L) \Big\}, \\ w'' &= \frac{P}{4(1+\eta)D\beta^4} \left\{ -\sin(1-M)\alpha_k x + \eta \sin(1+M)\alpha_k x + \right. \\ &\quad + e^{\beta(x-L)} [\sin(1-M)\alpha_k L - \eta \sin(1+M)\alpha_k L] [\cos \beta(x-L) - \sin \beta(x-L)] - \\ &\quad - e^{\beta(x-L)} \left(\frac{\alpha_k}{\beta} \right) [(1-M) \cos(1-M)\alpha_k x - \\ &\quad - \eta(1+M) \cos(1+M)\alpha_k x] \sin \beta(L-x) + e^{-\beta x} \left(\frac{\alpha_k}{\beta} \right) [1-M - \eta(1+M)] \Big\}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Члены, содержащие множители $\exp(-\beta x)$ и $\exp[\beta(x-L)]$, с возрастанием x и $L-x$ быстро затухают. Скорость затухания зависит от величины β , поэтому в силу (11.1) при приближении ω к значению Ω краевой эффект ослабевает (соответствующая зона расширяется). А так как с увеличением скорости среднего течения газа U_0 частота ω уменьшается, то при прочих равных условиях краевой эффект усиливается (однако, конечно, он слабее, чем в случае статического деформированного состояния). С другой стороны, увеличение U_0 приводит к снижению общего уровня деформаций обо-

лочки. В самом деле, прогибы вдали от краев при $M = 0$, согласно (13.5), равны (принято $\eta = 1$)

$$w' = \frac{P}{2D\beta^4} \cos \alpha_k x, \quad w'' = 0, \quad (13.8)$$

где $\beta^4 = \rho h (\Omega^2 - \bar{\omega}^2)/4D$, $\bar{\omega} = k\alpha/L$ — частота колебаний в покоем газе. При этом считаем, что параметры в покоем газе p_0 , ρ_0 , a имеют те же значения, что в потоке¹. Отношение амплитуд прогибов из (13.6) и (13.8) равно

$$\frac{V w'^2 + w''^2}{\bar{w}'} = \left(\frac{\beta}{\bar{\beta}} \right)^4 = \frac{\Omega^2 - \bar{\omega}^2}{\Omega^2 - (1 - M^2)^2 \bar{\omega}^2}. \quad (13.9)$$

Таким образом, при $M \neq 0$, т. е. в случае движущейся среды, амплитуды колебаний оболочки всегда меньше, чем в случае покоем среды.

Сдвиг фаз прогибов по длине оболочки вне зон краевого эффекта, согласно (13.6) и (13.7), оказывается линейным

$$\theta_k = M \alpha_k x \quad (l \leq x \leq L - l).$$

Он совпадает с фазовым соотношением для функции давления (§ 6), поскольку в выражениях для прогибов были отброшены члены, соответствующие изгибной деформации по оси x , как малые порядка $(lk/L)^4$ по сравнению с единицей. Очевидно, для иллюстрации прогибов можно построить такие же графики, как на рис. 10 для акустического давления.

Статический изгиб и вынужденные колебания двух соединенных встык цилиндрических оболочек

Предположим, что оболочка образована из двух соединенных встык неоднородных оболочек. Внутри нее имеет место одномерное газовое течение, разделенное поверхностью разрыва Σ , где претерпевают изменение температура, давление, скорость, плотность. О колебаниях газов в такой трубе говорилось в § 5. Принимаем, что поверхность Σ и место стыковки оболочек лежат в одной плоскости, с которой совмещаем и начало безразмерной координаты $\xi = x/L$. Все величины, относящиеся к зонам — $\xi_1 < \xi < 0$ и $0 < \xi < \xi_2$, обозначим соответственно индексами 1 и 2.

Функцию давления (13.2), пригодную для обеих зон, перепишем в виде

$$p_j = P_j(\xi) e^{i\omega t},$$

$$P_j(\xi) = \frac{P_j}{1 + \eta_j} (e^{-iq_j \xi} + \eta_j e^{is_j \xi}), \quad (13.10)$$

$$\eta_j = Z_j e^{\pm i(q_j + s_j)\xi_j}, \quad Z_j = \frac{z_{rj} - \rho_{0j} a_j}{z_{rj} + \rho_{0j} a_j},$$

$$q_j = \frac{\omega L}{a_j(1 + M_j)}, \quad s_j = \frac{\omega L}{a_j(1 - M_j)} \quad (j = 1, 2).$$

Здесь P_j — известные значения амплитуд давлений по обе стороны поверхности Σ ; L — общая длина оболочек. В показателе степени при η_j знак «+» относится к $j = 1$, а знак «—» к $j = 2$. Прежде всего рассмотрим статическую деформацию оболочек с учетом их температур.

¹ Это может быть достигнуто изменением значений параметров в покоем газе до значений параметров в потоке по соотношениям

$$\rho_0 = \rho_1 \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{U_0}{a_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}, \quad a^2 = a_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2} U_0^2$$

и т. д., где индексом «1» обозначены параметры заторможенного потока.

Допустим, что источником является плоскость теплоподвода. Приведем формулы, позволяющие найти параметры стационарного течения в зоне $j = 2$ по известному начальному состоянию потока (p_{01} , M_1 , T_{01}). Пусть $\Delta p_0 = p_{01} - p_{02}$ — перепад давления с двух сторон поверхности Σ . Использование уравнения движения и первого начала термодинамики дает [42]

$$\overline{\Delta p_0} = \frac{\Delta p_0}{p_{01}} = \frac{\kappa}{1 + \kappa} (1 - M_1^2) - \sqrt{\left[\frac{\kappa}{\kappa + 1} (1 - M_1^2) \right]^2 - \frac{2\kappa M_1^2}{(\kappa + 1) c_v T_{01}} Q_0},$$

где Q_0 — количество выделившегося тепла. Таким образом, при увеличении подогрева увеличивается и Δp_0 , а p_{02} — падает. Последнее достигает наименьшего значения, когда подкоренное выражение обращается в нуль. Значения v_{02} , T_{02} , M_2 , выраженные через $\overline{\Delta p_0}$, имеют вид [42]

$$v_{02} = (1 + \zeta) v_{01}, \quad T_{02} = (1 - \overline{\Delta p_0}) (1 + \zeta) T_{01},$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \zeta}{1 - \overline{\Delta p_0}}} M_1 \left(\zeta = \frac{\overline{\Delta p_0}}{\kappa M_1^2} \right).$$

Определим температуры T_j оболочки, для чего составим уравнение баланса теплового потока через единичную площадку поверхности (перепад температуры по толщине стенки, а также излучение не учитываем)

$$Q_{\xi} + Q_z = 0, \quad (13.11)$$

де $Q_{\xi} = \frac{\lambda h}{L^2} \frac{d^2 T}{d\xi^2}$ — разность потоков тепла через площадку по оси ξ , $Q_z = \alpha^+ (T^+ - T) - \alpha^- (T - T^-)$ — разность потоков тепла между внутренней и наружной поверхностями оболочки. Здесь величины, относящиеся к внутреннему и наружному пограничным слоям у стенок оболочки, отмечены знаками «+» и «-»; λ и α — коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи; h — толщина стенки; T^+ и T^- — температура восстановления

$$T^+ = T_c^+ \left(1 + v^+ \frac{\kappa^+ - 1}{2} M^{+2} \right),$$

$$T^- = T_c^- \left(1 + v^- \frac{\kappa^- - 1}{2} M^{-2} \right);$$

T_c^+ , T_c^- — температуры сред; v^+ , v^- — коэффициенты восстановления (для ламинарного потока $v^{\pm} = 0,85$, для турбулентного — $0,88-0,89$). Предполагаем, что теплоотвод в стенку не приводит к нарушению адиабатичности газового течения. Это будет справедливо, если количество отводимого тепла намного меньше общей энтальпии потока.

Вводя обозначение

$$k_j^2 = \frac{(\alpha_j^+ + \alpha^-) L^2}{\lambda_j h_j}, \quad (13.12)$$

из (13.11) получаем уравнения стационарной теплопроводности для обеих зон

$$\frac{d^2 T_j}{d\xi^2} - k_j^2 T_j = -k_j^2 T_j^*$$

$$T_j^* = \frac{1}{\alpha_j^+ + \alpha^-} (\alpha_j^+ T_j^+ + \alpha^- T^-), \quad (13.13)$$

решениями которых являются

$$T_j = T_j^* + C_j^{(1)} e^{k_j \xi} + C_j^{(2)} e^{-k_j \xi} \quad (j = 1, 2).$$

Определяя постоянные из условий равенства температур и потоков тепла на стыке оболочек и приближенного условия отсутствия тепловых потоков на концах оболочки

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 h_1 \frac{dT_1}{d\xi} = \lambda_2 h_2 \frac{dT_2}{d\xi} \quad (\xi = 0),$$

$$\frac{dT_1}{d\xi} = 0 \quad (\xi = -\xi_1), \quad \frac{dT_2}{d\xi} = 0 \quad (\xi = \xi_2),$$

представим выражения для определения температур в виде

$$T_j = T_j^* - \frac{T_2^* - T_1^*}{\Delta_i} \operatorname{ch} k_j (\xi_j \pm \xi),$$

$$\Delta_1 = - \left(\operatorname{ch} k_1 \xi_1 + \frac{\alpha_1^+ + \alpha^-}{\alpha_2^+ + \alpha^-} \operatorname{sh} k_1 \xi_1 \operatorname{cth} k_2 \xi_2 \right),$$

$$\Delta_2 = \operatorname{ch} k_2 \xi_2 + \frac{\alpha_2^+ + \alpha^-}{\alpha_1^+ + \alpha^-} \operatorname{sh} k_2 \xi_2 \operatorname{cth} k_1 \xi_1.$$
(13.14)

Коэффициенты α_j^+ и α^- в зависимости от скоростей внутреннего и внешнего обтекания оболочки и других факторов могут быть приближенно определены через критерий Нуссельта $Nu = \alpha L / \lambda$. Сведения о значениях α в зависимости от типа камеры, метода охлаждения и тепловой защиты и т. д. можно найти в книгах [98], [2]. Существенно, что пульсации параметров потока приводят к более интенсивной теплоотдаче к стенкам. Заметим, что уравнение (13.13) при $\alpha_j^+ = \alpha^-$ переходит в соответствующее уравнение, получаемое из [18], а при $h_1 = h_2$ — в уравнение работы [158], если последние записать для случая стационарной теплопроводности в цилиндрической оболочке без источников тепла.

Определим температуру оболочки при следующих данных: $R = 0,5$ м, $L_1 = 1$ м, $L_2 = 3$ м, $h_1 = 0,003$ м, $h_2 = 0,004$ м, $\lambda_1 = \lambda_2 = 41$ Вт/м·град, $\alpha_1^+ = \alpha_2^+ = \alpha^- = 120$ Вт/м²·град, $T_1^+ = 700^\circ$ К, $T_2^+ = 1500^\circ$ К, $T^- = 400^\circ$ К. Из (13.14) получаем $T_1(0) = T_2(0) = 750^\circ$ К, $T_1(-1/3) = 550^\circ$ К, $T_2(2/3) = 950^\circ$ К, $T_1(-0,02) = 563^\circ$ К, $T_2(0,02) = 933^\circ$ К.

Этот пример показывает, что по крайней мере для тонких некоротких оболочек при интенсивной теплоотдаче кривую изменения температуры по длине оболочки с достаточной точностью можно заменить ломаной линией и считать, что в сечении $\xi = 0$ происходит скачкообразное изменение температуры. Таким образом, в дальнейшем будем принимать $T_j = T_j^*$.

Далее рассмотрим деформации составной оболочки под действием постоянных во времени внутренних давлений p_{01} ($-\xi_1 < \xi < 0$), p_{02} ($0 < \xi < \xi_2$) и температур $T_1 - T_0$, $T_2 - T_0$ (T_0 — начальная температура стенки). Влияние осевых сил не учитываем. Уравнение (11.1) или (5.7) представим в виде

$$\frac{d^4 w_j}{d\xi^4} + 4\beta_j^4 w_j = 4\beta_j^4 f_j,$$
(13.15)

где

$$4\beta_j^4 = \frac{12(1 - \nu_j^2)L^4}{R^2 h_j^2}, \quad f_j = \frac{p_{0j} R^2}{E_j h_j} + R \mu_j (T_j - T_0).$$
(13.16)

Коэффициенты E_j , ν_j , μ_j (коэффициент температурного расширения) должны приниматься, согласно установившимся температурам T_j .

Общее решение уравнения (13.15), как известно, есть

$$w_j = e^{\beta_j \xi} (C_j^{(1)} \cos \beta_j \xi + C_j^{(2)} \sin \beta_j \xi) + e^{-\beta_j \xi} (C_j^{(3)} \cos \beta_j \xi + C_j^{(4)} \sin \beta_j \xi) + f_j.$$
(13.17)

Запись решения (13.15) в функциях Пузыревского — Крылова, обычно облегчающая вычисление постоянных, при принятых ниже граничных условиях не приводит к упрощению выкладок.

Восемь постоянных C_j определяем, исходя из условий

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w_1^k, \quad dw_1/d\xi = 0 \quad \text{при } \xi = -\xi_1, \\ w_2 &= w_2^k, \quad dw_2/d\xi = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_2, \\ w_1 &= w_2, \quad D_1 d^2 w_1/d\xi^2 = D_2 d^2 w_2/d\xi^2 \\ dw_1/d\xi &= dw_2/d\xi, \quad D_1 d^3 w_1/d\xi^3 = D_2 d^3 w_2/d\xi^3 \end{aligned} \right\} \text{при } \xi = 0,$$
(13.18)

из которых первые четыре означают отсутствие поворотов и равенство температурных расширений подкрепляющих колец w_j^k и концевых сечений оболочки, а последние четыре — условия в месте соединения двух оболочек. Если абсолютно жесткие кольца изготовлены из материалов с коэффициентами температурного расширения μ_j^k и нагреты до температур T_j^k , то $w_j^k = R \mu_j^k (T_j^k - T_0)$.

Определяя C_j с учетом отсутствия влияния краев и стыка друга на друга и подставляя их в (13.17), получаем

$$w_j = f_j - f_j^k + f_j^c, \quad (13.19)$$

где f_j — прогибы (13.16), которые получились бы, если бы не было подкрепляющих колец и связи между оболочками; f_j^k — поправка на прогиб, обусловленная наличием подкрепляющих колец

$$f_j^k = (f_j - w_j^k) \chi_j e^{-\beta_j(\xi_j \pm \xi)}, \quad (13.20)$$

f_j^c — поправка, обусловленная наличием связи между оболочками

$$f_1^c = \frac{(f_2 - f_1)}{bcd} [(b^2d + 2bd + 1) \cos \beta_1 \xi - (1 - b^2d) \sin \beta_1 \xi] e^{\beta_1 \xi}, \quad (13.21)$$

$$f_2^c = \frac{b(f_2 - f_1)}{c} [-(b^2d + 2b + 1) \cos \beta_2 \xi + (1 - b^2d) \sin \beta_2 \xi] e^{-\beta_2 \xi}.$$

Здесь

$$\chi_j = \cos \beta_j (\xi_j \pm \xi) + \sin \beta_j (\xi_j \pm \xi), \quad b = \beta_1/\beta_2, \quad (13.22)$$

$$c = b^2d + 2b^2 + 2b + 2 + \frac{1}{bd}, \quad d = D_1/D_2.$$

Члены f_j^k и f_j^c при удалении от краев и от стыка быстро затухают.

Рассмотрим числовой пример. Примем вышеприведенные размеры оболочки. Пусть $p_{01} = 20$ бар, $p_{02} = 15$ бар, $T_1 - T_0 = 250^\circ$, $T_2 - T_0 = 650^\circ$ и соответственно этим температурам $E_1 = 1,53 \cdot 10^6$ бар, $E_2 = 1,15 \cdot 10^6$ бар, $\nu_j = 0,3$, $\mu_1 = 11 \cdot 10^{-6}$, $\mu_2 = 15 \cdot 10^{-6}$. Для подкрепляющих колец принимаем $T_j^k = T_j$, $\mu_j^k = \mu_j$, $R_j^k = R$. Полные прогибы от нагрузки и температуры вне зон краевого эффекта, согласно (13.19) и (13.16), $w_1 = f_1 = 2,46$ мм, $w_2 = f_2 = 5,69$ мм, а в сечении $\xi = 0$ — по (13.19), (13.21), (13.22) $w_1(0) = w_2(0) = 4,08$ мм. Температурные расширения колец составляют $w_1^k = 1,37$ мм и $w_2^k = 4,87$ мм, которым, согласно (13.20), равняются прогибы оболочки в концевых сечениях.

Напряженное состояние определяем по известным формулам [112]

$$\sigma_{xj} = \pm \frac{6M_{xj}}{h_j^2}, \quad \sigma_{\theta j} = \frac{N_{\theta j}}{h_j} \pm \frac{6\nu_j M_{xj}}{h_j^2}, \quad (13.23)$$

где

$$M_{xj} = \frac{D_j}{L^2} \frac{d^2 w_j}{d\xi^2}, \quad N_{\theta j} = E_j h_j \left[\frac{w_j}{R} - \mu_j (T_j - T_0) \right]. \quad (13.24)$$

Подставляя выражения w_j из (13.19) в (13.24), получаем для участков, лежащих вне зон краевого эффекта,

$$M_{xj} = 0, \quad N_{\theta j} = p_{0j} R$$

и, следовательно, $\sigma_{xj} = 0$, $\sigma_{\theta j} = 3330$ бар, $\sigma_{\theta 2} = 1880$ бар, а в местах соединения с подкрепляющими кольцами

$$M_{xj} = \frac{2D_j \beta_j^2}{L^2} (f_j - w_j^k) [\sin \beta_j (\xi_j \pm \xi) - \cos \beta_j (\xi_j \pm \xi)] e^{-\beta_j (\xi_j \pm \xi)}, \quad N_{\theta j} = 0$$

и

$$\sigma_{x1} = \pm 6000 \text{ бар}, \quad \sigma_{\theta 1} = \pm 1800 \text{ бар}, \quad \sigma_{x2} = \pm 3430 \text{ бар}, \quad \sigma_{\theta 2} = \pm 1030 \text{ бар}.$$

Основной является оценка по $\sigma_{\theta j}$ вдали от краев и стыка, а напряжения краевого эффекта, как правило, довольно высокие, для пластичных материалов не представляют никакой опасности. Более того, как указывает В. И. Феодосьев [116], расчет некоторых типов оболочек, изготовленных из пластичных материалов, по допускаемым напряжениям вообще непригоден. Изменение размеров оболочки за ресурс работы допустимо настолько, чтобы не были нарушены целостность конструкции или режим ее работы. В этом случае приобретает значение оценка пригодности конструкции по величине перемещений (прогибов) и расчет по допускаемым перемещениям с учетом пластических свойств материала.

Независимо от того, упругим или пластическим является статическое напряженное состояние, малые колебания, происходящие около среднего положения равновесия, будут упругими. При этом модули упругости E_j следует брать соответственно температурам T_j оболочки. Уравнение колебаний можно записать в том же виде (13.15), только теперь коэффициенты (13.16) будут следующие:

$$4\beta_j^4 = \frac{h_j L^4 \rho_j}{D_j} (\Omega_j^2 - \omega^2), \quad \Omega_j^2 = \frac{E}{\rho_j R^2}, \quad f_j = \frac{P_j(\xi)}{h_j \rho_j (\Omega_j^2 - \omega^2)}. \quad (13.25)$$

Снова ограничимся случаем $\beta > 0$ и в уравнениях учтем малость изгибных членов для участков вне зон краевого эффекта. Тогда решение уравнения примет форму (13.17) с коэффициентами (13.25) и с комплексными постоянными C_j . Граничные условия будут те же (13.18), с той лишь разницей, что теперь следует положить $w_1(-\xi_1) = w_2(\xi_2) = 0$. В выражении для амплитуд колебаний

$$w_j = f_j - f_j^k + f_j^c \quad (j = 1, 2) \quad (13.26)$$

f_j — снова амплитуда прогиба, получающегося под действием давления (13.10) в отсутствии связи между оболочками и подкрепления краев, f_j^k — эффект подкрепления краев

$$f_j^k = f_j(\pm \xi_j) \chi_j e^{-\beta_j(\xi_j \pm \xi)},$$

f_j^c — влияние связи между оболочками, определяемое при помощи выражений (13.21). В последних вместо разности $f_2 - f_1$ следует подставить

$$f_2(0) - f_1(0) = \frac{P_2}{\rho_2 h_2 (\Omega_2^2 - \omega^2)} - \frac{P_1}{\rho_1 h_1 (\Omega_1^2 - \omega^2)}. \quad (13.27)$$

Выражения для χ_j , b , c , d те же, что выше.

Если оболочки изготовлены из материалов с одинаковыми значениями E_j , ρ_j , h_j и отсутствует теплоподвод ($P_1^* = P_2^*$, $T_1 = T_2$), то, согласно (13.27) и (13.21), исчезает эффект стыкования ($f_j^c = 0$). Из тех же выражений (13.27) и (13.21) следует, что при совпадении частоты колебаний потока ω с собственной частотой одной из оболочек наступает резонанс соответствующей оболочки, который через стык передается другой. Однако резонансные колебания в последней распространяются только на малую зону эффекта стыкования. Такой результат является следствием пренебрежения в уравнениях колебаний малыми изгибными членами вне зон краевого эффекта и продольными силами инерции.

При определении запасов прочности и долговечности оболочки нужно учитывать факторы температуры, стационарности и асимметричности нагружений. Так как обычно усталостные трещины начинаются в местах закреплений, амплитуды напряжений следует определять по прогибам $w_{kj} = f_{kj} - f_{kj}^k$ и $w_{kj} = f_{kj} + f_{kj}^c$.

Учет продольной инерционной силы

Решение уравнения (5.10) в бесконечных рядах для двух состыкованных оболочек затруднительно. Поэтому для понижения порядка этого дифференциального уравнения и решения в замкнутом виде вспомним его анализ, проведенный в § 10. Было установлено, что при волнообразовании с показателем изменчивости $\alpha \sim \sigma$ ($\sigma = \omega/c$) влияние осевой инерционной силы существенно. Предположим, что для зон, не примыкающих к краям и стыку, это условие выполняется. Тогда отношение первых двух членов к последним двум в левой части (5.10) составляет

$$\frac{R^2 h^2 \alpha^4}{12(1 - \sigma^2 R^2)} \sim \left(\frac{l}{L_1}\right)^4,$$

т. е. является пренебрежимо малым (l — длина краевого эффекта, L_1 — длина волны). Таким образом, если исключить из рассмотрения пограничные зоны, то (5.10) можно заменить приближенным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_j}{d\xi^2} + \Phi_j^2 w_j &= \frac{R^2 (1 - \nu_j^2)}{E_j h_j (1 - \nu_j^2 - \sigma_j^2 R^2)} \left(\frac{d^2 p_j}{d\xi^2} + \sigma_j^2 L^2 p_j \right), \\ \Phi_j^2 &= \sigma_j^2 L^2 \frac{1 - \sigma_j^2 R^2}{1 - \nu_j^2 - \sigma_j^2 R^2}. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Около краев и стыка показатель изменчивости β велик ($\alpha^2 = \beta^2 L^2 \gg \sigma^2$), так что в этих зонах справедливо уравнение (5.7). Следовательно, приведенное в предыдущем разделе решение хорошо описывает деформированное и напряженное состояния оболочки вблизи краев и стыка.

По численным значениям прогибов, определенным из уравнения (13.28), прогибы в пограничных зонах могут быть вычислены по формулам (13.26), полученным без учета осевых инерционных сил. В результате такого расщепления уравнения (5.10) довольно просто определяется деформированное состояние оболочки по всей длине.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением уравнения (13.28), причем будем полагать $1 - \nu_j^2 > \sigma_j^2 R^2$ (случай преобладающей упругости). Вначале определим собственные частоты колебаний одной оболочки. Подставляя в однородное уравнение (13.28) функцию стоячей волны $w = W_0 \sin \alpha L \xi$, получим уравнение

$$\alpha^2 L^2 - \Phi^2 = 0,$$

корни которого совпадают с выражениями (12.19)

$$\omega_-^2 = \frac{\Omega^2}{2(1-\nu^2)} [(1 + R^2 \alpha^2) + \sqrt{(1 - R^2 \alpha^2)^2 + 4\nu^2 \alpha^2 R^2}], \quad (13.29)$$

$$\omega_+^2 = \frac{\Omega^2}{2(1-\nu^2)} [(1 + R^2 \alpha^2) - \sqrt{(1 - R^2 \alpha^2)^2 + 4\nu^2 \alpha^2 R^2}],$$

$$\Omega^2 = E/\rho R^2.$$

В случае коротких оболочек ($\alpha^2 R^2 \gg 1$) собственные частоты будут равны

$$\omega_+^2 = \Omega^2, \quad \omega_-^2 = \frac{R^2 \alpha^2}{1 - \nu^2} \Omega^2, \quad (13.30)$$

а в случае достаточно длинных оболочек ($R^2 \alpha^2 \ll 1$) —

$$\omega_+^2 = R^2 \alpha^2 \Omega^2, \quad \omega_-^2 = \frac{\Omega^2}{1 - \nu^2}. \quad (13.31)$$

В (13.30) ω_+ и ω_- являются частотами преимущественно поперечных и продольных колебаний оболочки, а в (13.31), наоборот, частотами преимуще-

ственных поперечных и продольных колебаний являются ω_- и ω_+ . График изменения собственных частот в зависимости от длины L оболочки, построенный по (13.29) ($R = 0,5$ м, $E = 0,5 \cdot 10^6$ бар, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³), приведен на рис. 26, который показывает, что частоты преимущественно поперечных колебаний всегда близки к Ω . Здесь же нанесен квадрат акустической частоты ω первой гармоники для цилиндрической полости с одним закрытым и другим открытым концом при $T = 1900^\circ$ К и $M = 0$. Соотношения (13.29) и последующая оценка их находятся в полном согласии с исследованиями, специально посвященными изучению осесимметричных колебаний оболочек [21], [73], [45].

Возвратимся к задаче вынужденных колебаний. С учетом (13.10) представим правую часть уравнения (13.28) в виде функции бегущих волн

$$(Q_j e^{-iq_j \xi} + S_j e^{is_j \xi}), \quad (13.32)$$

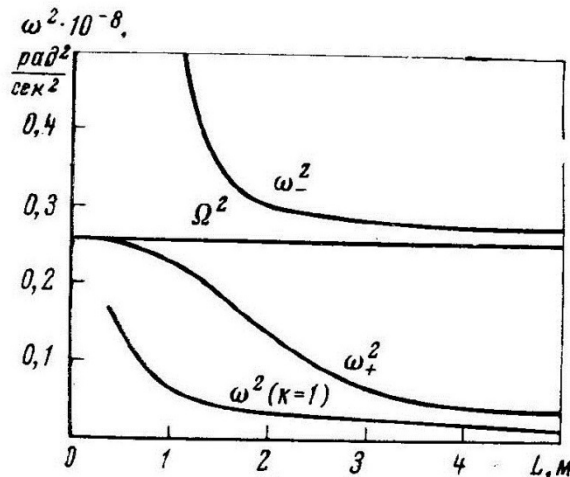


Рис. 26

где

$$Q_j = \frac{P_j R^2 (1 - v_j^2)(\sigma_j^2 L^2 - q_j^2)}{E_j h_j (1 + \eta_j) (1 - v_j^2 - \sigma_j^2 R^2)}, \quad S_j = \frac{\eta_j P_j R^2 (1 - v_j^2)(\sigma_j^2 L^2 - s_j^2)}{E_j h_j (1 + \eta_j) (1 - v_j^2 - \sigma_j^2 R^2)}.$$

Решением уравнения (13.28) будет

$$w_j = C_j^{(1)} \cos \Phi_j \xi + C_j^{(2)} \sin \Phi_j \xi + \frac{Q_j}{\Phi_j^2 - q_j^2} e^{-iq_j \xi} + \frac{S_j}{\Phi_j^2 - s_j^2} e^{is_j \xi}. \quad (13.33)$$

Поскольку это решение около краев и стыка несправедливо, то для определения C_j нет смысла ставить граничные условия относительно функций w_j . Примем условия, при которых осевые усилия около концов отсутствуют, а осевые перемещения и усилия с двух сторон узкой зоны, занимаемой эффектом стыка, равны между собой

$$\left(\frac{du_1}{d\xi} \right)_{(-\xi_1+0)} = 0, \quad \left(\frac{du_2}{d\xi} \right)_{(\xi_2-0)} = 0, \quad u_{1(-0)} = u_{2(+0)},$$

$$n \left(\frac{du_1}{d\xi} + \frac{v_1 L}{R} w_1 \right)_{(-0)} = \left(\frac{du_2}{d\xi} + \frac{v_2 L}{R} w_2 \right)_{(+0)} \left(n + \frac{E_1 h_1}{E_2 h_2} \cdot \frac{1 - v_2^2}{1 - v_1^2} \right).$$

Функции u_j выражаются через w_j посредством уравнения (5.9), в котором опускается малый в рассматриваемой области член с $d^4 w_j / d\xi^4$.

Будем иметь

$$C_j^{(1)} = \Delta_j^{(1)} / \Delta, \quad C_j^{(2)} = \Delta_j^{(2)} / \Delta, \quad (13.34)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{v_2}{v_1} \frac{K_1}{\Phi_1} \gamma_2 \cos \Phi_1 \xi_1 \sin \Phi_2 \xi_2 + \frac{n K_2}{\Phi_2} \gamma_1 \sin \Phi_1 \xi_1 \cos \Phi_2 \xi_2, \\ \Delta_1^{(1)} &= \frac{m_1}{\Phi_1} \gamma_2 \sin \Phi_2 \xi_2 + H_2 \sin \Phi_1 \xi_1, \\ \Delta_1^{(2)} &= \frac{n m_1 K_2}{\Phi_2 K_1} \gamma_1 \cos \Phi_2 \xi_2 + H_2 \cos \Phi_2 \xi_1, \\ \Delta_2^{(1)} &= \frac{n m_2}{\Phi_2} \gamma_1 \sin \Phi_1 \xi_1 + H_1 \sin \Phi_2 \xi_2, \\ \Delta_2^{(2)} &= \frac{v_2 m_2 K_1}{v_1 \Phi_1 K_2} \gamma_2 \cos \Phi_1 \xi_1 = H_1 \cos \Phi_2 \xi_1, \\ H_1 &= \gamma_1 \left(n \frac{v_2 m_1}{v_1 \Phi_1} = n \gamma \sin \Phi_1 \xi_1 - \frac{v_2 K_1 \varepsilon}{v_1 \Phi_1 \gamma_1} \cos \Phi_1 \xi_1 \right), \\ H_2 &= \gamma_2 \left(\frac{m_2}{\Phi_2} - \gamma \sin \Phi_2 \xi_2 + \frac{K_2 \varepsilon}{\Phi_2 \gamma_2} \cos \Phi_2 \xi_2 \right), \\ m_1 &= b_1 e^{iq_1 \xi_1} + b_1 e^{-is_1 \xi_1}, \quad m_2 = b_2 e^{-iq_2 \xi_2} + b_2 e^{is_2 \xi_2}, \\ b_j &= -\frac{Q_j K_j}{\Phi_j^2 - q_j^2} + \frac{\bar{c}_j^2 R^2}{12 E_j h_j} \cdot \frac{P_j}{1 + \eta_j}, \quad d_j = -\frac{S_j K_j}{\Phi_j^2 - s_j^2} + \frac{\bar{c}_j^2 R^2}{12 E_j h_j} \cdot \frac{\eta_j P_j}{1 + \eta_j}, \\ \gamma_j &= \frac{v_j L}{R} - \frac{R K_j}{v_j L}, \quad \chi_j = \frac{Q_j}{\Phi_j^2 - q_j^2} + \frac{S_j}{\Phi_j^2 - s_j^2}, \quad \bar{c}_j^2 = 12 (1 - v_j^2) \left(\frac{L}{R} \right)^2, \\ K_j &= \left(\frac{L}{R} \right)^2 (1 - \sigma_j^2 R^2), \quad \gamma = i \left[\frac{v_2}{v_1} \left(\frac{b_1}{q_1} - \frac{d_1}{s_1} \right) + \frac{b_2}{q_2} + \frac{d_2}{s_2} \right], \\ \varepsilon &= -\frac{n \bar{c}_1^2 R^3 P_1}{12 E_1 h_1 L v_1} - n \gamma_1 \chi_1 + \frac{\bar{c}_2^2 R^3 P_2}{12 E_2 h_2 L v_2} + \gamma_2 \chi_2. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Благодаря осевым инерционным силам резонансные колебания передаются из одной оболочки в другую.

§ 14. Вынужденные колебания цилиндрической оболочки при распределенном по объему вибрационном горении

Определение функции давления

Рассмотрим вынужденные осесимметричные колебания корпуса камеры сгорания, заканчивающейся сверхзвуковым соплом, под действием неустойчивого горения, распределенного вдоль камеры [27].

Указанная система является автоколебательной, поэтому для определения амплитуд и частот колебаний необходимо привлечь соответствующие нелинейные соотношения. Однако решение этой задачи в нелинейной постановке не получено. Поэтому ниже будут рассмотрены деформации оболочки под действием колебаний давления единичной амплитуды (или произвольной амплитуды p^*). Собственные частоты и формы колебаний газа находятся по линейной теории неустойчивого горения. Искажение исходного акустического поля волнами, рассеянными от упругих стенок, не учитывается.

Исследование систем с сосредоточенным горением при принятых в § 6 допущениях просто, так как поток с обеих сторон фронта сосредоточенного горения является однородным, и поэтому распространение возмущений потока может быть определено из решения волнового уравнения (2.18). В случае распределенного горения в потоке газообразных продуктов сгорания будут равномерно по сечению распределены горящие капли топлива, движение около которых нельзя описать при помощи простых волновых уравнений.

В этом двухфазном потоке горящие капли, объем которых можно принять пренебрежимо малым, действуют как распределенные источники массы, количества движения и энергии. Теплоотводом и трением о стенки пренебрегаем. В такой постановке Л. Крокко и С. И. Чжен [138] дали решение в нулевом и первом приближениях (с точностью до M), определили слабые продольные возмущения потока с учетом влияния сопла.

Индексом 1 обозначены все величины, относящиеся к потоку капельно-жидких компонент. Тогда уравнения сохранения массы, количества движения и энергии записываются в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = - \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 v_1) = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (14.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v + \rho_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2 + \rho_1 v_1^2) = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (14.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho e + \rho_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v h + \rho_1 v_1 \left(h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) \right] = 0, \quad (14.3)$$

где q — мгновенная скорость образования продуктов сгорания во всем объеме между головкой камеры ($x = 0$) и сечением x ; e и h — заторможенные значения внутренней энергии и энтальпии газов; $h_1 \approx e_1$ — энтальпия частиц топлива (сюда входит также химическая энергия топлива).

Уравнение состояния газов имеет вид

$$p = \rho B T. \quad (14.4)$$

Пять уравнений (14.1) — (14.4) содержат восемь неизвестных ρ , v , p , T , ρ_1 , v_1 , h_1 , q . Остальные три уравнения Л. Крокко и С. И. Чжен записывают, рассматривая динамику движения и тепловой баланс капель и зависимость скорости горения q от других параметров. Предполагая, что газы давят на капли с силой, пропорциональной числу Рейнольдса, и взяв ускорение капли положительным в направлении движения, можно написать соотношение

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = K (v_1^* - v_1), \quad (14.5)$$

где коэффициент K зависит от множества факторов (его следует рассматривать как эмпирический коэффициент; в первом приближении можно взять «удобное» постоянное значение).

Далее можно считать приближенно постоянной сумму кинетической энергии и энтальпии капель:

$$h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = \text{const.} \quad (14.6)$$

Последнее уравнение описывает скорость горения топлива. Пусть скорость впрыска (подачи) топлива не зависит от изменений физических параметров в камере и будет по-

стоянна. Тогда скорость горения топлива (образования продуктов сгорания) $\frac{\partial q}{\partial x} dt$ через время запаздывания τ и скорость установившегося процесса горения q_0 может быть выражена в виде (см. § 8)

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} dt = \frac{dq_0(x)}{dx} dx \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right).$$

Строго говоря, координата x , входящая в выражения для q и скорости установившегося горения q_0 , различна [138]. Однако в дальнейшем этим различием будем пренебрегать (тем самым не учитывая влияние движения горящего элемента по длине на изменение скорости горения).

Интегрируя предыдущее уравнение в пределах от 0 до x и принимая, что непосредственно у головки камеры горения не происходит $q_0(0) = q(0, t) = 0$, получим

$$q(x, t) = q_0(x) - \int_0^x \frac{d\tau}{dt} \frac{dq_0(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (14.7)$$

Здесь ξ — переменная интегрирования. Величина $d\tau/dt$ дается выражением (1.7)

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{n}{p_0} [p(x, t) - p(x, t - \tau_0)]. \quad (14.8)$$

Такой простой закон справедлив только для малых чисел Маха (порядка 0,1), не слишком больших значений частоты и для времени запаздывания порядка времени распространения звуковой волны в камере.

Восемь уравнений (14.1) — (14.8) дают решение поставленной задачи. В дальнейшем нам потребуются термодинамические соотношения

$$pe = \rho h - p, \quad (14.9)$$

$$h = c_p T. \quad (14.10)$$

Перейдем далее к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{a^* t}{L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p^*}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho^*}, \\ \bar{T} &= \frac{T}{T^*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a^*}, \quad \bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1}{\rho^*}, \quad \bar{v}_1 = \frac{v_1}{a^*}, \\ \bar{q} &= \frac{q}{\rho^* a^*}, \quad \bar{h} = \frac{h - h^*}{a^{*2}} h, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1 - h^*}{a^{*2}} h_1, \quad \bar{K} = \frac{L}{a^*} K, \end{aligned} \quad (14.11)$$

где L — длина камеры, p^* , ρ^* , T^* , $a^* = \sqrt{\kappa B T^*}$ — параметры в сечении $x = 0$. Кроме того, введем обозначение безразмерного времени запаздывания $\bar{\tau} = a^* \tau / L$.

Тогда уравнения запишутся в виде

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v})}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{\xi}}, \quad (14.12)$$

$$-\frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \bar{\tau}} - \frac{\partial (\bar{\rho}_1 \bar{v}_1)}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{\xi}}, \quad (14.13)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v})}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v}^2)}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial (\bar{\rho}_1 \bar{v}_1)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial (\bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2)}{\partial \bar{\xi}} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\xi}}, \quad (14.14)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\tau}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\xi}} \right) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\tau}} - (\bar{h} - \bar{h}_1^*) \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{\xi}}, \quad (14.15)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} \bar{T}, \quad (14.16)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{\tau}} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{\xi}} = \bar{K} (\bar{v} - \bar{v}_1), \quad (14.17)$$

$$\bar{v}_1 + \frac{\kappa - 1}{2} \bar{v}_1^2 = \bar{h}_1^*, \quad (14.18)$$

$$\bar{q} = \bar{q}_0 - \int_0^{\bar{\xi}} \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{\xi}} \frac{d\bar{q}_0}{d\bar{\xi}} d\bar{\xi}, \quad (14.19)$$

$$\bar{h} = \bar{T}, \quad (14.20)$$

где обозначено $\bar{h}_1^* = \bar{h}_1(x=0)$. При выводе (14.15) кроме (14.3) использованы оба уравнения (14.1), уравнение (14.6) и соотношение (14.9).

Уравнения невозмущенного потока (соответствующие обозначения снабдим нулями) получаются из (14.12) отбрасыванием производных по времени и интегрированием при условиях у головки ($\xi=0$):

$$\bar{v}_0 = 0, \bar{\rho}_0 = 1, \bar{p}_0 = 1, \bar{T}_0 = 1, \bar{v}_{10} = \bar{v}_{10}^*, \\ \bar{\rho}_{10}^* \bar{v}_{10}^* = \bar{q}_0, \bar{h}_0 = \bar{h}_{10}^*.$$

Из указанных уравнений можно найти стационарные значения температуры, плотности и т. д. через скорость

$$\bar{T}_0 = 1 - \frac{\kappa-1}{2} \bar{v}_0^2, \bar{\rho}_0 = \frac{\bar{p}_0}{1 - \frac{\kappa-1}{2} \bar{v}_0^2} = \frac{\bar{q}_0}{\bar{v}_0}, \dots$$

Обычно безразмерная скорость v_0 мала (порядка 0,1). Поэтому с точностью до $\bar{v}^2$ относительные параметры установившегося движения равны ($0 < \xi < 1$)

$$\bar{T}_0 = \bar{p}_0 = \bar{\rho}_0 = 1, \bar{q}_0 = \bar{v}_0. \quad (14.21)$$

Последнее равенство показывает, что процесс горения может описываться как скоростью горения, так и изменением скорости потока газов. В дальнейшем будем пользоваться лишь скоростью $\bar{v}_0(x)$, которая в конце зоны горения должна быть задана ($\bar{v}_{01}$). Очевидно, что $\bar{v}_{01}$ до конца камеры остается неизменной. Местное число Маха M на входе в дозвуковую часть сопла при нашем допущении о малости скоростей почти точно совпадает с $\bar{v}_{01}$ (скорость звука по длине камеры постоянна с точностью M^2). Поэтому в дальнейшем число M будет фигурировать вместо $\bar{v}_{01}$.

Составим уравнения для возмущений. Как и в § 2, представим возмущенные значения плотностей, давления, скорости и т. д. в виде суммы соответствующих стационарных значений и малых возмущений

$$\bar{\rho}_0 + \bar{\rho}, \bar{p}_0 + \bar{p}, \bar{v}_0 + \bar{v}, \dots \quad (14.22)$$

Подставив выражения (14.22) в (14.12) — (14.20), вычтем из них соответствующие уравнения стационарного течения и оставим только линейные члены относительно возмущений. Тогда для установившегося процесса колебаний, сократив общий множитель $\exp(i\bar{\omega}\tau)$, получим

$$i\bar{\omega}\bar{\rho} + \frac{d}{d\xi}(\bar{\rho}_0\bar{v} + \bar{v}_0\bar{\rho}) = \frac{d\bar{q}}{d\xi}, \quad \left(\bar{\omega} = \frac{\omega L}{a^*}\right) \\ -i\bar{\omega}\bar{\rho}_1 - \frac{d}{d\xi}(\bar{\rho}_{10}\bar{v}_1 + \bar{v}_{10}\bar{\rho}_1) = \frac{d\bar{q}}{d\xi}, \\ i\bar{\omega}(\bar{\rho}_0\bar{v} + \bar{v}_0\bar{\rho}) + \frac{d}{d\xi}(2\bar{\rho}_0\bar{v}_0\bar{v} + \bar{v}_0^2\bar{\rho}) = \\ = -\frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{p}}{d\xi} - i\bar{\omega}(\bar{\rho}_{10}\bar{v}_1 + \bar{v}_{10}\bar{\rho}_1) - \frac{d}{d\xi}(2\bar{\rho}_{01}\bar{v}_{10}\bar{v}_1 + \bar{v}_{10}^2\bar{\rho}_1), \quad (14.23) \\ i\bar{\omega}[\bar{p}/\kappa - \bar{T}_0\bar{p} + (\kappa-1)\bar{\rho}_0\bar{v}_0\bar{v}] = -\frac{d}{d\xi}\{\bar{v}_0[\bar{p} - \bar{T}_0\bar{p} + (\kappa-1)\bar{\rho}_0\bar{v}_0\bar{v}]\}, \\ \bar{v}_{10} \frac{d\bar{v}_1}{d\xi} + \left(i\bar{\omega} + \frac{d\bar{v}_{10}}{d\xi} + \bar{K}\right)\bar{v}_1 = \bar{K}\bar{v} \\ \bar{q} = n \int_0^\xi [\bar{p}(\xi, \tau) - \bar{p}(\xi, \tau - \bar{\tau}_0)] \frac{d\bar{v}_0(\xi)}{d\xi} d\xi.$$

Не приведенные здесь уравнения (14.16), (14.18), (14.20) уже использованы при выводе третьего уравнения (14.23).

Решить систему уравнений (14.23) затруднительно. Л. Крокко и С. И. Чжен [138] при малых числах Маха M нашли первые два приближения. Были приняты следующие условия у головки ($x=0$)

$$\bar{p} = \bar{p}^*, \bar{v} = \bar{\rho}_1 = \bar{v}_1 = \bar{q} = 0.$$

Последние три условия соответствуют тому, что скорость впрыска топлива не зависит от возмущений параметров в камере.

Далее принимается, что горение заканчивается у входа в дозвуковую часть сопла. Вне зоны горения $\bar{\rho}_{10} = \bar{\rho}_1 = d\bar{q}/d\bar{\xi} = 0$, причем уравнение движения капель не имеет смысла. Оставшиеся уравнения (14.23), кроме последнего, обращаются в уравнения адиабатического движения газа. Отношение $\bar{v}/\bar{\rho}$ должно быть приравнено к безразмерной удельной проводимости сверхзвукового сопла (§ 4). $\ddagger$

Для средней области частот $\bar{\omega} = 0(1)$ нулевое приближение

$$p = p^* \cos \bar{\omega} \bar{\xi}, \quad v = -i \frac{p^*}{\kappa} \sin \bar{\omega} \bar{\xi} \quad (14.24)$$

совпадает с решением для полости с акустически закрытыми концами. Для $M = 0$ это решение является точным. В (14.24) p, v — размерные величины; p^* — амплитуда колебаний давления в сечении $\bar{\xi} = 0$. Первое приближение, содержащее члены порядка M , равно

$$p = p^* \left\{ \cos \bar{\omega} \bar{\xi} + 2i \bar{v}_0 \sin \bar{\omega} \bar{\xi} - i \bar{\omega} \int_0^{\bar{\xi}} [(n\kappa Q(\bar{\xi}) - U(\bar{\xi})) \cos \bar{\omega} (\bar{\xi} - \bar{\zeta}) + V(\bar{\zeta}) \sin \bar{\omega} (\bar{\xi} - \bar{\zeta})] d\bar{\zeta} \right\}, \quad (14.25)$$

где

$$Q(\bar{\xi}) = \int_0^{\bar{\xi}} \cos \bar{\omega} \bar{\zeta} [1 - e^{-i\bar{\omega} \bar{\tau}_0}] \frac{d\bar{v}_0}{d\bar{\zeta}} d\bar{\zeta},$$

$$U(\bar{\xi}) = (\kappa - 1) \bar{v}_0 \cos \bar{\omega} \bar{\xi} + \frac{\bar{K}}{\bar{\omega}} \bar{\rho}_{10} \sin \bar{\omega} \bar{\xi},$$

$$V(\bar{\xi}) = (3 - \kappa) \bar{v}_0 \sin \bar{\omega} \bar{\xi}.$$

Столь же громоздкое выражение получается и для v , которое за ненадобностью не приводим. Первое приближение содержит погрешность M^2 , что, например, для $M = 0,2$ составляет 4%. В дальнейшем величину $\bar{K}$ будем принимать равной нулю. Следовательно, не будет учитываться тормозящее действие капель на процесс колебаний.

Таким образом, для определения функции давления (14.25) необходимо знать величины $n, \bar{\tau}_0, \bar{\omega}$. Скорость $\bar{v}_0(\bar{\xi})$ считается известной (определяется из газодинамического расчета камеры).

Для определения $\bar{\omega}$ запишем условие равенства акустических проводимостей в сечении $\bar{\xi} = 1$

$$\kappa v/p = My, \quad (14.26)$$

где $y = y_r + iy_i$ акустическая проводимость сверхзвукового сопла (§ 4). Поскольку влияние числа Маха на собственные частоты имеет порядок M^2 (§ 6), то достаточно точное значение $\bar{\omega}$ можно получить, подставляя в (14.26) решения нулевого приближения (14.24). Будем иметь

$$\bar{\omega} = k\pi - \arctg(My_i), \quad (14.27)$$

т. е. изменение частоты по сравнению с собственной частотой в закрытой трубе связано лишь с мнимой частью проводимости. Вещественная часть y_r связана с излучением колебательной энергии через сопло. Мы считаем, что последнее уравновешивается с подводом колебательной энергии в процессе горения.

Графики y_r и y_i в зависимости от M на входе в сопло и приведенной частоты $\bar{\omega}_* = \frac{a}{a_* - v_{01}} \frac{L_*}{L} \bar{\omega}$ (L_* — длина дозвуковой части сопла, a_* — скорость звука в критическом сечении, $a = a^*$ — скорость звука в камере) даны на рис. 7. Поскольку y_i в свою очередь зависит от $\bar{\omega}$, то y_i и $\bar{\omega}$ должны быть найдены последовательными приближениями.

Показатель взаимодействия n и коэффициент запаздывания $\bar{\tau}_0$ для установившихся колебаний в зависимости от $\bar{\omega}, y_r$ и y_i определяются по формулам [138]

$$n(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\kappa} \frac{I_r^2 + I_i^2}{I_r J_r + I_i J_i}, \quad (14.28)$$

$$\bar{\tau}_0(\bar{\omega}) = \frac{2}{\bar{\omega}} \left[\left(m_1 + \frac{1}{2} \right) \pi - \arctg \frac{I_i}{I_r} + \arctg \frac{J_i}{J_r} \right],$$

$$I_r = (\kappa + y_r) M \cos \bar{\omega} + 2y_i M^2 \sin \bar{\omega} - B - y_i M A,$$

$$I_i = \sin \bar{\omega} + y_i M \cos \bar{\omega} + 2y_i M^2 \sin \bar{\omega} + y_i M A,$$

$$J_r = D - y_i M C, \quad J_i = y_i M C,$$

$$A(\bar{\omega}) = \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \int_0^1 \bar{v}_0 d\xi - (2 - \kappa) \bar{\omega} \int_0^1 \bar{v}_0 \cos \bar{\omega} (1 - 2\xi) d\xi,$$

$$B(\bar{\omega}) = \bar{\omega} \sin \bar{\omega} \int_0^1 \bar{v}_0 d\xi - (2 - \kappa) \bar{\omega} \int_0^1 \bar{v}_0 \sin \bar{\omega} (1 - 2\xi) d\xi,$$

$$C(\bar{\omega}) = \bar{\omega} \int_0^1 \bar{v}_0 \cos \bar{\omega} (1 - 2\xi) d\xi,$$

$$D(\bar{\omega}) = M \cos \bar{\omega} - \bar{\omega} \int_0^1 \bar{v}_0 \sin \bar{\omega} (1 - 2\xi) d\xi.$$

В этих выражениях $m_1 = 0, 1, 2, \dots$. Для рассматриваемого нами порядка частот $\bar{\omega} = 0(1)$ величины A, B, C, D имеют порядок M . В составе I и J наряду с $0(M)$ имеются члены,

содержащие M^2 , однако их нельзя отбросить, так как при достаточно большой приведенной частоте $\bar{\omega}_*$ величины y_r и y_i могут достигнуть порядка $1/M$.

Приведем числовой пример. Пусть $M = 0,2$, $\kappa = 1,2$, $m_1 = 0$, $k = 1$, а скорость по длине камеры меняется по линейному закону $\bar{v}_0 = M\xi$ (при вычислении выражений (14.25) и (14.28) следует считать $\bar{v}_0 = M\xi$). Чтобы не задаваться параметрами сопла, входящими в выражение приведенной частоты $\bar{\omega}_*$, сразу примем $\bar{\omega}_* = 1$. По графикам рис. 7 находим $y_r = 0,65$, $y_i = 1,39$, а по формуле (14.27) — $\bar{\omega} = 2,86$. Имея эти данные, с помощью выражения (14.28) находим: $n = 2,08$, $\tau_0 = 2,99/\bar{\omega}$.

На рис. 27 сплошными линиями нанесена эпюра возмущений давления (вещественная часть выражения (14.25)) для значений времени $\tau = 0$ и $\bar{\omega}\tau = \pi/4$. Там же для сравнения приводится эпюра возмущений давления при сосредоточенном у головки камеры горения для тех же характеристик сопла и числа M . Как видно из графика, максимумы этих

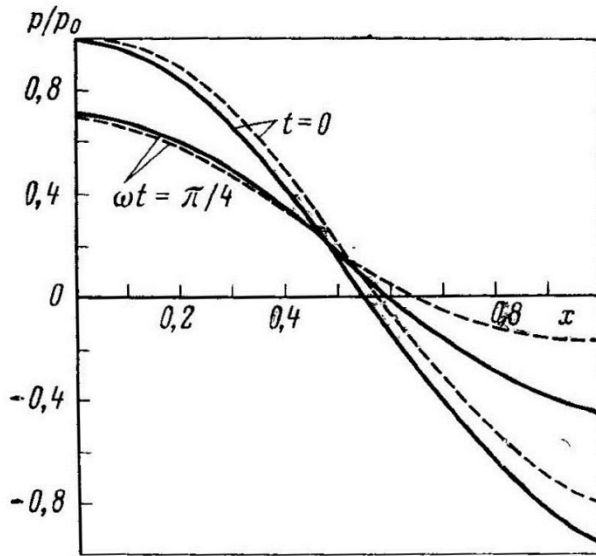


Рис. 27

давлений (при $\tau = 0$) отличаются незначительно. Так как распределение горения по длине камеры (следовательно, и функция v_0) зависит от многочисленных факторов, которые подчас трудно учесть, представляет интерес оценить влияние функции $v_0(\xi)$ на эпюру возмущений давления. Для этого была выбрана одна из правдоподобных функций: $\bar{v}_0 = M \sin^2 \frac{\pi\xi}{2}$. Вычисления показали, что отличие в значениях давления при этой функции и при линейном законе $\bar{v}_0$ не превышает погрешности, содержащейся в формуле (14.25), т. е. M^2 .

Приближенное определение перемещений в оболочке

Пусть для краев корпуса цилиндрической камеры приняты условия шарнирного закрепления. Далее условимся, что в сечении $\xi = 1$ находятся подвески, препятствующие осевому перемещению, а в сечении $\xi = 0$ действует осевая сила $\pi R^2 p^* e^{i\bar{\omega}\tau}$ от давления (14.25) на закрытое дно. Таким образом, будем иметь

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = u = 0 \quad (\xi = 1), \quad (14.29)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{LR(1-\nu^2)}{2Eh} (p^* + m_0 \bar{\omega}^2 \frac{a^2}{L^2} u) \quad (\xi = 0),$$

где m_0 — масса на единицу площади днища.

Систему уравнений осесимметричных колебаний оболочки (5.8) под действием давления, выраженного функцией (14.25), при помощи подстановок

$$u = u_1 + iu_2, \quad w = w_1 + iw_2 \quad (14.30)$$

можно привести к двум системам уравнений относительно амплитуд u_1, w_1, u_2, w_2 . Они будут отличаться от (5.8) только тем, что в первую систему будет входить вещественная часть функции (14.25)¹

$$p_1(\xi) = p^* \left(\cos \bar{\omega}\xi + \frac{\kappa n M}{2} \cdot \xi \cdot \sin \bar{\omega}\tau_0 \cdot \sin \bar{\omega}\xi \right), \quad (14.31)$$

а во вторую — мнимая часть

$$p_2(\xi) = \frac{p^*}{2} \{ M\xi \sin \bar{\omega}\xi [2 + \kappa - \kappa n (1 - \cos \bar{\omega}\tau_0)] + M\bar{\omega}\xi^2 \cos \bar{\omega}\xi \}. \quad (14.32)$$

Заметим, что указанные уравнения движения оболочки теперь нужно записать в безразмерной координате $\xi = x/L$.

Приведем приближенное решение уравнений без учета инерционного члена в последнем условии (14.29). Исходим из того, что в случае некороткой оболочки влияние моментного члена $\frac{h^2}{12L^4} \frac{d^4 w}{d\xi^4}$ на осевые перемещения пренебрежимо мало. Исключая w_1 , получаем

$$\frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + \Phi^2 u_1 = \gamma \frac{dp_1}{d\xi}, \quad (14.33)$$

где обозначено

$$\Phi^2 = \sigma^2 L^2 \frac{1 - \sigma^2 R^2}{1 - \nu^2 - \sigma^2 R^2}, \quad \gamma = - \frac{RL\nu(1 - \nu^2)}{Eh(1 - \nu^2 - \sigma^2 R^2)}, \quad (14.34)$$

$$\sigma^2 = (\omega/c)^2 = (\bar{\omega}a/Lc)^2.$$

Решение неоднородного уравнения (14.33), с учетом (14.31) и граничных условий $u_1 = 0$ ($\xi = 1$)

$$\frac{du_1}{d\xi} = \frac{(1 - \nu^2) RL}{2Eh} p^* \quad (\xi = 0)$$

при $\Phi^2 > 0$ имеет вид

$$u_1 = C_1 \cos \Phi\xi + C_2 \sin \Phi\xi + C_3 \xi \cos \bar{\omega}\xi + C_4 \sin \bar{\omega}\xi, \quad (14.35)$$

где

$$C_1 = - \frac{1}{\cos \Phi} (C_2 \sin \Phi + C_3 \cos \bar{\omega} + C_4 \sin \bar{\omega}),$$

$$C_2 = \frac{1}{\Phi} \left[\frac{(1 - \nu^2) RL}{2Eh} p^* - C_3 - C_4 \bar{\omega} \right],$$

$$C_3 = \frac{\gamma \gamma_1 \bar{\omega}}{\Phi^2 - \bar{\omega}^2}, \quad C_4 = \frac{\gamma [\gamma_2 \Phi^2 + (2\gamma_1 - \gamma_2) \bar{\omega}^2]}{(\Phi^2 - \bar{\omega}^2)^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} p^* \kappa n M \sin \bar{\omega}\tau_0, \quad \gamma_2 = - p^* \bar{\omega} + \frac{1}{2} p^* \kappa n M \sin \bar{\omega}\tau_0.$$

Аналогично получаем решение при нагрузке (14.32) и граничных условиях $u_2 = 0$ ($\xi = 1$), $du_2/d\xi = 0$ ($\xi = 0$)

$$u_2 = D_1 \cos \Phi\xi + D_2 \sin \Phi\xi + D_3 \xi \cos \bar{\omega}\xi + (D_4 + D_5 \xi^2) \sin \bar{\omega}\xi. \quad (14.36)$$

¹ Взят линейный закон $\bar{v}_0(\xi)$.

Здесь

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{\cos \Phi} [D_2 \sin \Phi + D_3 \cos \bar{\omega} + (D_4 + D_5) \sin \bar{\omega}], \\ D_2 &= -\frac{1}{\Phi} (D_3 + D_4 \bar{\omega}), \quad D_3 = \frac{\bar{\omega} \gamma (p^* M + \gamma_3)(\Phi^2 - \bar{\omega}^2) + 2M \gamma \bar{\omega}^3 p^*}{(\Phi^2 - \bar{\omega}^2)^2}, \\ D_4 &= \frac{\gamma \gamma_3 + 2\bar{\omega} D_3 - 2D_5}{\Phi^2 - \bar{\omega}^2}, \quad D_5 = -\frac{1}{2} \frac{\gamma M \bar{\omega}^3 p^*}{\Phi^2 - \bar{\omega}^2}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{2} M p^* \left(2 + \kappa - 2\kappa n \sin^2 \frac{\bar{\omega} \tau_0}{2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя теперь выражение (14.35) во второе уравнение колебаний (в котором моментный член сохраняется), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_1}{d\xi^4} + 4\beta^4 w_1 &= \frac{1}{b_*^2} \left[A_1 \cos \bar{\omega} \xi + B_1 \xi \sin \bar{\omega} \xi + \frac{\nu L}{R} \Phi (C_1 \sin \Phi \xi - C_2 \cos \Phi \xi) \right], \\ 4\beta^4 &= \frac{1}{b_*^2} \left(\frac{L}{R} \right)^2 (1 - \sigma^2 R^2), \quad b_*^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{L} \right)^2, \\ A_1 &= \frac{p^*}{m} \left(\frac{L}{c} \right)^2 - \frac{\nu L}{R} (C_3 + \bar{\omega} C_4), \quad B_1 = \frac{\gamma_1}{m} \left(\frac{L}{c} \right)^2 + \frac{\nu L}{R} \bar{\omega} C_3. \end{aligned} \quad (14.37)$$

Общее решение уравнения (14.37), с учетом оставшихся условий (14.29) отсутствия взаимного влияния краев, представим в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{\beta \xi} (C_6 \cos \beta \xi + C_7 \sin \beta \xi) + e^{-\beta \xi} (C_8 \cos \beta \xi + C_9 \sin \beta \xi) + \\ &+ \frac{1}{4\beta^4 b_*^2} \left[A_1 \cos \bar{\omega} \xi + B_1 \xi \sin \bar{\omega} \xi + \frac{\nu L}{R} \Phi (C_1 \sin \Phi \xi - C_2 \cos \Phi \xi) \right], \\ C_6 &= -\frac{\cos \beta}{4\beta^4 b_*^2} e^{-\beta} \left[A_1 \cos \bar{\omega} + B_1 \sin \bar{\omega} + \frac{\nu L}{R} \Phi (C_1 \sin \Phi - C_2 \cos \Phi) \right], \\ C_7 &= C_6 \operatorname{tg} \beta, \quad C_8 = -\frac{1}{4\beta^4 b_*^2} \left(A_1 - \frac{\nu L}{R} \Phi C_2 \right), \\ C_9 &= -\frac{1}{8\beta^4 b_*^2} (\bar{\omega}^2 A_1 - 2\bar{\omega} B_1 - \frac{\nu L}{R} \Phi^3 C_2). \end{aligned}$$

При записи этих коэффициентов отброшены величины $\bar{\Phi}^4$ и $\bar{\omega}^4$, малые по сравнению с β^4 . Аналогичные вычисления для w_2 приводят к следующему выражению

$$\begin{aligned} w_2 &= e^{\beta \xi} (D_6 \cos \beta \xi + D_7 \sin \beta \xi) + e^{-\beta \xi} (D_8 \cos \beta \xi + D_9 \sin \beta \xi) + \\ &+ \frac{1}{4\beta^4 b_*^2} \left[(A_2 \xi^2 + A_3) \cos \bar{\omega} \xi + B_2 \xi \sin \bar{\omega} \xi + \frac{\nu L}{R} \Phi (D_1 \sin \Phi \xi - D_2 \cos \Phi \xi) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{p^* \bar{\omega} M}{2} \left[\frac{1}{m} \left(\frac{L}{c} \right)^2 + \frac{\nu L}{R} \frac{\gamma \bar{\omega}^2}{\Phi^2 - \bar{\omega}^2} \right], \quad A_3 = -\frac{\nu L}{R} (D_3 + D_4 \bar{\omega}), \\ B_2 &= \frac{\gamma_3}{m} \left(\frac{L}{c} \right)^2 + \frac{\nu L}{R} (D_3 \bar{\omega} - 2D_5), \\ D_6 &= -\frac{\cos \beta}{4\beta^4 b_*^2} e^{-\beta} \left[(A_2 + A_3) \cos \bar{\omega} + B_2 \sin \bar{\omega} + \frac{\nu L}{R} \Phi (D_1 \sin \Phi - D_2 \cos \Phi) \right], \\ D_7 &= D_6 \operatorname{tg} \beta, \quad D_8 = -\frac{1}{4\beta^4 b_*^2} \left(A_3 - \frac{\nu L}{R} \Phi D_2 \right), \\ D_9 &= -\frac{1}{8\beta^4 b_*^2} (\bar{\omega}^2 A_3 - 2A_2 - 2\bar{\omega} B_2 - \frac{\nu L}{R} \Phi^3 D_2). \end{aligned}$$

Полные перемещения будут

$$u = u_1 \cos \bar{\omega} \tau - u_2 \sin \bar{\omega} \tau, \quad w = w_1 \cos \bar{\omega} \tau - w_2 \sin \bar{\omega} \tau.$$

Решение в бесконечных рядах

Приведенное выше решение может быть применено при ручном подсчете. Для подсчета на быстродействующих вычислительных машинах предпочтительнее иметь решение в рядах. При этом может быть учтена также инерционность днища, входящая в последнее условие (14.29). Кроме того, полученные выражения для перемещений будут справедливы и для коротких оболочек, когда краевой эффект охватывает всю длину оболочки.

Используем уравнение колебаний оболочки в форме (5.10). С учетом подстановок (14.30) и $p = p_1 + ip_2$ приводим его к двум уравнениям, из которых одно содержит только w_1 и p_1 , а другое — w_2 и p_2 . То же самое относится к граничным условиям (14.29).

Применяя к первому из полученных уравнений операцию синуспреобразования [106]

$$w_1(j) = \int_0^1 w_1(\xi) \sin \alpha_j \xi d\xi, \quad (\alpha_j = j\pi)$$

и используя граничные условия для w_1 , находим изображение

$$w_1(j) = \frac{1}{\kappa(j)} \left[p_1(j) + (-1)^j \alpha_j \frac{d^4 w_1(1)}{d\xi^4} - \alpha_j \frac{d^4 w_1(0)}{d\xi^4} \right],$$

где

$$\kappa(j) = -\alpha_j^6 + \frac{b^2}{1-\nu^2} \sigma^2 R^2 \left(\frac{L}{h} \right)^2 \left[\frac{h^2}{12L^2} \alpha_j^4 - \frac{1-\nu^2-\sigma^2 R^2}{\sigma^2 R^2} \alpha_j^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 (1-\sigma^2 R^2) \right],$$

$$p_1(j) = \frac{b^2 L^2 R^2}{E h^3} \int_0^1 \left(\frac{d^2 p_1}{d\xi^2} + \frac{b^2 \sigma^2 R^2}{12(1-\nu^2)} p_1 \right) \sin \alpha_j \xi d\xi.$$

Исходная функция (оригинал) w_1 равна

$$w_1 = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa(j)} \left[p_1(j) + (-1)^j \alpha_j \frac{d^4 w_1(1)}{d\xi^4} - \alpha_j \frac{d^4 w_1(0)}{d\xi^4} \right] \sin \alpha_j \xi. \quad (14.38)$$

Значения последних двух членов (14.38) определяем исходя из граничных условий для u_1 .

Проинтегрировав второе уравнение (5.8) с учетом (14.38), находим функцию (постоянную интегрирования приравниваем нулю, ибо она соответствует осевому перемещению оболочки как жесткого тела)

$$\begin{aligned} \frac{\nu L}{R} u_1 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda(j)}{\alpha_j} \left[p_1(j) + (-1)^j \alpha_j \frac{d^4 w_1(1)}{d\xi^4} - \alpha_j \frac{d^4 w_1(0)}{d\xi^4} \right] \cos \alpha_j x + E_1(\xi), \\ \lambda(j) &= \frac{2}{\kappa(j)} \left[b^2 \alpha_j^4 + L^2 \left(\frac{1}{R^2} - \sigma^2 \right) \right], \\ E_1(\xi) &= \frac{b^2 R^2}{12 E h} \int p_1(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (14.39)$$

которую подставляем в правую часть последнего условия (14.29). В левую часть этого условия можно сразу подставить выражение для производной $du_1(0)/d\xi$ (причем следует учесть, что $w_1(0) = 0$), найденной из второго уравнения (5.8). В результате имеем

$$\frac{d^4 w_1(0)}{d\xi^4} = \frac{K_1}{K} + N \frac{d^4 w_1(1)}{d\xi^4}, \quad (14.40)$$

где

$$K_1 = \frac{p^* LR (1 - v^2)}{2Eh} \left(1 - \frac{2}{v}\right) + \frac{6m_0 a^2 \bar{\omega}^2 (1 - v^2)}{m v c^2 b^2} E_1(0) +$$

$$+ \frac{m_0 R^2 \bar{\omega}^2 a^2 (1 - v^2)}{2Eh v L^2} \sum_{j=1}^{\infty} p_1(j) \frac{\lambda(j)}{\alpha_j}, \quad E_1(0) = E_1(\xi)|_{\xi=0},$$

$$K = -\frac{Rb^2}{Lv} + \frac{m_0 R^2 \bar{\omega}^2 a^2 (1 - v^2)}{2Eh v L^2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(j),$$

$$N = \frac{m_0 R^2 \bar{\omega}^2 a^2 (1 - v^2)}{2KEh v L^2} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \lambda(j).$$

При помощи (14.40) функцию перемещения (14.39) выражаем через $d^4 w_1(1)/d\xi^4$. Тогда из оставшегося условия $u_1(1) = 0$ найдем

$$\frac{d^4 w_1(1)}{d\xi^4} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(j) \left[\frac{1}{\alpha_j} p_1(j) - \frac{K_1}{K} \right] + E_1(1)}{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(j) [N - (-1)^j]}. \quad (14.41)$$

Таким образом, подставляя (14.40) и (14.41) в (14.38) и (14.39), будем иметь выражения для перемещений w_1 и u_1 .

Решения w_2 и u_2 имеют тот же вид, что выражения (14.38) и (14.39). Только индекс «1» следует заменить индексом «2», при этом в формулы будет входить функция давления (14.32). Не изменяется также соотношение (14.40), (14.41), однако коэффициент K_2 в них будет равен коэффициенту K_1 без первого члена, т. е.

$$K_2 = \frac{6m_0 a^2 \bar{\omega}^2 (1 - v^2)}{m v c^2 b^2} E_2(0) + \frac{m_0 R^2 \bar{\omega}^2 a^2 (1 - v^2)}{2Eh v L^2} \sum_{j=1}^{\infty} p_2(j) \frac{\lambda(j)}{\alpha_j}.$$

Это несовпадение обусловливается отличием граничного условия для $du_2(0)/d\xi$ от условия для $du_1(0)/d\xi$.

Полагая $m_0 = 0$, получаем решение без учета инерционности днища [27]. Тогда

$$K_1 = -\frac{p^* LR (1 - v^2)}{2Eh} \left(\frac{2}{v} - 1 \right), \quad K_2 = 0, \quad K = -\frac{Rb^2}{Lv}, \quad N = 0.$$

При вычислении прогибов w в соответствующих рядах необходимое число членов должно иметь порядок $L/\sqrt{Rh}$, что обеспечивает достаточную точность решения в зонах краевого эффекта. В выражении продольных перемещений можно ограничиваться меньшим числом членов.

§ 15. Колебания цилиндрической оболочки, вызванные ударными волнами

Оболочка под действием волн, возбуждаемых поршнем [28]

Рассмотрим колебания цилиндрической оболочки, один конец которой жестко закрыт ($x = 0$), а на другом конце задана скорость движения плоского поршня $v = l\omega \cos \omega t$. Решение соответствующей нелинейной задачи при условии, что оболочка абсолютно жесткая, было приведено в § 7.

Рассмотрим случай совпадения частоты поршня ω с собственными частотами полости $N\pi a/L$, когда в трубе возникают ударные волны. При этом в (7.18) следует положить $r = 0$.

С помощью (7.5), (7.7) и (7.18) определим возмущение скорости звука

$$a' = a'_1 + a'_2 = \frac{\kappa - 1}{2} a \sqrt{\varepsilon} \left[\cos \frac{\omega}{2} \left(t - \frac{x}{a} \right) + \cos \frac{\omega}{2} \left(t + \frac{x}{a} \right) \right] + O(\varepsilon), \quad (15.1)$$

$$\omega = N\pi a/L, \quad \varepsilon = 4l/L(\kappa + 1), \quad 0 \leq \frac{\omega}{2} \left(t \pm \frac{x}{a} \right) \leq \pi.$$

Это выражение справедливо при числах ε порядка 10^{-2} и ниже. Ограничим ε величиной порядка 10^{-3} , так что амплитуда движения поршня $l \sim 10^{-3} L$. Тогда членами порядка ε по сравнению с $\sqrt{\varepsilon}$ можно пренебречь.

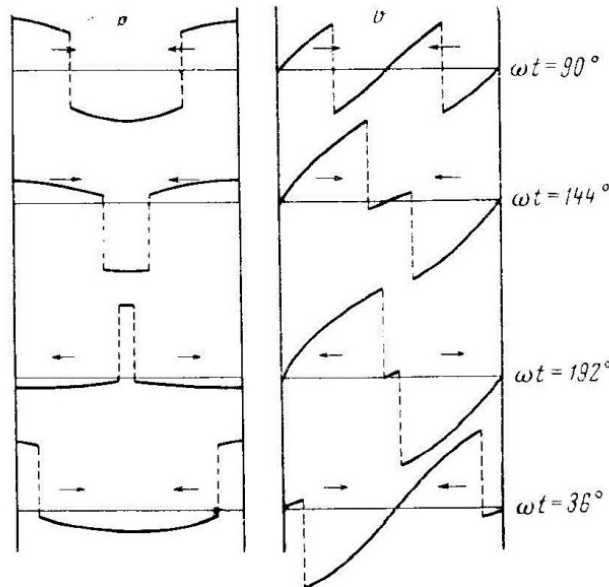


Рис. 28

Давление в трубе через возмущение скорости звука a' выразим по формуле, получающейся из соотношения адиабаты,

$$p = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{a} a' + \dots \quad (15.2)$$

Поскольку дальнейшие члены этого разложения согласно (15.1) дают порядок ε , то их не учитываем. Подставляя разложения

$$\cos \frac{\omega}{2} \left(t \pm \frac{x}{a} \right) = \sum_{s=2,4,\dots}^{\infty} \frac{4s}{\pi(s^2 - 1)} \sin \frac{s\omega}{2} \left(t \pm \frac{x}{a} \right)$$

и выражение (15.1) в (15.2), получаем

$$p = p_\varphi = \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} \mathcal{P}_k \cos k\lambda x \sin k\omega t, \quad (15.3)$$

$$\mathcal{P}_k = \kappa p_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{16}{\pi} \cdot \frac{k}{(2k)^2 - 1}, \quad \lambda = \frac{N\pi}{L}.$$

Эпюры скоростей и давлений по длине оболочки для второй моды ($N = 2$) при $\omega t = 90^\circ, 144^\circ, 192^\circ, 36^\circ$ приведены на рис. 28.

В результате колебаний упругой оболочки к давлению p_φ добавится давление рассеянных волн p_ψ (§ 12). Колебания оболочки и рассеянные волны считаем малыми. Далее не будем учитывать осевые инерционные силы в оболочке.

Следовательно, задача сводится к решению уравнений

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2} w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_\Phi + p_\Psi, \quad (15.4)$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (15.5)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} w = \partial^2 w / \partial x^2 &= 0 & (x = 0, L), \\ \partial \psi / \partial x &= 0 & (x = 0, L), \\ \partial w / \partial t &= \partial \psi / \partial r & (r = R). \end{aligned} \quad (15.6)$$

Условия при $x = 0, L$ будут удовлетворены, если принять

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_{kj} \sin k\omega t \sin j\lambda x, \\ \psi &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} B_{kq} J_0(\gamma_{kq} r) \cos k\omega t \cos q\lambda x. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Подстановка последнего выражения (15.7) в (15.5) дает $\gamma_{kq}^2 = (k^2 - q^2) \lambda^2$. Введем (15.7) в последнее из условий (15.6) и умножим его на $\cos q\lambda x dx$. Интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до L/N , находим коэффициенты

$$B_{kq} = - \frac{\varepsilon_q k \omega}{\gamma_{kq} J_1(\gamma_{kq} R)} \sum_{j=1}^{\infty} W_{kj} X_{jq},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 1, \quad \varepsilon_{q \geq 1} = 2, \\ X_{jq} &= \begin{cases} \frac{2j}{\pi(j^2 - q^2)} & \text{при } (j + q) = \text{нечетное число} \\ 0 & \text{при } (j + q) = \text{четное число.} \end{cases} \end{aligned} \quad (15.8)$$

Давление рассеянных волн

$$p_\Psi = - \rho_0 \partial \psi / \partial t = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (k\omega)^2 W_{kj} \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q m_{kq}^* X_{jq} \sin k\omega t \cdot \cos q\lambda x. \quad (15.9)$$

Здесь обозначено

$$m_{kq}^* = - \rho_0 \frac{J_0(\gamma_{kq} R)}{\gamma_{kq} J_1(\gamma_{kq} R)}.$$

Подставим (15.3), (15.9) и функцию прогиба (15.7) в уравнение колебаний оболочки (15.4). После умножения его на $\sin j_1 \lambda x dx$ и интегрирования в пределах от 0 до L/N , получаем бесконечную систему алгебраических уравнений

$$m [\Omega_j^2 - (k\omega)^2] W_{kj} - 2(k\omega)^2 \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q m_{kq}^* X_{jq} X_{j_1 q} W_{kj_1} = 2\mathcal{P}_k X_{jk}, \quad (15.10)$$

$$\Omega_j^2 = \frac{1}{m} \left[D(j\lambda)^4 + \frac{Eh}{R^2} \right], \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_{q \geq 1} = 2, \quad (15.11)$$

$$\left. \begin{aligned} j+q &= \\ j+k &= \\ j_1+q &= \end{aligned} \right\} \begin{array}{ll} \text{нечетное} & j = 1, 2, 3... \\ \text{число} & k = 1, 2, 3... \end{array}$$

Величины X_{jq} и X_{jk} определяются из (15.8). Подставляя в первое выражение (15.7) найденные из (15.10) амплитуды W_{kj} , находим прогибы оболочки под действием ударных волн.

Ряды по j , q обладают теми же свойствами сходимости, как и рассмотренные в § 9. Некоторое представление о сходимости при суммировании по j и k дает числовой пример, выполненный на ЭЦВМ. Было принято $L=1$ м, $R=0,447$ м, $h=0,4 \cdot 10^{-3}$ м, $E=1,96 \cdot 10^9$ бар, $\rho=7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $a=340$ м/сек. Прогиб оболочки вычислялся без учета рассеянных волн

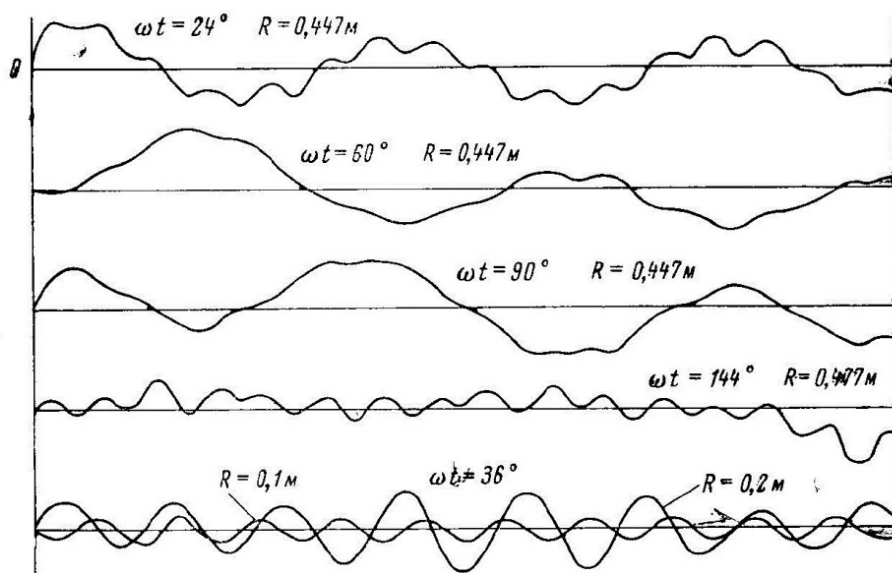


Рис. 29

по формуле

$$\frac{\pi^2 m}{64 \mu p_0 \sqrt{\varepsilon}} w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{kj}{(4k^2 - 1)(j^2 - k^2)(\Omega_j^2 - k^2 \omega^2)} \sin k \omega t \sin j \lambda x$$

($k + j =$ нечетно).

Значения прогибов, определенные с числом членов в ряду до $k = 30$ и $j = 50$, не отличаются сколько-нибудь заметно от значений, вычисленных с числом членов до $k = 100$ и $j = 200$. Лишь в окрестности $x = L/2$ наблюдается медленная сходимость. Наибольший вес имеет член с таким k , при котором величина $\Omega_j^2 - (k\omega)^2$ в знаменателе выражения для w достигает минимума. При принятых выше параметрах это значение числа равно пяти.

На рис. 29 приведены эпюры прогибов на половине длины оболочки для $\omega t = 24^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ и 144° . Можно заметить, что на длине $L/2$ укладываются две с половиной волны. Это объясняется тем, что преобладающим является член с $k = 5$. На том же рисунке приведены эпюры прогибов оболочки радиуса $R = 0,2$ и $0,1$ м при $\omega t = 36^\circ$ (остальные параметры те же).

Жестко заземленная по краям оболочка

Для решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки с жестко заземленными краями ($w = \partial w / \partial x = 0$) в работе [28] было использовано конечное преобразование Фурье. Следуя этой работе, решения уравнений

(15.4) и (15.5) запишем в виде

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) \sin k\omega t, \\ \psi &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x, r) \cos k\omega t. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Подставим выражение для ψ в волновое уравнение (15.5) и применим к нему операцию конечного косинуспреобразования

$$\psi_k(j, r) = \int_0^L \psi_k(x, r) \cos \frac{j\pi}{L} x dx. \quad (15.13)$$

В полученном уравнении относительно изображения $\psi_k(j, r)$

$$\begin{aligned} (-1)^j \frac{\partial \psi_k(L, r)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k(0, r)}{\partial x} - \frac{\pi^2 j^2}{L^2} \psi_k(j, r) + \frac{d^2 \psi_k(j, r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_k(j, r)}{dr} + \\ + (k\lambda)^2 \psi_k(j, r) = 0 \end{aligned}$$

используем условия на днищах $\partial \psi_k(x, r)/\partial x = 0$ ($x = 0, L$), после чего найдем

$$\frac{d^2 \psi_k(j, r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_k(j, r)}{dr} + \gamma_{kj}^2 \psi_k(j, r) = 0,$$

причем $\gamma_{kj}^2 = (k\lambda)^2 - (j\pi/L)^2$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\psi_k(j, r) = B_{kj} J_0(\gamma_{kj} r). \quad (15.14)$$

Для определения постоянной B_{kj} используем условие на поверхности оболочки. Подставляя выражения (15.12) в последнее условие (15.6) и применяя к нему операцию (15.13), получаем равенство

$$d\psi_k(j, r)/dr = k\omega w_k(j) \quad (r = R),$$

где $w_k(j)$ — изображение функции прогиба. Отсюда и из выражения (15.14) имеем

$$B_{kj} = - \frac{k\omega}{\gamma_{kj} J_1(\gamma_{kj} R)} w_k(j). \quad (15.15)$$

Согласно (15.12), (15.14), (15.15) изображение давления рассеянных волн на стенке оболочки будет

$$p_{\psi}(j, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (k\omega)^2 m_{kj}^* w_k(j) \sin k\omega t, \quad (15.16)$$

где

$$m_{kj}^* = -\rho_0 \frac{J_0(\gamma_{kj} R)}{\gamma_{kj} J_1(\gamma_{kj} R)}.$$

Теперь применим операцию (15.13) к уравнению изгиба оболочки (15.4) и к выражению для давления (15.3) и учтем (15.16). В результате найдем изображение функции прогиба

$$\begin{aligned} w_k(j) &= \frac{P_{kj} + D[w_k^{(3)}(0) - (-1)^j w_k^{(3)}(L)]}{m[\Omega_j^2 - (1 + m_{kj}^*/m)(k\omega)^2]}, \\ P_{kj} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \mathcal{P}_k L & \text{при } j = kN, \\ 0 & \text{при } j \neq kN. \end{cases} \end{aligned} \quad (15.17)$$

Здесь уже использованы условия $\partial w / \partial x = 0$ ($x = 0, L$); $w_k^{(3)}$ — означает третью производную по x . Величины Ω_j определяются формулой (15.11), где вместо λ следует брать π/L . Совершая обратное преобразование Фурье, находим выражение для оригинала прогибов

$$w_k(x) = \frac{1}{L} \frac{D[w_k^{(3)}(0) - w_k^{(3)}(L)]}{m[\Omega_0^2 - (1 + m_{k0}^*/m)(k\omega)^2]} + \\ + \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_{kj} + D[w_k^{(3)}(0) - (-1)^j w_k^{(3)}(L)]}{m[\Omega_j^2 - (1 + m_{kj}^*/m)(k\omega)^2]} \cos \frac{j\pi}{L} x. \quad (15.18)$$

Величины $w_k^{(3)}(0)$ и $w_k^{(3)}(L)$ определяем из оставшихся неиспользованными условий $w = 0$ ($x = 0, L$). Вводя обозначения

$$p_{kj} = \frac{2}{L} \frac{P_{kj}}{m[\Omega_j^2 - (1 + m_{kj}^*/m)(k\omega)^2]}, \\ d_{kj} = \frac{2}{L} \frac{D}{m[\Omega_j^2 - (1 + m_{kj}^*/m)(k\omega)^2]}$$

и используя (15.18), можно записать

$$\frac{1}{2} d_{k0} [w_k^{(3)}(0) - w_k^{(3)}(L)] + p_{k1} + d_{k1} [w_k^{(3)}(0) + w_k^{(3)}(L)] + p_{k2} + \dots = 0 \quad (x=0), \\ \frac{1}{2} d_{k0} [w_k^{(3)}(0) - w_k^{(3)}(L)] - p_{k1} - d_{k1} [w_k^{(3)}(0) + w_k^{(3)}(L)] + p_{k2} + \dots = 0 \quad (x=L).$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим

$$w_k^{(3)}(0) - w_k^{(3)}(L) = - \frac{p_{k2} + p_{k4} + \dots}{\frac{1}{2} d_{k0} + d_{k2} + \dots}, \quad (15.19) \\ w_k^{(3)}(0) + w_k^{(3)}(L) = - \frac{p_{k1} + p_{k3} + \dots}{d_{k1} + d_{k3} + \dots}.$$

Для нечетных чисел kN согласно (15.17) все $p_{k2} = p_{k4} = \dots = 0$. Поэтому из первого равенства (15.19) получаем $w_k^{(3)}(0) = w_k^{(3)}(L)$, а из второго равенства (15.19) —

$$w_k^{(3)}(0) = w_k^{(3)}(L) = - \frac{1}{2} \frac{p_{k1} + p_{k3} + \dots}{d_{k1} + d_{k3} + \dots},$$

где только один коэффициент $p_{kj} \neq 0$ (для $j = kN$). Если же kN четно, то, рассуждая аналогично, имеем

$$w_k^{(3)}(0) = -w_k^{(3)}(L) = - \frac{1}{2} \cdot \frac{p_{k2} + p_{k4} + \dots}{\frac{1}{2} d_{k0} + d_{k2} + \dots}.$$

Здесь только один коэффициент p_{kj} не равен нулю (для $j = kN = 2, 4, \dots$). Таким образом, выражение (15.18) и, следовательно, функция прогиба (15.12) полностью определяются.

В предыдущих параграфах исследовались собственные колебания свободно опертой оболочки. Пользуясь полученными формулами, выведем уравнение для определения собственных частот газа и защемленной оболочки. Полагая $\mathcal{P}_k = 0$ ($p_{kj} = 0$), уравнения (15.19) представим в виде

$$\left(\frac{1}{2} d_0 + \sum_{j=2, 4, \dots}^{\infty} d_j \right) [w^{(3)}(0) - w^{(3)}(L)] = 0, \\ \sum_{j=1, 3, \dots}^{\infty} d_j [w^{(3)}(0) + w^{(3)}(L)] = 0.$$

Исключив в них $w^{(3)}(0)$ и $w^{(3)}(L)$, найдем

$$\left(\frac{1}{2}d_0 + \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} d_j\right) \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} d_j = 0. \quad (15.20)$$

Уравнение $\sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} d_j = 0$ дает собственные частоты колебаний, происходящих симметрично относительно среднего сечения трубы, а уравнение

$\frac{1}{2}d_0 + \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} d_j = 0$ — дает частоты кососимметричных колебаний.

*Оболочка под действием волн,
возбуждаемых теплоподводом [29]*

В предыдущих разделах этого параграфа не принимались во внимание осевые инерционные силы в оболочке и движение днища в результате ее растяжения. Учтем теперь эти факторы. Предположим, что оба конца оболочки замкнуты абсолютно жесткими днищами, которые могут свободно скользить на опорах, а плоскость теплоподвода Σ расположена в среднем сечении трубы.

Возбуждение ударных волн в полости с жесткими стенками при колебательном теплоподводе $Q = Q_0 \sin \omega t$ изучалось в [130].

Давление в полости также можно представить в виде ряда (15.3), в котором

$$\mathcal{P}_k = \kappa p_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{32}{\pi \sqrt{2\pi(\kappa+1)}} \frac{k}{(2k)^2 - 1}, \quad \varepsilon = \frac{Q_0}{\rho_0 a c_p T_0},$$

где c_p , ρ_0 , p_0 , T_0 — теплоемкость при постоянном давлении, плотность, давление, температура в невозмущенном газе. Причем величинами порядка ε по сравнению с $\sqrt{\varepsilon}$ мы пренебрегли. Поэтому на величину ε следует наложить ограничение, приведенное в начале параграфа, а именно: амплитуда теплоподвода должна быть намного меньше теплосодержания газа в полости.

Функцию прогиба и потенциал рассеянных волн разыскиваем в виде (15.12). Для продольных перемещений примем

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \sin k\omega t. \quad (15.21)$$

Чтобы описать движение оболочки, воспользуемся уравнениями (5.10), (5.9), в которых вместо σ следует подставить $k\sigma$, а вместо p — сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k \cos k\lambda x + \rho_0 \sum_{k=1}^{\infty} k\omega \psi_k(x).$$

Продифференцировав (5.9) по x , подставим значение d^2u/dx^2 в первое уравнение (5.8). В результате найдем еще одно соотношение, нужное в дальнейшем,

$$u_k = \frac{R}{k^2 \sigma^2 v} \left[\frac{h^2}{12} \frac{d^3 w_k}{dx^3} + \left(\frac{1-v^2}{R^2} - k^2 \sigma^2 \right) \frac{dw_k}{dx} + \frac{k}{\rho h c^2} \left(\mathcal{P}_k \lambda \sin k\lambda x - \rho_0 \omega \frac{d\psi_k}{dx} \right) \right]. \quad (15.22)$$

Принимаем следующие граничные условия

$$w_k = dw_k/dx = 0 \quad (x = 0, 2L), \quad (15.23)$$

$$\frac{du_k}{dx} = \frac{R}{2\rho h c^2} \left[\mathcal{P}_k \cos k\lambda x + \frac{2\rho_0 k \omega}{R^2} \int_0^R r \psi_k dr + \rho_1 h_1 k^2 \omega^2 u_k \right] \quad (x = 0, 2L), \quad (15.24)$$

$$\partial\psi_k/\partial x = k\omega u_k \quad (x = 0, 2L), \quad (15.25)$$

$$\partial\psi_k/\partial r = k\omega u_k \quad (r = R). \quad (15.26)$$

Здесь ρ_1 , h_1 — плотность и толщина днщ. Условие (15.24) означает равенство продольных усилий на краях оболочки с усилиями, возникающими в результате действия давления газов на подвижные днща и инерционности последних.

К волновому уравнению (15.5) применим конечные преобразования Ханкеля и Фурье [106]

$$\begin{aligned} \psi_k(x, m) &= \int_0^R r\psi_k(x, r) J_0(\gamma_m r) dr, \\ \psi_k(j, m) &= \int_0^{2L} \psi_k(x, m) \cos \alpha_j x dx, \\ \alpha_j &= \frac{j\pi}{2L}, \quad j = 0, 2, 4, \dots \end{aligned} \quad (15.27)$$

где γ_m — положительные корни уравнения $J_0(\gamma R) = 0$. В результате получим алгебраическое уравнение относительно изображения потенциала $\psi_k(j, m)$. Положив в нем ввиду симметрии

$$\begin{aligned} \partial\psi_k(2L, m)/\partial x &= -\partial\psi_k(0, m)/\partial x, \text{ найдем} \\ \psi_k(j, m) &= \frac{1}{\gamma_m^2 - \xi_{kj}^2} [\gamma_m R J_1(\gamma_m R) \psi_k(j, R) - 2\psi_k^{(1)}(0, m)], \\ \xi_{kj}^2 &= (k\lambda)^2 - \alpha_j^2. \end{aligned}$$

Здесь и ниже верхние индексы, заключенные в скобки, будут означать производные по x . Совершаем обратное преобразование Ханкеля

$$\psi_k(j, r) = \frac{2}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m \psi_k(j, R)}{\gamma_m^2 - \xi_{kj}^2} \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1(\gamma_m R)} - \frac{4}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_k^{(1)}(0, m)}{\gamma_m^2 - \xi_{kj}^2} \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1^2(\gamma_m R)}.$$

При удовлетворении условию (15.26) это выражение придется дифференцировать по радиусу. Но первая сумма в нем сходится неравномерно, поэтому заменим ее следующей функцией [106]:

$$\frac{2}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\gamma_m^2 - \xi_{kj}^2} \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1(\gamma_m R)} = \frac{J_0(\xi_{kj} r)}{J_0(\xi_{kj} R)}.$$

Тогда

$$\psi_k(j, r) = \psi_k(j, R) \frac{J_0(\xi_{kj} r)}{J_0(\xi_{kj} R)} - \frac{4}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_k^{(1)}(0, m)}{\gamma_m^2 - \xi_{kj}^2} \cdot \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1^2(\gamma_m R)}. \quad (15.28)$$

Применим к условию (15.26) преобразование Фурье

$$d\psi_k(j, R)/dr = k\omega u_k(j).$$

Подставив сюда выражение (15.28), найдем

$$\psi_k(j, R) = -\frac{J_0(\xi_{kj} R)}{\xi_{kj} J_1(\xi_{kj} R)} \left[k\omega u_k(j) - \frac{4}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m \psi_k^{(1)}(0, m)}{(\gamma_m^2 - \xi_{kj}^2) J_1(\gamma_m R)} \right]. \quad (15.29)$$

Производную $\psi_k^{(1)}(0, m)$ находим из условия (15.25), для чего применим к нему операцию преобразования Ханкеля

$$\psi_k^{(1)}(0, m) = (k\omega/\gamma_m) R J_1(\gamma_m R) u_k(0). \quad (15.30)$$

Вводя в (15.28) выражения (15.29), (15.30) и (15.22) и учитывая условия $w_k^{(1)}(x) = 0$ ($x = 0, 2L$), получаем

$$\psi_k(j, r) = A_{kj}(r) w_k(j) + B_{kj}(r) w_k^{(5)}(0), \quad (15.31)$$

где

$$A_{kj}(r) = -\frac{k\omega J_0(\xi_{kj}r)}{\xi_{kj} J_1(\xi_{kj}R)}, \quad \eta_k = \frac{\rho h^3 R c^2}{12k^2 \omega^2 (\rho h v + R \rho_0)},$$

$$B_{kj}(r) = \frac{4\eta_k}{R} \left[-A_{kj}(r) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^2 - \xi_{kj}^2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k\omega}{\gamma_m (\gamma_m^2 - \xi_{kj}^2)} \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1(\gamma_m R)} \right].$$

Вторая сумма в составе $B_{kj}(r)$ может быть заменена функцией $\frac{k\omega R}{2\xi_{kj}^2} [J_0(\xi_{kj}r)/J_0(\xi_{kj}R) - 1]$. При $r = R$ она обращается в нуль.

Применение к уравнению (5.10) операции косинуспреобразования дает алгебраическое уравнение относительно $w_k(j)$. Из него с учетом (15.31) находим

$$w_k(j) = \frac{1}{\kappa_{kj}} [l_{kj} w_k^{(3)}(0) + b_{kj} w_k^{(5)}(0) + \mathcal{P}_{kj}]. \quad (15.32)$$

Здесь

$$\kappa_{kj} = -\alpha_j^6 + k^2 \sigma^2 \alpha_j^4 - \frac{12}{h^2} \left(\frac{1-v^2}{R^2} - k^2 \sigma^2 \right) \alpha_j^2 +$$

$$+ \frac{12k^2 \sigma^2}{h^2} \left(\frac{1}{R^2} - k^2 \sigma^2 \right) - \frac{12\rho_0 k \omega}{\rho h^3 c^2} (k^2 \sigma^2 - \alpha_j^2) A_{kj}(R),$$

$$b_{kj} = 2 + \frac{12\rho_0 k \omega}{\rho h^3 c^2} (k^2 \sigma^2 - \alpha_j^2) B_{kj}(R),$$

$$l_{kj} = 2(k^2 \sigma^2 - \alpha_j^2),$$

$$\mathcal{P}_{kj} = \begin{cases} \frac{12\mathcal{P}_k k^2 (\sigma^2 - \lambda^2)}{\rho h^3 c^2} L & \text{при } j = 2k, \\ 0 & \text{при } j \neq 2k. \end{cases}$$

Используя формулу обращения для преобразования Фурье, находим из (15.32) выражение для $w_k(x)$, куда входят производные $w_k^{(3)}(0)$ и $w_k^{(5)}(0)$. Связь между ними устанавливаем, подчинив найденное выражение для $w_k(x)$ граничному условию $w_k(0) = 0$:

$$w_k^{(3)}(0) = -G_k w_k^{(5)}(0) - H_k,$$

$$H_k = \frac{\sum_{j=2}^{\infty} \mathcal{P}_{kj} \kappa_{kj}^{-1}}{\frac{1}{2} l_{k0} \kappa_{k0}^{-1} + \sum_{j=2}^{\infty} l_{kj} \kappa_{kj}^{-1}}, \quad G_k = \frac{\frac{1}{2} b_{k0} \kappa_{k0}^{-1} + \sum_{j=2}^{\infty} b_{kj} \kappa_{kj}^{-1}}{\frac{1}{2} l_{k0} \kappa_{k0}^{-1} + \sum_{j=2}^{\infty} l_{kj} \kappa_{kj}^{-1}}. \quad (15.33)$$

Тогда (15.32) и выражение для $w_k(x)$ приводятся к виду

$$w_k(j) = Q_{kj} + S_{kj} w_k^{(5)}(0), \quad (15.34)$$

$$w_k(x) = \frac{1}{2L} [Q_{k0} + S_{k0} w_k^{(5)}(0)] + \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{\infty} [Q_{kj} + S_{kj} w_k^{(5)}(0)] \cos \alpha_j x, \quad (15.35)$$

где

$$Q_{kj} = \frac{1}{\kappa_{kj}} (\mathcal{P}_{kj} - l_{kj} H_k), \quad S_{kj} = \frac{1}{\kappa_{jk}} (b_{kj} - l_{kj} G_k).$$

В выражении (15.35), которое служит для непосредственного определения прогиба, осталось найти величину $w_k^{(5)}(0)$. Для этого используем оставшееся условие (15.24), а также соотношения (15.22) и (5.9)

$$\begin{aligned} & -\frac{h^2}{12} w_k^{(4)}(0) + \frac{1}{\rho h c^2} [\mathcal{P}_k + \rho_0 k \omega \psi_k(0, R)] = \\ & = \frac{\nu}{2 \rho h c^2} \left[\mathcal{P}_k + \frac{2 \rho_0 k \omega}{R^2} \int_0^R r \psi_k(0, r) dr + \rho_1 h_1 k^2 \omega^2 \eta_k w_k^{(5)}(0) \right]. \end{aligned} \quad (15.36)$$

Выразим здесь $w_k^{(4)}(0)$ через $w_k^{(5)}(0)$. Используя правила дифференцирования рядов Фурье [113] и учитывая, что $w_k^{(1)}(0) = 0$, найдем третью производную функции (15.35)

$$w_k^{(3)}(x) = \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^3 [Q_{kj} + S_{kj} w_k^{(5)}(0)] \sin \alpha_j x. \quad (15.37)$$

Так как прямым дифференцированием (15.37) нельзя вычислить четвертую производную в точке $x = 0$, то воспользуемся приближенным равенством

$$w_k^{(4)}(0) = \frac{w_k^{(3)}(l) - w_k^{(3)}(0)}{l}, \quad l = \frac{L}{6 j_1},$$

где j_1 — наибольшее значение j , которое необходимо брать в ряду (15.35). Шаг l принят равным $1/12$ части j_1 -ой полуволны. Используя соотношения (15.33), запишем

$$w_k^{(4)}(0) = \frac{1}{Ll} \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^3 [Q_{kj} + S_{kj} w_k^{(5)}(0)] \sin \alpha_j l + \frac{1}{l} [G_k w_k^{(5)}(0) + H_k]. \quad (15.38)$$

Далее выразим величину $\psi_k(0, r)$, входящую в (15.36), через $w_k^{(5)}(0)$, для чего подставим (15.34) в (15.31)

$$\psi_k(j, r) = A_{kj}(r) Q_{kj} + [A_{kj}(r) S_{kj} + B_{kj}(r)] w_k^{(5)}(0).$$

Совершим обратное преобразование Фурье

$$\psi_k(x, r) = w_k^{(5)}(0) M_k(x, r) + N_k(x, r). \quad (15.39)$$

Здесь

$$M_k(x, r) = \frac{1}{2L} [A_{k0}(r) S_{k0} + B_{k0}(r)] + \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{\infty} [A_{kj}(r) S_{kj} + B_{kj}(r)] \cos \alpha_j x,$$

$$N_k(x, r) = \frac{1}{2L} A_{k0}(r) Q_{k0} + \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{\infty} A_{kj}(r) Q_{kj} \cos \alpha_j x.$$

Подставив (15.39), (15.38), в (15.36) найдем пятую производную:

$$\begin{aligned}
 w_k^{(5)}(0) = & -\left\{H_k + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^3 Q_{kj} \sin \alpha_j l - \frac{12l\rho_0 k \omega}{\rho h^3 c^2} \left[N_k(0, R) + \frac{\nu-2}{2\rho_0 k \omega} \mathcal{P}_k - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\nu}{R^2} \bar{N}_k(0, R) \right] \right\} \times \left\{ G_k + \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^3 S_{kj} \sin \alpha_j l - \right. \\
 & \left. - \frac{12l\rho_0 k \omega}{\rho h^3 c^2} \left[M_k(0, R) - \frac{\nu}{R^2} \bar{M}_k(0, R) - \frac{\rho_1 h_1 \eta_k \nu k \omega}{2\rho_0} \right] \right\}^{-1}, \quad (15.40) \\
 \bar{M}_k(x, R) = & \frac{1}{2L} [\bar{A}_{k0}(R) S_{k0} + \bar{B}_{k0}(R)] + \\
 & + \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{\infty} [\bar{A}_{kj}(R) S_{kj} + \bar{B}_{kj}(R)] \sin \alpha_j x, \\
 \bar{N}_k(x, R) = & \frac{1}{2L} \bar{A}_{k0}(R) Q_{k0} + \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{\infty} \bar{A}_{kj}(R) Q_{kj} \cos \alpha_j x, \\
 \bar{A}_{kj}(R) = & -\frac{k\omega R}{\xi_{kj}^2}, \quad \bar{B}_{kj}(R) = -4\eta_k k \omega \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m^2 + \xi_{kj}^2}{\xi_{kj}^2 \gamma_m^2 (\gamma_m^2 - \xi_{kj}^2)}.
 \end{aligned}$$

Выражения (15.12), (15.21), (15.22), (15.35), (15.39) и (15.40) дают решение поставленной задачи.

НЕОСЕССИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК И ГАЗА

§ 16. Распространение неосесимметричных волн вдоль цилиндра бесконечной длины

Волны, бегущие в осевом направлении [16]

Пусть в упругой тонкостенной цилиндрической оболочке течет с дозвуковой скоростью U_0 невязкая сжимаемая жидкость. Предположим, что в потоке распространяются волны малой амплитуды с волновым числом $n = 0, 1, 2, \dots$ по окружности. Потенциал скоростей для волны, движущейся по потоку и конечной на оси цилиндра, как известно из § 2 и 10, имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi &= A_n J_n(\gamma r) \cos n\theta \exp[-i(\lambda x - \omega t)], \\ \lambda &= \frac{1}{1-M^2} (\sqrt{(1-M^2)\alpha^2 + M^2\mu^2} - M\mu), \\ \alpha^2 + \gamma^2 &= \mu^2, \quad \mu = \omega/a, \quad M = U_0/a.\end{aligned}\tag{16.1}$$

Выражение (16.1) удовлетворяет волновому уравнению (2.18). В общем случае решение уравнения (2.18) по углу θ равно

$$\Theta(\theta) = C_1 e^{-in\theta} + C_2 e^{in\theta}.\tag{16.2}$$

Решение (16.2) указывает на то, что бегущие по оси x волны могут иметь также и вращение (винтообразное распространение волн). Однако, если возбуждаются симметричные волны, то нет оснований выделять какое-либо из двух направлений вращения, ибо обе винтовые составляющие возбуждаются с одинаковой амплитудой и в окружном направлении образуются стоячие волны. Здесь рассматривается именно такой случай.

Амплитуда A_n и частота ω задаются источником, находящимся в начале координаты x . Волновое число γ находится из граничного условия на стенке оболочки. Влияние среды с наружной стороны оболочки не учитывается.

При $M = 0$ волновое число $\lambda = \alpha$. Если, кроме того, положить $n = 0$, то получаем рассмотренный в § 10 случай. При распространении плоской волны ($n = 0, \gamma = 0$) в абсолютно жесткой оболочке λ принимает значение $\lambda = \alpha/(1 + M)$. Тогда выражение (16.1) приводится к виду

$$\varphi = A_0 \exp\left[-\frac{i\omega}{a}\left(\frac{x}{1+M} - at\right)\right],$$

что совпадает с первым слагаемым (2.26).

Для описания колебаний оболочки ради простоты анализа используем упрощенное уравнение (5.5), в котором следует положить

$$Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p_0}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right) w + p,\tag{16.3}$$

где p_0 — перепад стационарного давления (внутренний перепад считается положительным); p — переменное давление со стороны жидкости.

Функцию F также примем в виде бегущей волны

$$F = iF_n \cos n\theta \exp[-i(\lambda x - \omega t)].\tag{16.4}$$

Подставляя в (5.5) выражения (16.4), (16.3) с учетом соотношений

$$p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \quad w = \nabla^2 \nabla^2 F$$

и (16.1), найдем

$$F_n = - \frac{A_n \rho_0 I_n(\gamma R) (\beta^2 + n^2)^2 (\omega - U_0 \lambda)}{\rho h (\Omega_n^2 - \omega^2)}, \quad (16.5)$$

где

$$\Omega_n^2 = \frac{E}{\rho R^2} \left\{ b_*^2 (\beta^2 + n^2)^2 + \frac{\beta^4}{(\beta^2 + n^2)^2} + \frac{\rho_0 R}{E h} (n^2 - 1) - \right. \\ \left. - b_*^2 \left[2 (\beta^2 + n^2) - 1 - 2 (1 - \nu) \frac{\beta^2 (\beta^2 - n^2)}{\beta^2 + n^2} \right] \right\}, \quad (16.6)$$

$$\beta = \lambda R.$$

В выражении собственной частоты оболочки (16.6) член в квадратной скобке представляет собой влияние непологости оболочки [92].

Условие равенства нормальных скоростей на поверхности оболочки

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \nabla^2 F \quad \text{после подстановки в него выражений (16.1), (16.4) дает}$$

$$A_n I_n'(\gamma r) = -F_n (\beta^2 + n^2)^2 (\omega - U_0 \lambda) \quad (r = R). \quad (16.7)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по r .

Из (16.5) и (16.7) при $A_n \neq 0$ и $F_n \neq 0$ получаем уравнение для определения волновых чисел γ поперечных колебаний

$$\Delta_n = \frac{\rho h (\Omega_n^2 - \omega^2)}{\rho_0 R (\omega - U_0 \lambda)^2}, \quad (16.8)$$

где

$$\frac{1}{\Delta_n} = R \frac{I_n'(\gamma r)_{r=R}}{I_n(\gamma R)} = n - \gamma R \frac{I_{n+1}(\gamma R)}{I_n(\gamma R)}. \quad (16.9)$$

Уравнение (16.8) пригодно для случая одинакового направления среднего течения газа и распространения волны.

Если поток имеет противоположное направление ($-U_0$), то всюду в приведенных выше выражениях перед U_0 и M нужно изменить знак. Например, коэффициент λ будет равен

$$\lambda = \frac{1}{1 - M^2} (\sqrt{(1 - M^2) \alpha^2 + M^2 \mu^2} + M \mu).$$

Для каждого фиксированного n , указывающего число узловых диаметральных плоскостей в газе, уравнение (16.8) дает бесконечное число корней γ_{mn} (m указывает номер корня).

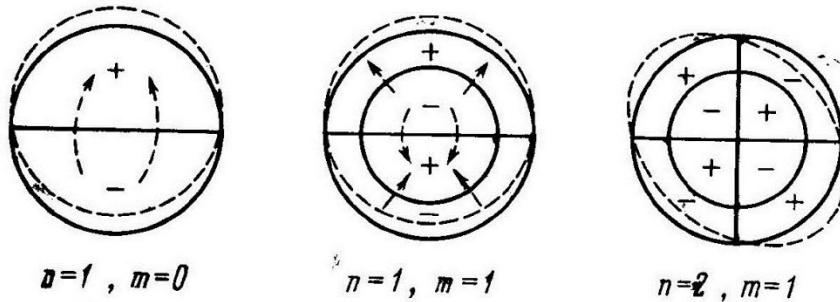


Рис. 30

На рис. 30 показаны узловые линии в газе и форма колебаний оболочки, соответствующие нескольким значениям n .

Уравнение (16.8) может быть исследовано аналогично осесимметричному случаю (§ 10). Парциальные частоты газа ($\Omega_n \rightarrow \infty$) определяются из уравнения $\Delta_n = \infty$ или

$$n - \gamma R \frac{I_{n+1}(\gamma R)}{I_n(\gamma R)} = 0. \quad (16.10)$$

Корни $\gamma_{mn}R$ этого уравнения приведены в табл. 2.

Таблица 2

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
0	0	3,83	7,02	10,17	13,32
1	1,84	5,33	8,54	11,71	14,86
2	3,05	6,70	9,97	13,18	16,33
3	4,20	8,02	11,34	14,58	17,79
4	5,31	9,28	12,68	15,96	19,20
5	6,41	10,52	13,99	17,31	20,57
6	7,50	11,73	15,27	18,64	21,93
7	8,58	12,93	16,53	19,94	23,27

n — число узловых плоскостей; m — число узловых цилиндров.

После того как найдены значения γ_{mn} , прогиб оболочки можно определить с помощью соотношения (16.7)

$$w = \nabla^2 \nabla^2 F = -i \frac{A_{mn} J'_n(\gamma_{mn} r) |_{r=R}}{\omega - U_0 \lambda} \cos n\theta e^{-i(\lambda x - \omega t)}.$$

Вещественная часть его дает значение действительного прогиба.

*Собственные частоты колебаний газа
и оболочки [16, 57]*

Рассмотрим только поперечные формы совместных колебаний оболочки и газа. При этом $\alpha = 0$ и согласно (16.1) $\lambda = 0$, $\gamma = \omega/a$. Поэтому уравнение (16.8) принимает вид

$$n - \frac{\omega}{a} R \frac{J_{n+1}\left(\frac{\omega}{a} R\right)}{J_n\left(\frac{\omega}{a} R\right)} = \frac{\rho_0 R \omega^2}{\rho h (\Omega_n^2 - \omega^2)}. \quad (16.11)$$

Парциальные частоты оболочки при пренебрежении малыми членами равны

$$\Omega_0^2 = \frac{E}{\rho R^2} \quad \text{при } n = 0, \quad \Omega_1 = 0 \quad \text{при } n = 1,$$

$$\Omega_n^2 = \frac{E b^2}{\rho R^2} \left[(n^2 - 1)^2 + \frac{\rho_0 R}{E h b^2} (n^2 - 1) \right] \quad \text{при } n \geq 2.$$

Случай $n = 1$ соответствует боковым перемещениям оболочки без изменения ее контура. При чисто поперечных формах колебаний, частоты, определяемые уравнением (16.11), не зависят от среднего течения газа.

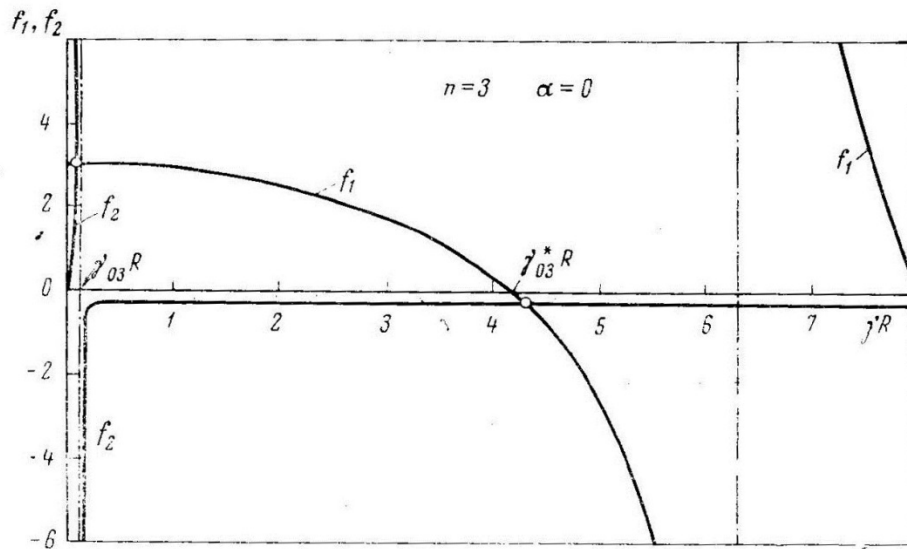


Рис. 31

Приведем пример. Корни ω_{mn} были найдены графическим способом при числовых данных: $R = 0,2$ м, $h = 0,002$ м, $E = 1,4 \cdot 10^6$ бар, $\nu = 0,3$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $p_0 = 100$ бар, $T_0 = 2500^\circ$ К. Плотность и скорость звука в газе $\rho_0 = 1,8 \cdot 100 \cdot 273/2500 = 19,7$ кг/м³ ($1,8$ кг/м³ — плотность среды при $p_0 = 1$ бар, $T_0 = 273^\circ$ К), $a = 330 \sqrt{2500/273} = 1000$ м/сек. На рис. 31 для

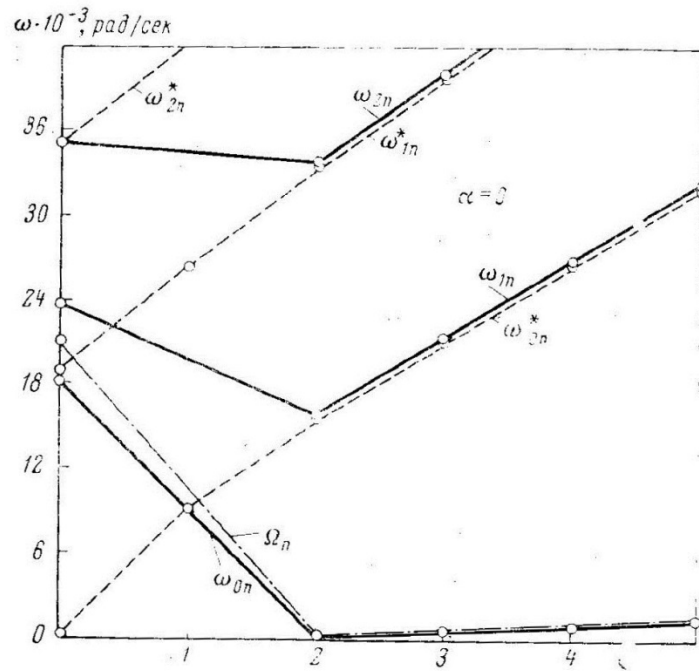


Рис. 32

случая $n = 3$ приведен график, где по оси ординат отложены числовые значения левой $f_1 = 3 - \gamma R J_4(\gamma R)/J_3(\gamma R)$ и правой $f_2 = \frac{\rho_0 R}{\rho h} \left(\frac{\Omega_n^2}{\alpha^2 \gamma^2} - 1 \right)^{-1}$ частей уравнения (16.11), причем в выражении Ω_n^2 член с p_0 не учтен. По оси абсцисс отложены значения γR . Точки пересечения кривых f_1 с кривыми f_2 дают значения $\gamma_{m3} = \omega_{m3}/a$, а с осью абсцисс — значения волновых чисел

γ_{m3}^* для газа в абсолютно жесткой оболочке. Последнему случаю соответствует $\Omega_r^2 \rightarrow \infty$, при этом (16.11) сводится к уравнению (16.10).

Как следует из графика, при принятых числовых данных низший корень уравнения (16.11) оказывается вблизи асимптоты $\gamma_{03} = \Omega_3/a$, а последующие — вблизи корней уравнения (16.10). Соответственно частоты совместных колебаний $\omega_{mn} = a\gamma_{mn}$ (на рис. 32 точки, соединенные сплошными линиями), кроме низшей, располагаются около парциальных частот газа ω_{mn}^* (штриховые линии). Исключение составляет случай осесимметричных колебаний ($n = 0$). Низшие частоты совместных колебаний ω_{0n} почти точно совпадают с парциальными частотами оболочки Ω_n (нижняя сплошная линия). Ввиду применения уравнения изгиба оболочки в форме (5.5) на графике нет кривых, соответствующих частотам преимущественно тангенциальных колебаний оболочки.

§ 17. Собственные колебания цилиндрической оболочки конечной длины и заключенного в ней газа

Оболочка с абсолютно жесткими днищами

Предположим, что оболочка длиной L по краям шарнирно закреплена к абсолютно жестким невесомым днищам, которые могут свободно смещаться в осевом направлении. Однако влиянием их перемещений на колебания газа будем пренебрегать. Не будем также учитывать переменные осевые усилия в оболочке, идущие от днищ. При сделанных предположениях граничные условия для оболочки —

$$w = v = 0, \quad N_x = M_x = 0 \quad (x = 0, L), \quad (17.1)$$

а для газовой полости —

$$\partial\varphi/\partial x = 0 \quad (x = 0, L). \quad (17.2)$$

При этих граничных условиях задача была разобрана в статьях [147] и [91].

Как известно из § 11, 12, при граничных условиях (17.2) волновые числа продольных колебаний принимают следующие дискретные значения:

$$\alpha_k = k\pi/L \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Общее решение волнового уравнения (2.18) можно представить в виде суммы

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn} J_n(\gamma_k r) \cos \alpha_k x \cos n\theta e^{i\omega t}, \quad (17.3)$$

$$\gamma_k^2 = \omega^2/a^2 - \alpha_k^2.$$

Применим уравнения движения цилиндрической оболочки (5.1), в которых положим

$$\begin{aligned} X &= -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ Z &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p_0 R}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{p_0}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right) w - \rho_0 \frac{\partial \varphi(x, \theta, R)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Условия (17.1) будут удовлетворены, если перемещения взять в виде

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{jn} \cos \alpha_j x \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ v &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_{jn} \sin \alpha_j x \sin n\theta e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{jn} \sin \alpha_j x \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (\alpha_j = j\pi/L). \quad (17.5)$$

Подставляя выражения (17.4), (17.3) и (17.5) в указанные уравнения (5.1) колебаний оболочки, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\beta_j^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 - K\omega^2 \right) U_{jn} - \frac{1+\nu}{2} \beta_j n V_{jn} - \\ & - \beta_j \left[\nu + b^2 \left(\beta_j^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \right] W_{jn} = 0, \\ & - \frac{1+\nu}{2} \beta_j n U_{jn} + \left(n^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_j^2 - K\omega^2 \right) V_{jn} + n \left(1 + \frac{3-\nu}{2} b^2 \beta_j^2 \right) W_{jn} = 0, \\ & \sum_{j=0, 1, 2, \dots}^{\infty} \left\{ -\beta_j \left[\nu + b^2 \left(\beta_j^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \right] U_{jn} + n \left(1 + \frac{3-\nu}{2} b^2 \beta_j^2 \right) V_{jn} + \right. \\ & + \left[b^2 (\beta_j^2 + n^2)^2 - b^2 (2n^2 - 1) + 1 + \frac{K\rho_0}{\rho R h} \left(\frac{1}{2} \beta_j^2 + n^2 - 1 \right) - \right. \\ & \left. \left. - K\omega^2 \right] W_{jn} \right\} \sin \alpha_j x = -i \frac{K\rho_0}{\rho h} \omega \sum_{k=0, 1, 2, \dots}^{\infty} A_{kn} J_n(\gamma_k R) \cos \alpha_k x. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Здесь обозначено

$$K = \frac{(1-\nu^2) R^2 \rho}{E}, \quad \beta_j = R\alpha_j.$$

Напомним, что

$$b^2 = h^2/12R^2.$$

Из первых двух характеристических уравнений (17.6) выразим U_{jn} и V_{jn} через W_{jn} , подставим их в третье уравнение (17.6) и введем обозначение

$$\begin{aligned} \kappa_{jn} = & b^2 (\beta_j^2 + n^2)^2 - b^2 (2n^2 - 1) + 1 + \frac{K\rho_0}{\rho h R} \left(\frac{1}{2} \beta_j^2 + n^2 - 1 \right) - K\omega^2 + \\ & + \frac{\beta_j^2}{\nu_{jn}} \left[\nu + b^2 \left(\beta_j^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \right] \left\{ (1+\nu) n^2 \left(1 + \frac{3-\nu}{2} b^2 \beta_j^2 \right) - \right. \\ & - \left[\nu + b^2 \left(\beta_j^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \right] \left(n^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_j^2 - K\omega^2 \right) \left. \right\} - \\ & - \frac{n^2}{\nu_{jn}} \left(1 + \frac{3-\nu}{2} b^2 \beta_j^2 \right)^2 \left(\beta_j^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 - K\omega^2 \right), \end{aligned} \quad (17.7)$$

где

$$\nu_{jn} = \frac{1-\nu}{2} (\beta_j^2 + n^2)^2 - K\omega^2 \left[\frac{3-\nu}{2} (\beta_j^2 + n^2) - K\omega^2 \right].$$

Тогда вместо (17.6) получим следующую систему уравнений

$$\sum_{j=0}^{\infty} \kappa_{jn} W_{jn} \sin \alpha_j x = -i\omega \frac{K\rho_0}{\rho h} \sum_{k=0}^{\infty} A_{kn} J_n(\gamma_k R) \cos \alpha_k x, \quad (17.8)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Удовлетворяя условию на колеблющейся поверхности оболочки $\partial w / \partial t = \partial \Phi / \partial r$ ($r = R$) с учетом выражений (17.5) и (17.3), найдем

$$i\omega \sum_{j=0}^{\infty} W_{jn} \sin \alpha_j x = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{\infty} A_{kn} [n J_n(\gamma_k R) - \gamma_k R J_{n+1}(\gamma_k R)] \cos \alpha_k x, \quad (17.9)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Разложим $\cos \alpha_k x$ согласно формуле (12.12) в ряд по синусам аргумента $\alpha_j x$ и подставим этот ряд в уравнения (17.8) и (17.9). Изменяя в правых частях порядок суммирования, для каждого значения n и j получим

$$\begin{aligned}\kappa_{jn} W_{jn} &= -i\omega \frac{K\rho_0}{\rho h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4j}{\pi(j^2 - k^2)} A_{kn} J_n(\gamma_k R), \\ \omega W_{jn} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4j}{R\pi(j^2 - k^2)} A_{kn} [nJ_n(\gamma_k R) - \gamma_k R J_{n+1}(\gamma_k R)], \\ j &= 1, 2, 3, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Исключив в них W_{jn} , находим

$$\sum_{k=0, 1, 2}^{\infty} \frac{4j}{\pi(j^2 - k^2)} \left[\left(n - \frac{K\rho_0 R}{\rho h \kappa_{jn}} \omega^2 \right) J_n(\gamma_k R) - \gamma_k R J_{n+1}(\gamma_k R) \right] A_{kn} = 0, \\ j + k - \text{нечетное число}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (17.10)$$

где

$$\gamma_k = \sqrt{(\omega/a)^2 - \alpha_k^2}.$$

Для каждого значения n система уравнений (17.10) имеет нетривиальное решение лишь при дискретных значениях ω , которые обозначим через ω_{mn} ($m = 0, 1, 2, \dots$ — номер корня). Числа ω_{mn} будут представлять собой собственные частоты совместных колебаний системы.

Рассмотрим некоторые частные формы колебаний. Случай осесимметричных форм, рассмотренный в § 12, очевидно, получится при $n = 0$. При этом уравнения (17.10) примут вид

$$\sum_{k=0, 1, 2}^{\infty} \frac{4j}{\pi(j^2 - k^2)} \left[\frac{K\rho_0 \omega^2}{\rho h \kappa_{j0}} J_0(\gamma_k R) + \gamma_k J_1(\gamma_k R) \right] A_{k0} = 0, \\ \gamma_k = \sqrt{(\omega/a)^2 - \alpha_k^2}, \quad j + k - \text{нечетное число}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (17.11)$$

совпадающий с (12.18). Частотное уравнение для оболочки $\kappa_{j0} = 0$ или

$$\kappa_{j0} = b^2(\beta_j^4 + 1) + 1 + \frac{K\rho_0}{\rho h R} \left(\frac{1}{2} \beta_j^2 - 1 \right) - K\omega^2 - \frac{\beta_j^2 (\nu + b^2 \beta_j^2)^2}{\beta_j^2 - K\omega^2} = 0$$

при условии $b^2 \beta_j^2 \ll 1$, $K\rho_0/\rho h R \ll 1$ также совпадает с выражением κ_j , данным в § 12.

Случай чисто поперечных форм колебаний получим, полагая $\alpha_k = \beta_j = 0$. Система уравнений (17.10) принимает вид

$$\begin{aligned}\left(n - \frac{K\rho_0 R}{\rho h \kappa_{0n}} \omega^2 \right) J_n\left(\frac{\omega}{a} R \right) - \frac{\omega}{a} R J_{n+1}\left(\frac{\omega}{a} R \right) &= 0, \\ \kappa_{0n} &= b^2(n^2 - 1)^2 + 1 + \frac{K\rho_0}{\rho h R} (n^2 - 1) - K\omega^2 + \frac{n^2}{K\omega^2 - n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Парциальные частоты оболочки снова даются уравнением $\kappa_{0n} = 0$, а газа — уравнением $nJ_n\left(\frac{\omega}{a} R \right) = \frac{\omega}{a} R J_{n+1}\left(\frac{\omega}{a} R \right)$, совпадающим с (16.10).

Оболочка с упругими днищами

Более общий случай колебательной системы, когда и оболочка, и днища упругие, рассмотрен в работе [30]. Предполагается, что оболочка 1 прикреплена к скользящим шарнирам, вделанным в неподвижные абсолютно жесткие

кольца 2. В этих кольцах заземлены круглые пластинки (днища) 3 одинаковой жесткости и массы (рис. 33).

Потенциал скоростей φ , компоненты перемещения u , v , w и перемещение днища f отыскиваем в виде

$$\varphi = \varphi_n(x, r) \cos n\theta e^{i\omega t}, \quad u = u_n(x) \cos n\theta e^{i\omega t},$$

$$v = v_n(x) \sin n\theta e^{i\omega t}, \quad w = w_n(x) \cos n\theta e^{i\omega t}, \quad f = f_n(r) \cos n\theta e^{i\omega t}.$$

Тогда, например, волновое уравнение (2.18) и уравнение колебаний днищ примут вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} + \left[\left(\frac{\omega}{a} \right)^2 - \left(\frac{n}{r} \right)^2 \right] \varphi_n = 0, \quad (17.12)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 f_n - \frac{\rho_1 h_1 \omega^2}{D_1} f_n = - \frac{i \rho_0 \omega}{D_1} \varphi_n(x, r) \Big|_{x=0, L}, \quad (17.13)$$

где ρ_1 , h_1 , D_1 — плотность, толщина и цилиндрическая жесткость днищ.

Граничные условия следующие:

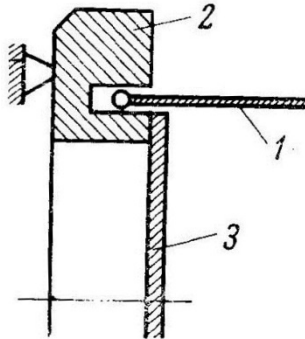


Рис. 33

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = i\omega w_n, \quad f_n = \frac{\partial f_n}{\partial r} = 0 \Big|_{x=0, L} \quad (r = R), \quad (17.14)$$

$$w_n = \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} = v_n = \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, L), \quad (17.15)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = i\omega f_n \quad (x = 0, L). \quad (17.16)$$

Частотное уравнение получаем, подставляя решения уравнений (17.12), (17.13) и (5.1), удовлетворяющие условиям (17.14), (17.15), в условие (17.16).

Решение уравнения (17.12), удовлетворяющее первому условию (17.14), находим, используя метод интегральных преобразований. Проведем последовательно по переменным x и r конечные преобразования Фурье и Ханкеля [106]

$$\varphi_n(k, r) = \int_0^L \varphi_n(x, r) \sin \alpha_k x dx \left(\alpha_k = \frac{k\pi}{L} \right), \quad (17.17)$$

$$\varphi_n(k, m) = \int_0^R r \varphi_n(k, r) J_n(\gamma_{mn} r) dr.$$

В общем случае γ_{mn} — положительные корни уравнения

$$\gamma J'_n(\gamma R) + H J_n(\gamma R) = 0.$$

Здесь постоянную H полагаем равной нулю, поэтому случай осесимметричных колебаний ($n = 0$) данным решением не охватывается [113]. Значения γ_{mn} приведены в табл. 2. В результате (17.12) сводится к следующему алгебраическому уравнению:

$$\left(\alpha_k^2 + \gamma_{mn}^2 - \frac{\omega^2}{a^2} \right) \varphi_n(k, m) = \alpha_k [(-1)^{k+1} \varphi_n(L, m) + \varphi_n(0, m)] +$$

$$+ R J_n(\gamma_{mn} R) i\omega w_n(k).$$

Выполняя обратные преобразования Ханкеля и Фурье, находим решение

уравнения (17.12)

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, r) = \frac{4}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}^2}{\gamma_{mn}^2 R^2 - n^2} \frac{J_n(\gamma_{mn} r)}{J_n^2(\gamma_{mn} R)} \{ \alpha_k [(-1)^{k+1} \varphi_n(L, m) + \\ + \varphi_n(0, m)] + R J_n(\gamma_{mn} R) i \omega w_n(k) \} \frac{1}{\alpha_k^2 - \xi_{mn}^2} \sin \alpha_k x, \end{aligned} \quad (17.18)$$

$$\xi_{mn}^2 = (\omega/a)^2 - \gamma_{mn}^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Расчет будем проводить для случая, когда колебания обоих днищ происходят по одинаковым модам и в одинаковых фазах. Последнее условие накладывает ограничение на формы продольных колебаний газа, а именно — должны иметь место только симметричные волны: $k = 1, 3, 5, \dots$ и $\varphi_n(0, m) = \varphi_n(L, m)$. Для вычисления производной от потенциала, входящей в условие (17.16), используем выражение (17.18). Так как $\varphi_n(x, r)$, $[\varphi_n(x, r)]'_x$ непрерывны на всем интервале $0 \leq x \leq L$ и имеют абсолютно интегрируемую производную, то можно доказать, что производная по координате x от ряда, стоящего в правой части выражения (17.18), сходится и сходится именно к $[\varphi_n(x, r)]'_x$. При доказательстве сходимости пользуемся правилом дифференцирования рядов Фурье по синусам (когда $\varphi_n(0, r) \neq 0$ и $\varphi_n(L, r) \neq 0$) и разложением $\varphi_n(x, r)$ в ряд Дини — Бесселя

$$\varphi_n(x, r) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}^2}{\gamma_{mn}^2 R^2 - n^2} \frac{J_n(\gamma_{mn} r)}{J_n^2(\gamma_{mn} R)} \varphi_n(x, m). \quad (17.19)$$

Разлагая $[\varphi_n(x, r)]'_x$ в ряд Фурье по косинусам и интегрируя коэффициенты разложения по частям, убеждаемся, что получившийся после дифференцирования (17.18) ряд по косинусам сходится именно к $[\varphi_n(x, r)]'_x$.

Окончательно с помощью представления ряда следующей функцией [35]

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_{mn}^2}{\alpha_k^2 - \xi_{mn}^2} \cos \alpha_k x = \frac{L}{2} \frac{\xi_{mn}}{\sin \xi_{mn} L} [\cos \xi_{mn} x - \cos \xi_{mn} (L - x)],$$

получаем

$$\begin{aligned} [\varphi_n(0, r)]'_x = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}^2 \xi_{mn}}{\gamma_{mn}^2 R^2 - n^2} \frac{J_n(\gamma_{mn} r)}{J_n^2(\gamma_{mn} R)} \varphi_n(0, m) \operatorname{tg} \left(\xi_{mn} \frac{L}{2} \right) + \\ + \frac{4i\omega R}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}^2 \alpha_k w_n(k)}{(\gamma_{mn}^2 R^2 - n^2)(\alpha_k^2 - \xi_{mn}^2)} \frac{J_n(\gamma_{mn} r)}{J_n^2(\gamma_{mn} R)}. \end{aligned} \quad (17.20)$$

Найдем выражение для изображения перемещения $w_n(k)$, входящего в (17.20). Учитывая сказанное о способе закрепления краев оболочки, записываем компоненты ее перемещения

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} U_{kn} \cos \alpha_k x, \quad v_n = \sum_{k=1}^{\infty} V_{kn} \sin \alpha_k x, \quad w_n = \sum_{k=1}^{\infty} W_{kn} \sin \alpha_k x. \quad (17.21)$$

Воспользуемся системой уравнений движения оболочки (5.1) и (17.4). В выражении Z опускаем член $\frac{p_0 R}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, так как по принятой расчетной схеме на оболочку осевые силы не действуют. С помощью (17.21) и (17.18) сводим указанную систему к трем алгебраическим уравнениям. Исключив в них

U_{kn} и V_{kn} , найдем,

$$W_{kn} \frac{L}{2} = w_n(k) = - \frac{4i\omega\rho_0(1-v^2)\alpha_k}{Eh\kappa_{kn}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}^2 R^2}{(\gamma_{mn}^2 R^2 - n^2)(\alpha_k^2 - \xi_{mn}^2)} \frac{\Phi_n(0, m)}{J_n(\gamma_{mn} R)}. \quad (17.22)$$

Выражение для κ_{kn} имеет вид (17.7), в нем следует j заменить индексом k и опустить член $K\rho_0\beta_k^2/2\rho hR$

Перепишем уравнение (17.13), используя выражение (17.19),

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2 f_n - \beta^4 f_n = - \frac{2i\rho_0\omega}{D_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}^2}{\gamma_{mn}^2 R^2 - n^2} \times \\ \times \frac{J_n(\gamma_{mn} r)}{J_n^2(\gamma_{mn} R)} \Phi_n(0, m) \quad \left(\beta^4 = \frac{\rho_1 h_1 \omega^2}{D_1}\right).$$

Общее решение этого неоднородного уравнения следующее

$$f_n = C_1 J_n(\beta r) + C_2 J_n(i\beta r) + f_n^*(r),$$

где f_n^* частное решение

$$f_n^* = - \frac{2i\rho_0\omega}{D_1} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{mn} \frac{J_n(\gamma_{mn} r)}{J_n(\gamma_{mn} R)} \Phi_n(0, m), \\ \Gamma_{mn} = \frac{\gamma_{mn}^2}{(\gamma_{mn}^2 R^2 - n^2)(\gamma_{mn}^4 - \beta^4)} \cdot \frac{1}{J_n^4(\gamma_{mn} R)}.$$

Определив постоянные C_1 и C_2 из граничных условий (17.14), записываем

$$f_n = f_n^*(R) \frac{1}{\delta_n} [J_n'(\beta R) J_n(i\beta R) - i J_n'(i\beta R) J_n(\beta R)] + f_n^*(r), \\ \delta_n = - J_n'(\beta R) J_n(i\beta R) + i J_n'(i\beta R) J_n(\beta R),$$

причем полагаем, что $\beta \neq \gamma_{mn}$, $\delta_n \neq 0$. Используем следующие разложения в ряд Дини — Бесселя

$$J_n(\beta r) = 2\beta R \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{mn} (\gamma_{mn}^2 + \beta^2) J_n'(\beta R) J_n(\gamma_{mn} r), \\ J_n(i\beta r) = 2i\beta R \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{mn} (\gamma_{mn}^2 - \beta^2) J_n'(i\beta R) J_n(\gamma_{mn} r).$$

Тогда выражение для перемещения дна будет иметь вид

$$f_n = - \frac{8\rho_0\omega\beta^3 R J_n'(i\beta R) J_n'(\beta R)}{D_1 \delta_n} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{mn} J_n(\gamma_{mn} r) \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{mn} \Phi_n(0, m) + \\ + \frac{2\rho_0\omega}{iD_1} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{mn} \frac{J_n(\gamma_{mn} r)}{J_n(\gamma_{mn} R)} \Phi_n(0, m). \quad (17.23)$$

Таким образом, всем граничным условиям, кроме (17.16), мы удовлетворили по ходу определения потенциала скорости в газе и перемещений в оболочке и дне. Из (17.16), используя (17.23), (17.22) и (17.20), находим систему алгебраических уравнений относительно $\Phi_n(0, m)$:

$$a_j^{(n)} \Phi_n(0, j) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{jm}^{(n)} \Phi_n(0, m) = 0, \quad (17.24) \\ (j = 1, 2, 3, \dots, m),$$

где

$$a_j^{(n)} = \frac{D_1}{\rho_0 \omega^2} (\gamma_{jn}^4 - \beta^4) \xi_{jn} \operatorname{tg} \left(\xi_{jn} \frac{L}{2} \right) - 1,$$

$$b_{jm}^{(n)} = \frac{4i}{\delta_n} \beta^3 R J_n' (i\beta R) J_n' (\beta R) J_n (\gamma_{jn} R) \Gamma_{mn} +$$

$$+ \frac{8(1 - \nu^2) D_1 R^3}{E h L} (\gamma_{jn}^4 - \beta^4) J_n (\gamma_{jn} R) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2 \Gamma_{mn} (\gamma_{mn}^4 - \beta^4)}{\kappa_{kn} (\alpha_k^2 - \xi_{jn}^2) (\alpha_k^2 - \xi_{mn}^2)}.$$

Система уравнений (17.24) имеет ненулевые решения для бесконечного ряда величин ω_{sn} . Соответствующее частотное уравнение следующее:

$$\det | \delta_{jm} a_j^{(n)} + b_{jm}^{(n)} | = 0, \quad (17.25)$$

где δ_{jm} — символ Кроннекера.

Если днища абсолютно жесткие ($E_1 = \infty$, $D_1 = \infty$), то

$$a_j^{(n)} = \xi_{jn} \operatorname{tg} \left(\xi_{jn} \frac{L}{2} \right),$$

$$b_{jm}^{(n)} = \frac{8\rho_0 R^3 (1 - \nu^2) \omega^2}{E h L} J_n (\gamma_{jn} R) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2 \Gamma_{mn} (\gamma_{mn}^4 - \beta^4)}{\kappa_{kn} (\alpha_k^2 - \xi_{jn}^2) (\alpha_k^2 - \xi_{mn}^2)}.$$

Этот случай совпадает с изложенной в предыдущем разделе задачей. Однако частотные уравнения из-за различных путей их вывода по форме не совпадают.

Найдем частотное уравнение для системы с абсолютно жесткой оболочкой ($E = \infty$). Система (17.24) запишется:

$$\left[\frac{D_1 (\gamma_{jn}^4 - \beta^4)}{\rho_0 \omega^2} \xi_{jn} \operatorname{tg} \left(\xi_{jn} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \varphi_n (0, j) =$$

$$= - \frac{4i\beta^3 R J_n' (i\beta R) J_n' (\beta R)}{\delta_n} J_n (\gamma_{jn} R) \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{mn} \varphi_n (0, m).$$

Следуя работе [75], можно показать, что правая часть этого выражения не равна нулю ни при каком m . Тогда частотное уравнение, как и в § 12, приводится к одному уравнению с бесконечным числом членов

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}^2}{(\gamma_{mn}^2 R^2 - n^2) (\gamma_{mn}^4 - \beta^4) \left[(\gamma_{mn}^4 - \beta^4) \xi_{mn} B \operatorname{tg} \left(\xi_{mn} \frac{L}{2} \right) - \beta^4 \right]} =$$

$$= - \frac{\delta_n}{4i\beta^3 R J_n' (i\beta R) J_n' (\beta R)} \left(B = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_0} \right).$$

Заменяя здесь $L/2$ величиной L , получаем частотное уравнение для системы с одним упругим и другим жестким днищами.

Наконец, полагая $E = E_1 = \infty$, получаем известное частотное уравнение для жидкости, находящейся в цилиндрической полости с жесткими стенками,

$$\sin \left(\sqrt{\omega^2/a^2 - \gamma_{mn}^2} \frac{L}{2} \right) = 0$$

или

$$\omega = \omega_{smn} = a \sqrt{\left(\frac{2s\pi}{L} \right)^2 + \gamma_{mn}^2} \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Множитель 2 под корнем появился вследствие того, что рассматривались только симметричные по длине формы колебаний газа.

§ 18. Собственные колебания сферической оболочки и заключенного в ней газа

Решение волнового уравнения

Собственные колебания замкнутой сферической оболочки в акустической среде рассмотрены в работах М. Г. Джангера [150] и В. С. Гонткевича [33], причем в последней освещена и внутренняя задача (влияние перепада статических давлений не учитывается). Для описания движения системы в этих работах использованы уравнения Лагранжа.

Идеализированная расчетная модель колебаний растяжения — сжатия наполненной газом оболочки рассматривалась в § 11. При расчете колебаний, сопровождаемых изгибом оболочки, так же не учитываем влияния крепления оболочки на ее деформации.

Потенциал скоростей в газе будем разыскивать в форме

$$\varphi = \Gamma(r) Y(\beta, \theta) e^{i\omega t}. \quad (18.1)$$

Подстановка (18.1) в волновое уравнение (2.18), записанное в сферических координатах, дает

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Gamma}{dr} + \left(\mu^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right)\Gamma &= 0, \\ \frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\sin\beta \frac{\partial Y}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{\sin^2\beta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \lambda Y &= 0, \end{aligned} \quad (18.2)$$

где $\mu = \omega/a$, λ — константа разделения.

Однозначное, конечное и непрерывное решение второго уравнения (18.2) $\nabla^2 Y + \lambda Y = 0$ существует лишь при условии [99]

$$\lambda = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Частные решения образуются из функций типа (присоединенных сферических функций 1-го рода)

$$Y_{kn}^c = P_n^k(\cos\beta) \cos k\theta, \quad Y_{kn}^s = P_n^k(\cos\beta) \sin k\theta, \quad (18.3)$$

где

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{k/2} \frac{d^k}{dx^k} [P_n(x)] \quad (x = \cos\beta),$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \dots \right];$$

k — половина числа узловых меридианов или число узловых меридианных плоскостей. Функции $P_n(\cos\beta)$ называются полиномами Лежандра n -го порядка. Приведем несколько первых значений указанных функций [99].

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_n^0(x) = P_n(x),$$

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad P_2^2(x) = 3(1-x^2).$$

Функция $P_0(x)$ представляет постоянную и характеризует колебания газовой полости только по радиусу (соответствующие колебания оболочки будут типа растяжения — сжатия). Функция $P_1(x) = \cos\beta$ описывает движения осциллирующей сферы, при котором плоскость $\beta = \pi/2$ является узловой плоскостью. В общем, полином Лежандра n -го порядка имеет n узловых плоскостей (окружностей).

Решение первого уравнения (18.2) следующее

$$\Gamma = A j_n(\mu r) + B n_n(\mu r), \quad (18.4)$$

где $j_n(z)$ и $n_n(z)$ — сферические функции Бесселя и Неймана, связанные с цилиндрическими функциями формулами

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z), \quad n_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{n+\frac{1}{2}}(z).$$

В дальнейшем ограничимся решением уравнения (18.1) в виде

$$\Phi = \Gamma(r) Y^c(\beta, \theta) = A_{kn} j_n(\mu r) P_n^k(\cos \beta) \cos k\theta e^{i\omega t}. \quad (18.5)$$

Здесь коэффициент B_1 принят равным нулю, так как в центре сферы $n_n(0) = \infty$.

Частотное уравнение

Колебания тонкой сферической оболочки описываются системой уравнений (5.11). В них следует положить

$$\begin{aligned} X &= -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ Z &= -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p_0}{2R} (\nabla^2 + 2) w. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Отыскание общего решения системы (5.11), охватывающего всевозможные формы колебаний, крайне затруднительно. Если рассмотреть лишь колебания оболочки, согласующиеся с движением газа, описываемым потенциалом скоростей (18.5), то нужно принять

$$\begin{aligned} u_1 &= U_{kn} \frac{\partial}{\partial \beta} [P_n^k(\cos \beta)] \cos k\theta e^{i\omega t}, \\ v &= U_{kn} \frac{k}{\sin \beta} P_n^k(\cos \beta) \sin k\theta e^{i\omega t}, \\ w &= W_{kn} P_n^k(\cos \beta) \cos k\theta e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (18.7)$$

При этом условие непроницаемости на поверхности оболочки будет удовлетворено; между коэффициентами A_{kn} и W_{kn} найдется зависимость

$$A_{kn} = i\omega W_{kn} / j_n'(\mu R) \quad (r = R), \quad (18.8)$$

где производная сферической функции

$$j_n'(\mu R) = \frac{1}{2n+1} [n j_{n-1}(\mu R) - (n+1) j_{n+1}(\mu R)].$$

Подставим в систему (5.11) выражения (18.6), (18.7), (18.5), (18.8) и при вычислениях учтем зависимости $\nabla^2 Y = -\lambda_n Y$, $\nabla^2 w = -\lambda_n w$, где ∇^2 — лапласиан на сфере, представляющий собой первые два члена второго уравнения (18.2). Будем иметь

$$\begin{aligned} (\lambda_n - 1 + \nu - K\omega^2) U_{kn} - [b^2(\lambda_n - 2) + 1 + \nu] W_{kn} &= 0, \\ \lambda_n [b^2(\lambda_n - 1 + \nu) + 1 + \nu] U_{kn} - [b^2(\lambda_n - 1 + \nu) \lambda_n + 2(1 + \nu) + \\ + \frac{(1 - \nu^2) R p_0}{2Eh} (\lambda_n - 2) - K\omega^2] W_{kn} &= -\frac{K\omega^2}{\rho h} \rho_0 R \Delta_n W_{kn}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_n = \left[n - \mu R \frac{j_{n+1}(\mu R)}{j_n(\mu R)} \right]^{-1}, \quad K = \frac{(1 - \nu^2) \rho R^2}{E}.$$

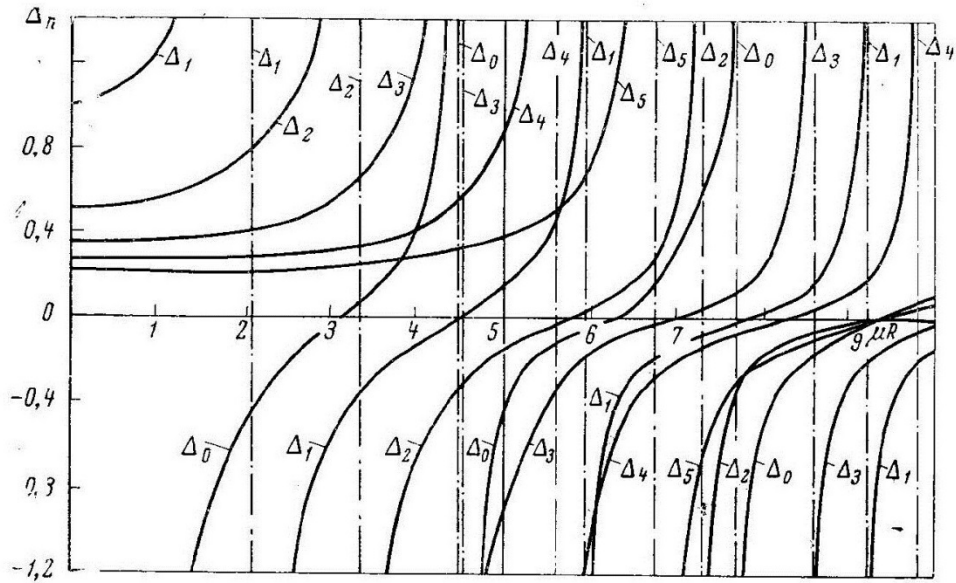


Рис. 34

Исключая в этих уравнениях U_{kn} и W_{kn} , находим частотное уравнение

$$\frac{b^2(\lambda_n - 2) + 1 + \nu}{\lambda_n - 1 + \nu - K\omega^2} [b^2(\lambda_n - 1 + \nu) + 1 + \nu] \lambda_n - \left[b^2(\lambda_n - 1 + \nu) \lambda_n + \right. \\ \left. + 2(1 + \nu) + \frac{(1 - \nu^2)Rp_0}{2Eh}(\lambda_n - 2) - K\left(1 + \frac{\rho_0 R}{\rho h} \Delta_n\right) \omega^2 \right] = 0. \quad (18.9)$$

Если положить $n = 0$ ($\lambda_n = 0$), то

$$\omega^2 = \frac{1}{R^2(\rho h + \rho_0 R \Delta_0)} \left(\frac{2Eh}{1 - \nu} - Rp_0 \right), \quad \Delta_0 = - \frac{i_0(\mu R)}{\mu R j_1(\mu R)}.$$

Этот результат совпадает с формулой (11.16), полученной во второй главе (если учесть, что $2Eh \gg Rp_0$).

Отбрасывая член, соответствующий тангенциальной инерционной силе, уравнение (18.9) можно записать

$$\left(\frac{\omega}{\Omega_n} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\rho_0 R}{\rho h} \Delta_n}, \quad (18.10)$$

где

$$\Omega_n^2 = \frac{E}{\rho R^2} \frac{\lambda_n - 2}{\lambda_n - 1 + \nu} [b_*^2(\lambda_n - 1)^2 + 1] + \frac{p_0}{2\rho h R} (\lambda_n - 2), \\ b_*^2 = b^2/(1 - \nu^2).$$

Очевидно, выражение (18.10) можно было получить, используя уравнение колебаний оболочки в форме (5.12).

На рис. 34 изображена зависимость Δ_n от величины $\mu R = \omega R/a$.

§ 19. Вынужденные колебания цилиндрической оболочки

Цилиндрическая оболочка,

защемленная в абсолютно жестких неподвижных днищах [59]

Аналогичная задача рассмотрена во втором пункте § 12. Отличие состоит только в граничных условиях для оболочки и в форме начального поля. Пусть источник колебательной энергии не обладает осевой симметрией.

Тогда, снова рассматривая только одну $k\pi n$ -ю моду колебаний газа, вместо (12.7) имеем

$$\varphi = A_{kmn} J_n(\gamma_{mn} r) \cos \alpha_k x \cos n\theta e^{i\omega t}, \quad (19.1)$$

причем $\alpha_k = k\pi/L$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), а значения $\gamma_{mn}R$ приведены в § 16 в виде таблицы.

Условия закрепления оболочки следующие:

$$u = v = w = \partial w / \partial x = 0 \quad (x = 0, L). \quad (19.2)$$

Для случая $k = 2$ выражение прогиба можно представить в виде

$$w = \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} W_j \sin^2 \alpha_j x \cos n\theta e^{i\omega t} \left(\alpha_j = \frac{j\pi}{L} \right), \quad (19.3)$$

а для $k = 1$ —

$$w = \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty} W_j \sin \alpha_1 x \sin \alpha_j x \cos n\theta e^{i\omega t} \left(\alpha_1 = \frac{\pi}{L} \right). \quad (19.4)$$

Они удовлетворяют последним двум условиям (19.2).

Допустим, что граничные крепления не препятствуют статическому растяжению оболочки в продольном и окружном направлениях. Соответствующие усилия растяжения от стационарного внутреннего давления: $N_1 = p_0 R/2$, $N_2 = p_0 R$. Следовательно, в выражении для усилия Z , входящего в систему (5.1),

$$Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p_0}{R} \left(\frac{R^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right) w + p_\varphi + p_\psi, \quad (19.5)$$

где p_φ — давление, соответствующее потенциалу скоростей (19.1), а p_ψ — давление рассеянных упругой оболочкой волн. Значения X и Y даны в (5.3).

Приведем решение для случая (19.3), причем воспользуемся приближенным методом Бубнова — Галеркина. В ряду (19.3) ограничимся первым членом (индекс «1» опустим), а для u и v примем выражения [69]

$$u = U \sin 2\alpha x \cos n\theta \exp(i\omega t), \quad (19.6)$$

$$v = V \sin^2 \alpha x \sin n\theta \exp(i\omega t),$$

которые удовлетворяют первым двум условиям (19.2).

Потенциал рассеянных волн ψ , взятый в виде

$$\psi = B J_n(\gamma r) \sin^2 \alpha x \cos n\theta \exp(i\omega t), \quad (19.7)$$

удовлетворяет условиям на концах ($\partial\psi/\partial x = 0$) и на поверхности ($\partial\psi/\partial r = \partial w/\partial t$) оболочки, однако не удовлетворяет волновому уравнению $a^2 \nabla^2 \psi = \partial^2 \psi / \partial t^2$. Интегрируя последнее по длине методом Бубнова — Галеркина, получаем

$$\gamma^2 = (\omega/a)^2 - (4/3) \alpha^2. \quad (19.8)$$

Следовательно, эффективной длиной рассеянных волн вдоль оси x будет $l = \frac{2\pi}{\frac{2}{\sqrt{3}} \alpha} = \sqrt{3} L$. Длина полуволны равна $0,866 L$, т. е. короче длины оболочки.

Если источник расположен в сечении $x = +0$, то волны ψ не оказывают на него никакого влияния.

Производя все необходимые вычисления по определению p_φ и p_ψ и подставляя их выражения, а также (19.5) (19.3) и (19.6) в систему уравнений движения оболочки (5.1), убеждаемся, что только первое из них удовлетворяется точно. К остальным двум применяем процедуру метода Бубнова —

Галеркина. В результате получаем систему трех алгебраических уравнений относительно U , V , W . Если считать $b^2\beta^2 \sim b^2n^2 \ll 1$ ($b^2 = h^2/12R^2$) и не учитывать две высшие собственные частоты оболочки в вакууме Ω_2 и Ω_3 ($\Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3$), то, исключая U и V , найдем

$$W = -\frac{2}{3} \frac{P_{2mn} J_n(\gamma_{mn} R) \delta_1}{\rho h \left[\Omega_1^2 - \left(1 + \frac{m^* \delta_1}{\rho h} \right) \omega^2 \right]},$$

$$\Omega_1^2 = \frac{E \delta_1}{\rho R^2 (1 - \nu^2)} \left[\frac{2}{3} \frac{(1 - \nu)(3 - \nu^2) \beta^4}{(3 - \nu) \beta^2 n^2 + 2(1 - \nu) \left(\beta^4 + \frac{3}{16} n^4 \right)} + \frac{8}{3} b^2 \beta^2 (2\beta^2 + n^2) + \right. \\ \left. + b^2 (n^2 - 1)^2 + \frac{p_0 R (1 - \nu^2)}{E h} \left(\frac{2}{3} \beta^2 + n^2 - 1 \right) \right], \quad (19.9)$$

$$\frac{1}{\delta_1} = 1 - \frac{\nu^2 \beta^2 + \frac{3}{4} n^2}{(3 - \nu) \beta^2 n^2 + 2(1 - \nu) \left(\beta^4 + \frac{3}{16} n^4 \right)}, \quad \beta = R\alpha.$$

Здесь $P_{2mn} = -i\rho_0 \omega A_{2mn}$ — по-прежнему амплитуда давления на оси цилиндра (для продольной моды $k = 2$), а $\delta_1 m^*$ — присоединенная масса газов, которая вычисляется по значению γ из (19.8).

Когда в уравнении (5.1) не учитываются тангенциальные инерционные члены, $\delta_1 = 1$. Если $\lambda^2 \ll n^2$, то выражение Ω_1 (19.9) совпадает со значением собственной частоты свободно опертой оболочки. Это известное положение: при колебаниях оболочки с образованием большого числа волн по окружности способ закрепления краев на величину собственной частоты не оказывает заметного влияния. Вид закреплений будет сказываться на величине напряжений около краев. При учете Ω_2 и Ω_3 выражение для амплитуды прогиба по аналогии с решением для бесконечно длинной оболочки, находящейся в жидкости [128], можно записать в виде

$$W = -\frac{2}{3} \frac{P_{2mn} J_n(\gamma_{mn} R)}{\rho h \left(\frac{1}{N} - \frac{m^*}{\rho h} \omega^2 \right)},$$

$$N = \frac{\delta_1}{\Omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\delta_2}{\Omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\delta_3}{\Omega_3^2 - \omega^2}.$$

Отсюда при $\delta_2 = \delta_3 = 0$ получается результат (19.9). Справедливо соотношение $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1$.

Цилиндрическая оболочка с начальными неправильностями в форме срединной поверхности

Хорошо известны трудности, с которыми приходится встречаться в эксперименте при попытке возбудить осесимметричные колебания оболочек. Причиной этого является то, что неизбежные отклонения срединной поверхности оболочки от идеальной формы, даже при воздействии чисто осесимметричных акустических волн, сразу вызывают изгибные деформации стенок. Например, цилиндрическая оболочка с периодической начальной неправильностью под действием внутреннего статического давления будет стремиться принять круговую форму (рис. 35). При этом изгиб оболочки происходит с числом волн, равным первоначальному. Рассмотрим вынужденные колебания бесконечной цилиндрической оболочки с периодической начальной неправильностью под действием волн давления

$$p_\Phi = P \cos \alpha x e^{i\omega t} \quad (19.10)$$

Для упрощения задачи рассеянные волны ψ учитывать не будем (см. § 13).

При составлении уравнений движения оболочек принимаем следующие допущения: неправильность в форме срединной поверхности лишь в окружном направлении, причем ее амплитуда W_0 порядка толщины стенки h , но мала по сравнению с радиусом R , а число волн $n \geq 5$; нет начальных напряжений, обусловленных этой неправильностью; упругие перемещения u, v, w малы ($w \ll h$). Эти допущения позволяют линеаризовать соотношения для деформаций. Например, в выражении дополнительной деформации удлинения по окружности [83]

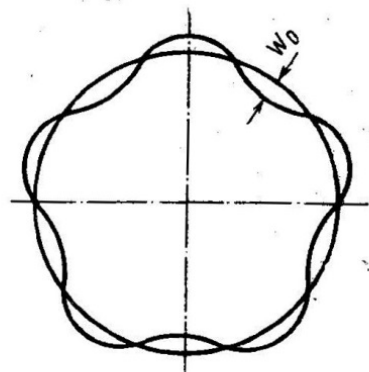


Рис. 35

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2$$

последний квадратный член отбрасываем, но предыдущий оставляем. Его отношение к члену w/R составляет $n^2 w_0/R$. Тогда уравнения изгиба полой оболочки с начальными неправильностями [83] можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & + \frac{1+\nu}{2R^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} = - \frac{1-\nu^2}{Eh} X, \\ & \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ & + \frac{1}{R^3} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{1-\nu^2}{Eh} Y, \\ & \left(1 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \left(\nu R \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + b^2 \nabla^2 \nabla^2 w = \\ & = \frac{(1-\nu^2) R^2}{Eh} Z, \quad \left(b^2 = \frac{h^2}{12R^2} \right). \end{aligned} \quad (19.11)$$

Здесь в отличие от работы [83] положительное направление w взято по внешней нормали. Отсчет полного радиального перемещения $w_* = w_0 + w$ ведется от идеальной цилиндрической поверхности.

Усилия X, Y, Z будут равны

$$X = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{P_\Phi + P_0}{R} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial \theta^2}. \quad (19.12)$$

Задача статического изгиба, обусловливаемого приведенным давлением $\frac{P_0}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}$, отделяется. Член $\frac{P_\Phi}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$ позволяет установить существование так называемого параметрического резонанса оболочки, о чем речь будет идти в следующем параграфе. Опуская указанные члены, найдем

$$Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{P_0}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{P_\Phi}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}. \quad (19.13)$$

Пусть $w_0 = W_0 \sin n\theta$. В установившемся режиме будут поддерживаться изгибные колебания с n волнами по окружности

$$u = U \sin \alpha x \sin n\theta e^{i\omega t}, \quad v = V \cos \alpha x \cos n\theta e^{i\omega t}, \quad w = W \cos \alpha x \sin n\theta e^{i\omega t}. \quad (19.14)$$

Подставим (19.13), (19.14), (19.10), а также первые два выражения (19.12) в систему уравнений (19.11). После интегрирования последних по угловой

координате θ с помощью метода Бубнова — Галеркина и исключения U, V . находим амплитуду прогиба

$$W = - \frac{(1 - \nu^2) R n^2 W_0 P}{E h \kappa_n} \quad (19.15)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_n &= b^2 (\beta^2 + n^2)^2 + 1 + \frac{K n^2 p_0}{\rho h R} - K \omega^2 + \frac{\nu \beta^2}{\nu_n} \left(n^2 - \frac{(1 - \nu) \nu}{2} \beta^2 + \nu K \omega^2 \right) - \\ &\quad - \frac{n^2}{\nu_n} \left(\beta^2 + \frac{1 - \nu}{2} n^2 - K \omega^2 \right), \\ \nu_n &= \frac{1 - \nu}{2} (\beta^2 + n^2)^2 - K \omega^2 \left[\frac{3 - \nu}{2} (\beta^2 + n^2) - K \omega^2 \right], \\ K &= \frac{(1 - \nu^2) R^2 \rho}{E}, \quad \beta = \alpha R. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициент κ_n равен выражению κ_{jn} (17.7), если в последнем положить $b^2 \beta^2 \sim b^2 n^2 \ll 1$.

Значение статического прогиба бесконечно длинной оболочки под действием постоянного внутреннего давления p_0 найдем, приняв $w = W \sin n\theta$, $v = V \cos n\theta$. Приближенное интегрирование уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= 0, \\ \left(1 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} &= \frac{(1 - \nu^2) R p_0}{E h} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

дает

$$W = - \frac{W_0 p_0}{\frac{D}{R^3} n^2 + p_0} \quad \left(D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \right).$$

Полный прогиб равен

$$w_* = W_0 \left(1 - \frac{p_0}{\frac{D}{R^3} n^2 + p_0} \right) \cos n\theta.$$

При большом p_0 ($p_0 \gg \frac{D}{R^3} n^2$) значение упругого прогиба стремится к обратной величине начальной погиби, так что оболочка принимает идеально круговую форму.

§ 20. Параметрические колебания цилиндрической оболочки

Постановка задачи о параметрических колебаниях

Оболочка может совершать изгибные колебания с образованием волн по окружности не только под действием давления, описываемого потенциалом типа (19.1). При определенных условиях изгибные колебания оболочки могут возбуждаться и в результате действия на нее осесимметричных волн: эти колебания будем называть параметрическими.

Рассмотрим бесконечно длинную трубу, образованную из отдельных оболочек длиной L , соединенных между собой посредством узких абсолютно жестких шпангоутов. Оболочки к шпангоутам закреплены шарнирно.

Потенциал осесимметричных волн в газе («первичных» возмущений) φ задается источником и не зависит от малых колебаний оболочки (т. е. определяется в предположении абсолютной жесткости стенок¹), а потенциал

¹ Это допущение не является обязательным. Можно ввести в рассмотрение вынужденные осесимметричные колебания оболочки, происходящие под действием «первичных» возмущений. Тогда, как это известно из § 12, волновое число радиальных колебаний γ_m определяется из более сложного уравнения, чем $J_1(\gamma R) = 0$.

«вторичных» возмущений ψ порождается изгибными колебаниями оболочки. При этом предполагаем, что волны ψ значительно меньшей амплитуды, чем возмущения, описываемые потенциалом ϕ . Представление общего движения газа в виде суммы движений двух видов было введено в § 12. Легко видеть, что приведенные там уравнения справедливы и для данного случая. По-прежнему через p_ϕ и p_ψ будем обозначать давления, соответствующие потенциалам скоростей ϕ и ψ .

На абсолютно жесткую оболочку со стороны газа действует давление $Z_0 = p_0 + p_\phi$. При изгибных колебаниях оболочки имеем

$$Z_* = p_0 + p_\phi + p_\psi + \kappa_2 (p_0 + p_\phi) R - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

где влиянием давления p_ψ на мембранные усилия пренебрегаем. Изменение кривизны срединной поверхности оболочки в окружном направлении равно $\kappa_2 = \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)$. Поскольку в принятой схеме на оболочку осевые силы не действуют, то член, содержащий изменение кривизны вдоль оболочки κ_1 , не приводится. Вычитая Z_0 из Z_* , найдем

$$Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{R} (p_0 + p_\phi) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) + p_\psi. \quad (20.1)$$

В этом выражении предпоследний член содержит произведение возмущения прогиба w на исходное давление p_ϕ . Поэтому в выражении p_ψ (12.1) также сохраним члены порядка $\phi\psi$. Если учесть, что в силу самого определения потенциала ϕ

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = 0, \quad (20.2)$$

то давление на поверхности оболочки

$$p_\psi = -\rho_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + (1 - M^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{M}{a} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] \quad (r = R). \quad (20.3)$$

В уравнении для ψ (12.2) и в условии на колеблющейся поверхности (12.4)

$$a^2 \nabla^2 \psi - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi = (\kappa - 1) \left[\nabla^2 \psi \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi + \nabla^2 \phi \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \right] + 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad (20.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} + \left(U_0 + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \quad (r = R), \quad (20.5)$$

согласно (20.2) также опускаем члены, содержащие $\frac{\partial \phi}{r \partial \theta}$ (лапласиан $\nabla^2 \phi$ берем без указанного члена).

Произведем оценку членов уравнений (20.1), (20.3), (20.4), (20.5) при $U_0 = M = 0$. Будем рассматривать достаточно мощные, но не ударные волны ϕ . При этом уравнение (2.12) линеаризуется. Примем его частное решение, удовлетворяющее условиям конечности возмущений в центре и равенства нулю нормальной к стенке скорости, в виде осесимметричной стоячей волны

$$\phi = A_m J_0(\gamma_m r) \sin \alpha_m x \sin \omega t, \quad (20.6)$$

где γ_m — корни уравнения (16.10); $\alpha_m = \sqrt{(\omega/a)^2 - \gamma_m^2}$; A_m и ω заданы. В выражении p_ϕ (2.11), входящем в (20.1), оставляем только главный член $-\rho_0 \partial \phi / \partial t$. Слагаемые $\frac{\rho_0}{a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2$, которые в (20.1) дают величины порядка $\frac{\rho_0}{a^2 R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$, не учитываем.

Функцию прогиба оболочки при параметрических колебаниях, удовлетворяющую условиям шарнирного закрепления, представим суммой

$$w = \nabla^2 \nabla^2 F = \sum_{j=1}^{\infty} F_{jn}(t) (\beta_j^2 + n^2)^2 \sin \alpha_j x \cos n\theta$$

$$\alpha_j = j\pi/L, \quad \beta_j = R\alpha_j.$$
(20.7)

Положим

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} B_{jn}(t) J_n(\gamma_j r) \sin \alpha_j x \cos n\theta.$$
(20.8)

Тогда, пренебрегая в (20.5) членом $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}$, получаем приближенную связь

$$\omega W_{jn} \approx B_{jn}(t) \partial J_n(\gamma_j r) / \partial r (r = R).$$
(20.9)

Для сравнений возьмем ту форму прогиба, у которого длина волны имеет один порядок с длиной волны «первичных» возмущений. Пусть это будет $\alpha_{j=s} = s\pi/L \sim \alpha_m$. Кроме того, примем во внимание, что в данной задаче частоты задаваемой нагрузки и той моды колебаний системы оболочка — газ, которая возбуждается, должны быть одного порядка, что проистекает из условия возникновения параметрического резонанса. Тогда отношение $\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ в (20.3) к параметрическому члену $\frac{P_\Phi}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$ в выражении (20.1) будет равно

$$\sim \left(\frac{s\pi R}{nL} \right)^2 \Delta_s, \quad \Delta_s = \left[n - \gamma_s R \frac{J_{n+1}(\gamma_s R)}{J_n(\gamma_s R)} \right]^{-1}.$$
(20.10)

Здесь использованы соотношения (20.6)–(20.9). Тот же порядок имеет отношение $\frac{\rho_0}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}$ из (20.3) к указанному параметрическому члену

$$\sim \left[\left(\frac{s\pi R}{L} \right)^2 + (\gamma_m R)^2 \right] \frac{\Delta_s}{n^2}.$$
(20.11)

Для плоской волны $\Phi (\gamma_{m=0} = 0)$ они совпадают. В общем эти отношения по сравнению с единицей не являются малыми, ибо Δ_s может меняться от нуля до значения, больше единицы. Следовательно, в выражении P_Φ необходимо сохранить члены порядка $\Phi \psi$. Они могут быть пренебрежимо малыми для длинных оболочек ($R^2 \ll L^2$), на поверхности которых образуется большое число волн n .

Уравнение (20.4), так же как уравнение движения оболочки, содержит члены с периодическими коэффициентами, что указывает на принципиальную возможность возбуждения параметрических колебаний в газе, заключенном даже в абсолютно жесткую трубу. Отношение упомянутых членов в (20.4) к члену $\nabla^2 \psi$ составляет $\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{P_\Phi}{\rho_0}$. Таким образом, эти члены имеют тот же порядок, что основной параметрический член в (20.1), т. е. $\frac{P_\Phi}{\rho_0}$. Однако

следует помнить, что в данном случае уравнение (20.4) служит для определения γ_j . А собственные значения γ_j волн ψ , очевидно, будут мало зависеть от неравномерности исходного акустического поля, описываемой правой частью уравнения (20.4). Поэтому в дальнейшем будем пользоваться обычным волновым уравнением относительно ψ . Тогда выражение (20.8) будет являться его решением, причем $B_j(t)$ будет периодической функцией времени.

Отношение последнего члена условия (20.5) к основным равно

$$\frac{(s\pi)^2 R w}{L^2} \Delta_j.$$

что следует считать малым по сравнению с единицей. Поэтому в условии (20.5) член $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}$ должен быть опущен. Вследствие этого (20.9) обращается в равенство.

Параметрические колебания оболочки [58]

Предположим, что половина длины стоячих волн φ (20.6) точно укладывается на длине упругой оболочки ($\alpha_m = \pi/L$), причем узлы давления приходятся на сечения, где расположены шпангоуты. В этом случае прогиб оболочки будет достаточно точно описываться первым членом ($j = 1$) разложения (20.7). Считаем, что в уравнениях (20.4), (20.5) малые члены уже отброшены, и в дальнейшем ссылки на них будем делать без специальных оговорок.

Используя (20.9), давление p_ψ выражаем через функцию прогиба

$$p_\psi = -m_1^* (\beta_1^2 + n^2)^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\kappa p_0} p_\varphi \right) \ddot{F}_{1n}(t) \sin \alpha_1 x + \right. \\ \left. + A_m J_0(\gamma_m R) \alpha_1^2 \dot{F}_{1n}(t) \cos^2 \alpha_1 x \sin \omega t \right] \cos n\theta. \quad (20.12)$$

Здесь использована формула $a^2 = \kappa p_0 / \rho_0$; $m_1^* = \rho_0 R \Delta_1$ — присоединенная масса газа, причем Δ_1 определяется из (20.10) при $s = 1$.

Подставляя (20.1), (20.6), (20.7), (20.12) в уравнение (5.5) и интегрируя последнее по методу Бубнова — Галеркина, получаем

$$(1 + 2\mu_1^{(1)} \cos \omega t) \ddot{F}_{1n}(t) - 2\mu_1^{(2)} \sin \omega t \dot{F}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 (1 + 2\mu_1^{(3)} \cos \omega t) F_{1n}(t) = 0. \quad (20.13)$$

Коэффициенты здесь следующие:

$$2\mu_1^{(1)} = \frac{8}{3\pi} \frac{m_1^*}{\rho h + m_1^*} \frac{P_{m0}}{\kappa p_0} J_0(\gamma_m R),$$

$$2\mu_1^{(2)} = \frac{4\pi}{3L^2} \frac{m_1^*}{\rho h + m_1^*} \frac{P_{m0}}{\rho_0 \omega} J_0(\gamma_m R),$$

$$2\mu_1^{(3)} = \frac{8}{3\pi} \frac{P_{m0}(n^2 - 1)}{\rho h R \omega_{1n}^2} J_0(\gamma_m R),$$

$$P_{m0} = -\rho_0 \omega A_m, \quad \omega_{1n}^2 = \Omega_{1n}^2 \left(1 + \frac{m_1^*}{\rho h} \right)^{-1}.$$

Парциальная частота колебаний оболочки Ω_{1n} дается выражением (16.6), в котором β равно $R\alpha_1 = \pi R/L$.

Коэффициент $\mu_1^{(1)}$ мал настолько, что его квадратом по сравнению с единицей можно пренебречь. Поэтому уравнение (20.13) можно привести к виду

$$\ddot{F}_{1n} - 2\mu_1^{(2)} \sin \omega t (1 - 2\mu_1^{(1)} \cos \omega t) \dot{F}_{1n} + \omega_{1n}^2 [1 + 2(\mu_1^{(3)} - \mu_1^{(1)}) \cos \omega t] F_{1n} = 0. \quad (20.14)$$

В случае длинной оболочки ($L^2 \gg R^2$) и неплоских «первичных» волн ($m \neq 0$) согласно оценкам (20.10) и (20.11) в выражении p_ψ (20.3) член $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ пренебрежимо мал.

Соответственно (20.14) упрощается

$$\ddot{F}_{1n} + \omega_{1n}^2 [1 + 2(\mu_1^{(3)} - \mu_1^{(1)}) \cos \omega t] F_{1n} = 0. \quad (20.15)$$

Уравнение Матье (20.15) имеет неограниченно возрастающие решения вблизи значений частот «первичных» волн

$$\omega = \frac{2\omega_{1n}}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Соответствующие области параметрических колебаний могут быть найдены известными методами [13]. Главная из них определяется из приближенного решения

$$F_{1n} = a_1 \cos \frac{\omega}{2} t + c_1 \sin \frac{\omega}{2} t.$$

Подстановка последнего в (20.15) и приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых синусах и косинусах дает

$$\frac{\omega}{2\omega_{1n}} = \sqrt{1 \pm (\mu_1^{(3)} - \mu_1^{(1)})} \approx 1 \pm \frac{1}{2} (\mu_1^{(3)} - \mu_1^{(1)}).$$

Таким образом, учет члена $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ в выражении давления рассеянных упругой оболочкой волн (20.3), что существенно при высших радиальных модах ($m > 1$), приводит либо к сужению области параметрических колебаний ($\mu_1^{(1)} > 0$), либо к ее расширению ($\mu_1^{(1)} < 0$).

Коэффициенты μ могут быть вычислены, если известна присоединенная масса m_1^* , в свою очередь зависящая от γ_1 . Связь между γ_1 , частотой ω и волновым числом α_1 дается выражением $\gamma_1^2 = (\omega_{1n}/a)^2 - \alpha_1^2$ или приближенным соотношением

$$\gamma_1^2 = \left(\frac{v\omega}{2a} \right)^2 - \alpha_1^2.$$

Следовательно, коэффициенты μ сложным образом зависят от частот, волновых чисел и других параметров.

Если наряду с $(\mu_1^{(1)})^2$ пренебречь величиной $\mu_1^{(1)} \mu_1^{(2)} \omega/\omega_{1n}^2$ по сравнению с единицей, то с помощью подстановки

$$F_{1n}(t) = f_{1n}(t) \exp \left[-\frac{\mu_1^{(2)}}{\omega} \cos \omega t \right]$$

(20.14) также можно привести к стандартному виду уравнения Матье

$$\ddot{f}_{1n} + \omega_{1n}^2 \left[1 + 2 \left(\mu_1^{(3)} - \mu_1^{(1)} + \frac{\omega}{2\omega_{1n}^2} \mu_1^{(2)} \right) \cos \omega t \right] f_{1n} = 0.$$

Для определения амплитуд прогибов оболочки и «вторичных» акустических волн необходимо использовать нелинейные соотношения.

Чтобы проиллюстрировать влияние среднего течения сжимаемой жидкости на параметрические колебания, рассмотрим оболочку бесконечной длины, внутри которой распространяются «первичные» волны с малыми волновыми числами λ_m . Выражение λ_m было приведено в § 2

$$\lambda_m = \frac{1}{1-M^2} \left(\sqrt{\mu^2 - (1-M^2)\gamma_m^2} - M\mu \right).$$

Обозначая через P_{m0} амплитуду давления на оси цилиндра, представим осесимметричное акустическое давление на стенки в виде

$$p_\varphi = P_{m0} J_0(\gamma_m R) \cos(\lambda_m x - \omega t) \quad (\lambda_m \rightarrow 0). \quad (20.16)$$

Если рассматривать волны φ низшей радиальной моды ($\gamma R = 3,83$) и колебания оболочки с большим числом n , так чтобы $(\gamma R/n)^2 \ll 1$, то в выражении (20.3) можно оставить лишь первые два члена ($d\varphi/dx \rightarrow 0$ в силу $\lambda_m \rightarrow 0$), пренебрегая остальными. Представим F как функцию некоторого волнового числа λ

$$F = [X(t) \cos \lambda x + Y(t) \sin \lambda x] \cos n\theta. \quad (20.17)$$

Далее положим

$$\psi = [B(t) \cos \lambda x + C(t) \sin \lambda x] J_n(\gamma r) \cos n\theta. \quad (20.18)$$

Подставляя (20.17) и (20.18) в условие (20.5), получаем

$$B = \frac{(\beta^2 + n^2)^2}{J'_n(\gamma r)} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + U_0 \lambda Y \right),$$

$$C = \frac{(\beta^2 + n^2)^2}{J'_n(\gamma r)} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} - U_0 \lambda X \right), \quad \beta = \lambda R \quad (r = R).$$

По формуле (20.3) с учетом (20.18) находим

$$p_\psi = -m^* (\beta^2 + n^2)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2U_0 \lambda \frac{\partial Y}{\partial t} - U_0^2 \lambda^2 X \right) \cos \lambda x + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 2U_0 \lambda \frac{\partial X}{\partial t} - U_0^2 \lambda^2 Y \right) \sin \lambda x \right] \sin n\theta, \quad (20.19)$$

где m^* — присоединенная масса газа.

Учитывая при дальнейшем расчете конструкционное демпфирование в самой оболочке, вместо (20.1) будем иметь

$$Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{R} (p_0 + p_\psi) \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right) w + p_\psi. \quad (20.20)$$

Введем выражения (20.20), (20.16), (20.17), (20.19) в уравнение движения оболочки (5.5) и примем во внимание, что $\lambda_m \rightarrow 0$. Приравнявая коэффициенты при $\cos \lambda x$ и $\sin \lambda x$, получаем два уравнения

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \varepsilon^* \frac{dX}{dt} + u^* \frac{dY}{dt} + \omega_n^{*2} (1 + 2\mu \cos \omega t) X = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \varepsilon^* \frac{dY}{dt} - u^* \frac{dX}{dt} + \omega_n^{*2} (1 + 2\mu \cos \omega t) Y = 0, \quad (20.21)$$

где

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\rho h + m^*}, \quad u^* = \frac{2U_0 \lambda m^*}{\rho h + m^*},$$

$$\omega_n^{*2} = \frac{\Omega_n^2 - U_0^2 \lambda^2}{1 + m^*/\rho h}, \quad 2\mu = \frac{P_{m0} J_0(\gamma_m R)}{\rho h R \omega_n^{*2}} (n^2 - 1).$$

Здесь Ω_n^2 — квадрат парциальной частоты оболочки.

Для определения главной области параметрических колебаний примем

$$X = \sum_{v=1,3}^{\infty} \left(a_v \cos \frac{v\omega t}{2} + c_v \sin \frac{v\omega t}{2} \right),$$

$$Y = \sum_{v=1,3}^{\infty} \left(b_v \sin \frac{v\omega t}{2} + d_v \cos \frac{v\omega t}{2} \right).$$

Подставляя их в (20.21) и ограничиваясь значением $v = 1$, из условия существования периодических решений получим

$$\begin{vmatrix} g & u^* & \varepsilon^* & 0 \\ u^* & q & 0 & -\varepsilon^* \\ -\varepsilon^* & 0 & q & -u^* \\ 0 & \varepsilon^* & -u^* & g \end{vmatrix} = 0. \quad (20.22)$$

$$\text{Здесь } g = \frac{2\omega_n^{*2}}{\omega} \left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{4\omega_n^{*2}} \right), \quad q = \frac{2\omega_n^{*2}}{\omega} \left(1 - \mu - \frac{\omega^2}{4\omega_n^{*2}} \right).$$

В случае покоящейся среды ($u^* = 0$) из (20.22) следует известное соотношение

$$\left(\frac{\omega}{2\omega_n}\right)^2 \approx 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\left(\frac{\varepsilon^*}{\omega_n}\right)^2}.$$

Конструкционное демпфирование всегда сужает область параметрического резонанса. Если же пренебречь конструкционным демпфированием ($\varepsilon^* = 0$), то

$$\left(\frac{\omega}{2\omega_n}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{u^*}{\omega_n}\right)^2\right] \pm \sqrt{\mu^2 + 2\left(\frac{u^*}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{u^*}{\omega_n}\right)^4}.$$

Отсюда при $u^* < \omega_n^*$ имеем

$$\left(\frac{\omega}{2\omega_n}\right)^2 \approx 1 \pm \sqrt{\mu^2 + 2\left(\frac{u^*}{\omega_n}\right)^2}.$$

Следовательно, кориолисовы силы, возникающие в результате движения потока и поперечных колебаний оболочки, несколько расширяют область параметрических колебаний.

О термопараметрических колебаниях оболочки

Периодическое изменение температуры в рабочей среде вызывает периодическое нагревание стенок оболочки и изменение ее упругих характеристик, что может привести к параметрическим колебаниям. Указанное явление рассмотрено в работах [11], [67], где колебания температуры в оболочке не связываются с какими-либо процессами в окружающей среде.

В первую очередь требуется найти температурное поле в газе и оболочке. Строго говоря, в пристеночной зоне колебания среды не являются адиабатическим процессом, поскольку существует отвод тепла в стенки. Но эти потери по сравнению с колебаниями энтальпии во всем объеме трубы настолько малы, что процесс можно считать адиабатическим: $p_*/p_0 = (\rho_*/\rho_0)^\kappa$. Используя уравнение состояния $p_*/\rho_* = BT_*$, найдем $T_* = T_0 (p_*/p_0)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$. Положим $T_* = T_0 + T$, $p_* = p_0 + p$, причем возмущения p и T будем считать достаточно малыми по сравнению с равновесными p_0 и T_0 . Тогда получим выражение, связывающее возмущения температуры и давления,

$$\frac{T}{T_0} = -1 + \left(1 + \frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = -1 + 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{p}{p_0} + \dots$$

или

$$T = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T_0}{p_0} p.$$

В случае гармонических колебаний

$$T = T^+ e^{i\omega t} \quad \left(T^+ = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T_0}{p_0} P\right), \quad (20.23)$$

где P — амплитуда колебаний давления.

Распространение температурных волн по толщине стенки подчиняется уравнению теплопроводности [120]

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \chi^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \quad (20.24)$$

и граничным условиям —

$$\begin{aligned}\alpha(T - \tau) &= -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \\ \alpha_1(\tau - T_1) &= -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad \text{при } z = h.\end{aligned}\quad (20.25)$$

Здесь $\chi^2 = \lambda/c_T \rho$, λ — коэффициенты температуро- и теплопроводности; c_T — удельная теплоемкость; ρ — плотность; h — толщина; α , α_1 — коэффициенты теплоотдачи внутренней и внешней поверхности. В приведенных уравнениях не учтены кривизна стенки (ввиду малости отношения h/R) и поток тепла в тангенциальных направлениях.

Прямые вычисления показывают, что в нашей задаче колебательный теплоотвод через внешнюю поверхность мал. Поэтому второе условие (20.25) можно упростить

$$\partial \tau / \partial z = 0 \quad (z = h). \quad (20.26)$$

Подчинив решение уравнения (20.24)

$$\begin{aligned}\tau &= (C_1 \operatorname{sh} \xi z + C_2 \operatorname{ch} \xi z) e^{i\omega t} \\ \left(\xi &= \frac{1+i}{\chi} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \right)\end{aligned}$$

первому условию (20.25), а также (20.26), получаем выражение для колебаний температуры стенки

$$\tau = T^+ \frac{\operatorname{ch} \xi(h-z)}{\operatorname{ch} \xi h + (\lambda \xi / \alpha) \operatorname{sh} \xi h} e^{i\omega t}.$$

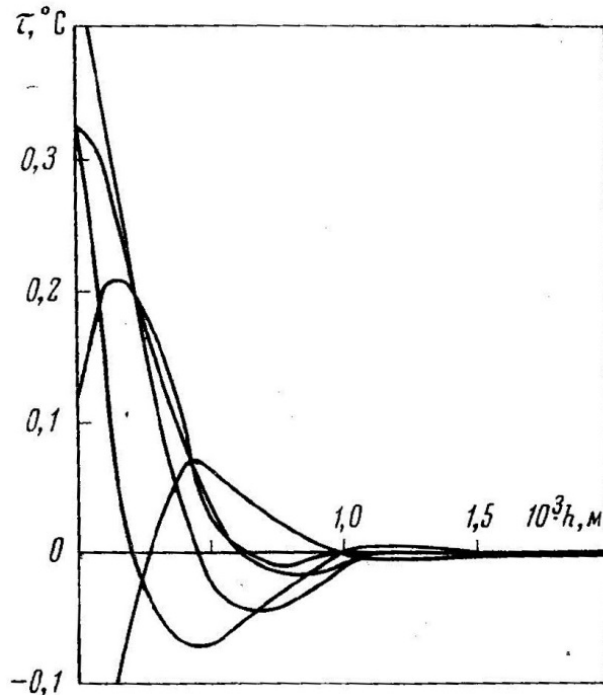


Рис. 36

При больших значениях аргумента ξh приближенно $\operatorname{sh} \xi h = \operatorname{ch} \xi h$ и

$$\tau = T^+ \frac{\operatorname{ch} \xi z - \operatorname{sh} \xi z}{1 + \lambda \xi / \alpha} e^{i\omega t}, \quad (20.27)$$

Пример. При $T_0 = 2700^\circ \text{ К}$, $\kappa = 1,3$ и сильных звуковых колебаниях $P/p_0 = 0,02$ амплитуда колебаний температуры согласно (20.23) равна $T^+ = 12,5^\circ \text{ С}$. При распространении звука обычной интенсивности в атмосфере колебания температуры ничтожны. В ударных волнах, возникающих в камере, где отношение P/p_0 может быть порядка единицы, колебания температуры будут значительны. Для определения температурного поля в стенке примем следующие данные: $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_T = 480 \text{ Дж/кг.град}$, $\lambda = 39 \text{ Вт/м.град}$; $\omega = 251 \text{ рад/сек}$, $\alpha = 10^3 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$, $T^+ = 100^\circ \text{ С}$. Тогда $\xi = 3,8 \cdot 10^3 (1 + i) \text{ 1/м}$, $\lambda \xi / \alpha = 148,2 (1 + i)$. На рис. 36 приведены результаты расчетов по формуле (20.27). По оси ординат отложена величина $\operatorname{Re}(\tau)$. Как видно из графика, даже при высоких значениях T^+ , α , λ и сравнительно низких частотах (40 гц), амплитуда колебаний температуры на поверхности стенки не превышает $0,5^\circ \text{ С}$. Это объясняется тем, что материал стенки не успевает реагировать на колебания температуры в прилегающей среде. Поэтому учет изменения модуля упругости не внесет каких-либо уточнений в полученных выше результатах.

Посмотрим, однако, к чему в принципе может привести периодическое изменение модуля упругости. Уравнение для пологой цилиндрической оболочки относительно функции прогиба имеет вид [11]

$$\frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{E_1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - p R \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (20.28)$$

где

$$E_1 = \int_{-h/2}^{h/2} E dz, \quad E_2 = \int_{-h/2}^{h/2} E z dz, \quad E_3 = \int_{-h/2}^{h/2} E z^2 dz. \quad (20.29)$$

При малых изменениях температуры справедлива линейная зависимость

$$E = E_0 (1 - \eta \tau). \quad (20.30)$$

В выражении (20.27) перенесем начало координаты z на срединную поверхность

$$\tau = \frac{T^+}{1 + \lambda \xi / \alpha} \left(\operatorname{ch} \xi \frac{h}{2} - \operatorname{sh} \xi \frac{h}{2} \right) (\operatorname{ch} \xi z - \operatorname{sh} \xi z) e^{i \omega t}. \quad (20.31)$$

Подстановка (20.29)–(20.31) и координатной функции, удовлетворяющей определенным граничным условиям, в уравнение (20.28) дает относительно функции времени уравнение типа Матье — Хилла. Вычисления показывают, что коэффициент возбуждения, соответствующий температурному воздействию, пренебрежимо мал по сравнению с коэффициентом от пульсации давления $p = P e^{i \omega t}$.

§ 21. Параметрические колебания конической оболочки [56]

Уравнения конической оболочки

Рассмотрим параметрические колебания усеченной конической оболочки, возникающие при действии высокочастотных возмущений газовой среды в ее полости. Решение ведется энергетическим методом, примененным в работах [5], [6]. При этом используем условия нерастяжимости срединной поверхности оболочки. Это справедливо для оболочки с одним свободным краем. Однако такое допущение применяется и для случая, когда закреплены оба края, так как вследствие высокочастотных акустических колебаний среды (порядка 1000 гц и выше) оболочка будет совершать параметрические колебания, при этом образуется большее число волн по окружности и длине, чем число волн, соответствующее минимальной частоте. Значит, преобладающей будет потенциальная энергия изгибных деформаций. Числовые примеры показывают, что отличие собственных частот, вычисленных без учета растяжения и сдвига срединной поверхности оболочки и с учетом последних, при больших n незначительно. Избыточное внутреннее статическое давление и рассеянные упругой оболочкой волны не учитываются.

Уравнение распространения продольных (сферических) волн в конической полости может быть записано в виде [110]

$$(1 - M^2 \cos^2 \delta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{(2 - M^2 \sin^2 \delta)}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{2M \cos \delta}{a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (21.1)$$

где s , δ — координаты, указанные на рис. 37. Это уравнение получено из (2.18) подстановкой: $x = s \cos \delta$, $r = s \sin \delta$.

Ограничимся случаем $M = 0$. Тогда одно из частных решений уравнения (21.1) будет

$$\varphi = \frac{1}{s} (A_1 e^{-i\alpha s} + A_2 e^{i\alpha s}) e^{i\omega t} \left(\alpha = \frac{\omega}{a} \right). \quad (21.2)$$

Считаем, что амплитуды p_*/s_1 и частоты ω акустических волн, пересекающих входное сечение s_1 , известны, а сечение s_2 сообщается с бесконечным жестким коническим экраном ($A_2 = 0$) или акустически закрыто по сфере с кривизной, равной кривизне сферической волны ($\partial\varphi/\partial s = 0$) (рис. 37 и 38).

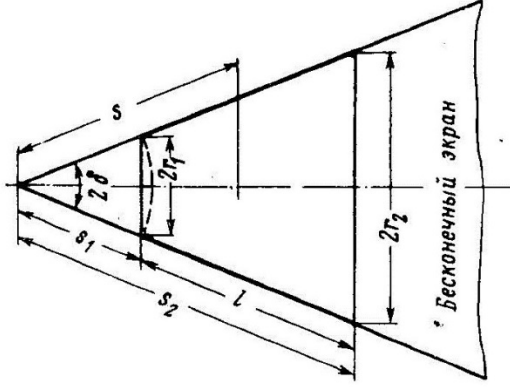


Рис. 37

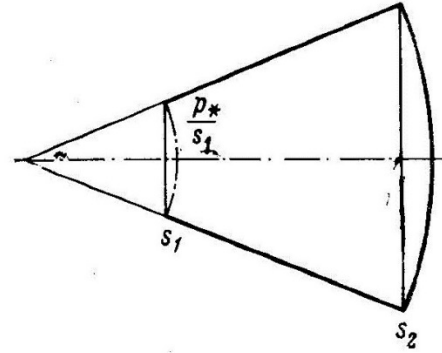


Рис. 38

Давление в первом варианте граничных условий будет равно

$$p = -\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{p^*}{s} e^{-i(\alpha x - \omega t)}, \quad (21.3)$$

во втором —

$$\begin{aligned} p &= \frac{p^*}{s(1+\eta)} (e^{-i\alpha x} + \eta e^{i\alpha x}) e^{i\omega t}, \\ x &= s - s_1, \quad l = s_2 - s_1, \\ \eta &= \frac{1 + i\alpha s_2}{1 - i\alpha s_2} e^{-2i\alpha l}. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Для описания колебаний оболочки используем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{f}} \right) - \frac{\partial K}{\partial f} + \frac{\partial (U + \Pi)}{\partial f} = 0, \quad (21.5)$$

где f — обобщенная координата.

Входящая сюда потенциальная энергия U равна [84]

$$\begin{aligned} U &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{12}^2 \right] r d\theta ds + \\ &+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2 + 2(1-\nu)\kappa_{12}^2 \right] r d\theta ds, \end{aligned} \quad (21.6)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{w}{r} \cos\delta + \frac{u}{r} \sin\delta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r\partial\theta} - \frac{v}{r} \cos\delta \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{r\partial\theta} - \frac{v}{r} \sin\delta \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta}, \quad \kappa_1 = - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \\ \kappa_2 &= - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \delta \right) - \frac{\partial w}{r \partial s} \sin \delta, \\ \kappa_{12} &= - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{\partial w}{r \partial \theta} \sin \delta \right) + \frac{\cos \delta}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \sin \delta \right).\end{aligned}\quad (21.7)$$

Кинетическая энергия

$$K = \frac{\rho h}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] r d\theta ds. \quad (21.8)$$

Потенциал внешних сил определим по формуле

$$\Pi = \int \operatorname{Re}(p) dV, \quad (21.9)$$

где изменение объема при деформациях конической оболочки

$$\begin{aligned}dV &= - \frac{1}{2} \left[2w + w \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{w}{r} \cos \delta + \frac{u}{r} \sin \delta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v}{r} \cos \delta - \frac{\partial w}{\partial s} u - \frac{\partial w}{r \partial \theta} v \right] r d\theta ds.\end{aligned}\quad (21.10)$$

В отличие от работ [5], [6] это выражение записано для прогиба w , который считается положительным в направлении внешней нормали.

Перемещения представляются в виде сумм

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

где дополнительные перемещения u_2 , v_2 , w_2 имеют порядок квадратов u_1 , v_1 , w_1 .

Два варианта граничных условий для оболочек

Примем два вида подкрепления краев оболочки: а) обе кромки шарнирно закреплены, б) входные кромки закреплены шарнирно, а выходные — свободны.

Когда оба края закреплены, прогиб возьмем в виде [37]

$$w_1 = fr^2 \sin \frac{\beta x}{2} \sin n\theta \quad \left(\beta = 2 \frac{\pi}{l} \right). \quad (21.11)$$

Тогда, полагая в (21.7) $\varepsilon_1 = \varepsilon_{12} = 0$ и отбрасывая в последних члены с f^2 и другие малые члены порядка $1/n^2$, находим

$$\begin{aligned}v_1 &= fr^2 \frac{\cos \delta}{n} \sin \frac{\beta x}{2} \cos n\theta, \\ u_1 &= - fr^2 \frac{\cos \delta}{n} g \cos \frac{\beta x}{2} \sin n\theta,\end{aligned}\quad (21.12)$$

причем

$$g = \frac{1,046 + (\lambda + \lambda^2) \pi}{(0,5 + \lambda)} \cdot \frac{\sin \delta}{n}, \quad \lambda = \frac{s_1}{l}.$$

Перемещение $v_2 = 0$, а перемещения u_2 и w_2 определяются по формулам [5]

$$\begin{aligned}u_2 &= - \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial s} \right)^2 \right] ds, \\ w_2 &= - u_2 \operatorname{tg} \delta - \frac{1}{2} \frac{r}{\cos \delta} \left[\left(\frac{\partial w_1}{r \partial \theta} - \frac{v_1}{r} \cos \delta \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{r \partial \theta} - \frac{v_1}{r} \sin \delta \right)^2 \right],\end{aligned}\quad (21.13)$$

в которые необходимо подставить функции (21.11) и (21.12). Отбросим малые члены (порядка $1/n^2$). Тогда выражение для w_2 примет вид

$$w_2 = - \frac{f^2 r^3 n^2}{2 \cos \delta} \sin^2 \frac{\beta x}{2} \cos^2 n\theta. \quad (21.14)$$

Выражение для u_2 не приводим, ибо при вычислении энергии с точностью до f^2 перемещение u_2 в дальнейшие выкладки не входит.

Подставляя (21.11) в (21.8) (в последнем не учитываем первые два члена) и производя интегрирование в указанных пределах, получим выражение для кинетической энергии

$$K = \frac{\pi}{2} f^2 \rho h l^6 \alpha_1 \sin^5 \delta, \quad (21.15)$$

где

$$\alpha_1 = 0,039 + 0,285 \lambda + 1,213 \lambda^2 + 1,414 \lambda^3 - 1,25 \lambda^4 + 0,5 \lambda^5.$$

Подставим в (21.6) выражения (21.7), (21.11), (21.12), учтем принятое допущение о нерастяжимости срединной поверхности и отбросим малые члены. Тогда будем иметь

$$U = \frac{\pi E h}{2(1-\nu^2)} f^2 \left(\frac{g^2 l^4 \sin^2 2\delta}{4n^2} \alpha_2 + \frac{n^2 h^2 l^2}{12} \alpha_3 \right) \sin^3 \delta. \quad (21.16)$$

Здесь обозначено

$$\alpha_2 = 1,734 + 8,502 \lambda - 21,0 \lambda^2 + 20,0 \lambda^3 + 12,35 \lambda^4 + 4,94 \lambda^5,$$

$$\alpha_3 = \frac{n^2 - 2 \cos^2 \delta}{2 \sin^2 \delta} - 1 - 3\nu \left(0,5 + \lambda \right) + 2\pi(1+\nu)(0,159 + 0,318 \lambda) + \\ + \pi^2(0,326 + 1,151 \lambda + 1,5 \lambda^2 + \lambda^3) - \pi^2 \nu(0,083 + 0,302 \lambda).$$

После подстановки (21.10), (21.11), (21.12), (21.14), и (21.4) в формулу (21.9) и интегрирования по дуге находим

$$\Pi = \frac{\pi}{4} p_* f^2 n^2 \frac{\sin^4 \delta}{\cos \delta} \int_0^l (s_1 + x)^3 \sin^2 \frac{\beta x}{2} \times \\ \times \operatorname{Re} \{ [(1 + i\mu) e^{-i\alpha x} + (1 - i\mu) e^{i\alpha x}] e^{i\omega t} \} dx,$$

где в коэффициентах функции давления (21.4) выделены вещественные и мнимые части

$$\frac{1}{1+\eta} = \frac{1}{2}(1+i\mu), \quad \frac{\eta}{1+\eta} = \frac{1}{2}(1-i\mu),$$

$$\mu = \frac{(1 - \alpha^2 s_2^2) \sin 2\alpha l - 2\alpha s_2 \cos 2\alpha l}{1 + \alpha^2 s_2^2 + (1 - \alpha^2 s_2^2) \cos 2\alpha l + 2\alpha s_2 \sin 2\alpha l}.$$

Интегрируя выражение Π , находим

$$\Pi = \frac{\pi}{4} p_* f^2 n^2 \frac{\sin^4 \delta}{\cos \delta} (b + \mu d) \cos \omega t, \quad (21.17)$$

а для давления (21.3) (следует положить $\mu = -i$) —

$$\Pi = \frac{\pi}{4} p_* f^2 n^2 \frac{\sin^4 \delta}{\cos \delta} (b \cos \omega t + d \sin \omega t). \quad (21.18)$$

Сюда введены обозначения

$$b = C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l - C_3,$$

$$d = C_2 \sin \alpha l - C_1 \cos \alpha l + C_4,$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{s_2 \beta^2}{\alpha (\alpha^2 - \beta^2)} (\chi^2 - s_2^2), & C_2 &= \frac{3\beta^2 (3\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2} (\zeta^2 - s_2^2), \\ C_3 &= \frac{3\beta^2 (3\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2} (\zeta^2 - s_1^2), & C_4 &= \frac{s_1 \beta^2}{\alpha (\alpha^2 - \beta^2)} (\chi^2 - s_1^2), \\ \chi^2 &= 6 \frac{(6\alpha^4 - 3\alpha^2 \beta^2 + \beta^4)}{\alpha^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2}, & \zeta^2 &= 2 \frac{(10\alpha^6 - 5\alpha^4 \beta^2 - 4\alpha^2 \beta^4 - \beta^6)}{\alpha^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2 (3\alpha^2 - \beta^2)}. \end{aligned}$$

Выражение (21.18) содержит функции $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, так как соответствует энергии бегущей волны давления (21.3), а потенциал энергии (21.17) — только одну функцию времени, ибо волна давления (21.4), определенная из условия полного отражения от конца, является стоячей.

Подставляя (21.15)–(21.18) в уравнение (21.5) в случае закрытого конца оболочки получаем

$$\ddot{f} + \Omega_n^2 (1 + 2\mu_n \cos \omega t) f = 0, \quad (21.19)$$

а в случае оболочки, выходное сечение которой соединяется с бесконечным экраном,

$$\ddot{f} + \Omega_n^2 (1 + 2\mu'_n \cos \omega t + 2\mu''_n \sin \omega t) f = 0. \quad (22.20)$$

В (21.19) и (21.20) введены обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_n^2 &= \frac{E}{(1 - \nu^2) \rho} \left(\frac{g^2 \cos^2 \delta}{n^2 l^2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{n^2 h^2}{12 l^4 \sin^2 \delta} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right), \\ p_n &= \frac{\rho h l^6 \alpha_1 \sin 2\delta}{n^2} \Omega_n^2, \quad 2\mu_n = \frac{p_*(b + \mu d)}{p_n}, \\ 2\mu'_n &= \frac{p_* b}{p_n}, \quad 2\mu''_n = \frac{p_* d}{p_n}. \end{aligned} \quad (21.21)$$

Уравнения (21.19) и (21.20) могут быть исследованы известными методами. Области неустойчивости решений определяются, как и в предыдущем параграфе.

В случае свободного правого края оболочки прогиб примем изменяющимся по линейному закону [6].

$$w_1 = f x \cos n\theta. \quad (21.22)$$

Условия нерастяжимости срединной поверхности ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{12} = 0$) дают

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{f}{n} \left(x - \frac{s_1}{n^2} \sin^2 \delta \right) \cos \delta \sin n\theta, \\ u_1 &= -f \frac{s_1}{2n^2} \sin 2\delta \cos n\theta. \end{aligned} \quad (21.23)$$

Дополнительное перемещение w_2 по формуле (21.23) равно

$$w_2 = -f^2 \frac{n^2}{\sin 2\delta} \frac{x^2}{s} \sin^2 n\theta. \quad (21.24)$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергий при подстановке (21.22) и (21.23) в (21.8) и (21.6) примут вид

$$K = \frac{\pi}{2} \dot{f}^2 \rho h r_1^4 \alpha_1, \quad (22.25)$$

$$U = \frac{\pi E h^3}{24 (1 - \nu^2)} f^2 \alpha_2,$$

причем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{3} \frac{(\kappa - 1)^2}{\sin^3 \delta} \left[\kappa^2 - \frac{1}{4} (\kappa + 1)^2 \right], \quad \kappa = \frac{r_2}{r_1}, \\ \alpha_2 &= \frac{n^4}{\lambda^3 (\kappa - 1)^3 \sin^3 \delta} \left(\ln \kappa - \frac{3}{2} + \frac{2}{\kappa} - \frac{1}{2\kappa^2} \right) + \frac{n^2 (1 - \nu)}{\lambda \kappa^2 \sin \delta} (\kappa + 1). \end{aligned}$$

Воспользуясь выражениями (21.22), (21.23) и (21.24), вычислим энергию Π для давления (21.3)

$$\Pi = \frac{\pi}{2} p_* f^2 \frac{n^2}{\cos \delta} (b \cos \omega t + d \sin \omega t), \quad (21.26)$$

где

$$b = C_1 \sin \alpha s_1 + C_2 \cos \alpha s_1.$$

$$d = -C_2 \sin \alpha s_1 + C_1 \cos \alpha s_1,$$

$$C_1 = \frac{1}{\alpha^2} (\sin \alpha s_2 - \sin \alpha s_1) - \frac{1}{\alpha} (s_2 \cos \alpha s_2 - s_1 \cos \alpha s_1) + \\ + \frac{2s_1}{\alpha} (\cos \alpha s_2 - \cos \alpha s_1) + s_1^2 (\text{Si } \alpha s_2 - \text{Si } \alpha s_1),$$

$$C_2 = \frac{1}{\alpha^2} (\cos \alpha s_2 - \cos \alpha s_1) + \frac{1}{\alpha} (s_2 \sin \alpha s_2 - s_1 \sin \alpha s_1) - \\ - \frac{2s_1}{\alpha} (\sin \alpha s_2 - \sin \alpha s_1) + s_1^2 (\text{Ci } \alpha s_2 - \text{Ci } \alpha s_1),$$

Si, Ci — интегральные синус и косинус.

Подставляя (21.25) и (21.26) в формулу (21.5), получаем уравнение (21.20), в котором коэффициенты теперь будут равны

$$\Omega_n^2 = \frac{E h^2}{12(1-\nu^2) \rho r_1^4} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad p_n = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\cos \delta}{n^2} \alpha_2,$$

$$2\mu'_n = \frac{p_* b}{p_n}, \quad 2\mu''_n = \frac{p_* d}{p_n}.$$

Сравним собственную частоту (21.21) со значением частоты, вычисленной с учетом деформации растяжения и сдвига срединной поверхности [37]. Возьмем те же параметры, что в [37]: $r_1 = 0,1$ м, $r_2 = 0,175$ м, $l = 0,6$ м, $h = 0,001$ м, $\delta = 7^\circ 47'$, $E = 1,9 \cdot 10^6$ бар, $\nu = 0,3$, $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³. Минимум собственной частоты такой оболочки реализуется при $n = 4$. При этом разница в частотах, вычисленных с учетом и без учета энергии растяжения и сдвига срединной поверхности, будет большой. Однако при колебаниях оболочки с большими n , что соответствует высокочастотной возбуждающей силе, эта разница уменьшается. Например, при $n = 8$ по (21.21) находим $\Omega = 711$ гц, а по формуле статьи [37] (учитывающей растяжение и сдвиг) — $\Omega = 809$ гц. Как видим, разница между ними приблизительно равна 11%.

СОВМЕСТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СПЛОШНОГО УПРУГОГО ТЕЛА, ГАЗА И ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

§ 22. Цилиндрическая система бесконечной и конечной длины [60]

Свободные колебания

Исследованию колебаний цилиндрических систем, состоящих из деформируемого твердого тела, газа и тонкой оболочки (рис. 39), посвящена значительная литература. Авторы работы [154] рассматривают собственные колебания заключенного в абсолютно жесткую трубу полого цилиндра, содержащего газ во внутреннем цилиндрическом канале, полагая систему бесконечно длинной. Распространение волн в бесконечном цилиндре и некоторые частные формы колебаний рассмотрены в статьях [123], [126], [124]. В работе [163] исследованы свободные поперечные колебания сплошного цилиндра (без отверстия), заключенного в упругую оболочку бесконечной длины. Решение задачи о вынужденных осесимметричных колебаниях полого цилиндра конечной длины, заключенного в оболочку,

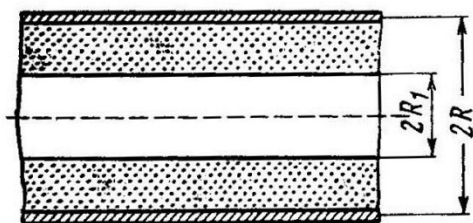


Рис. 39

ку, дано в статье [148]. Более общий случай свободных и вынужденных колебаний системы «тонкостенная оболочка — полый цилиндр — газ» приводится в [60].

Работы [43], [44] посвящены изучению сферических систем. В монографиях [74], [12], обзорной статье [1] и других работах освещены вопросы статики упругого тела.

При расчетах принимаем следующие основные допущения: за один период колебаний системы изменение внутреннего радиуса заполнителя (например, в результате выгорания) незначительно; заполнитель и оболочка между собой скреплены жестко; наружные поверхности сферической и бесконечно длинной цилиндрической оболочек свободны от опорных или иных усилий.

Вектор смещения s в упругом теле можно представить суммой векторов трех видов (см. § 3) s_L , s_M , s_N , которые выражаются через скалярные функции φ , ψ , χ . Последние должны быть решениями трех скалярных волновых уравнений (3.9). Частные их решения в форме стоячих волн в изотропной цилиндрической области имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi &= [A_1 J_n(\gamma_l r) + A_2 N_n(\gamma_l r)] \sin(\alpha x + \varepsilon) \cos n \theta e^{i\omega t}, \\ \psi &= [B_1 J_n(\gamma_l r) + B_2 N_n(\gamma_l r)] \sin(\alpha x + \varepsilon) \sin n \theta e^{i\omega t}, \\ \chi &= [C_1 J_n(\gamma_l r) + C_2 N_n(\gamma_l r)] \cos(\alpha x + \varepsilon) \cos n \theta e^{i\omega t},\end{aligned}\tag{22.1}$$

где A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 — постоянные; α , n , γ_l , γ_t — волновые числа продольных, окружных и радиальных волн сжатия и сдвига, причем

$$\begin{aligned}\gamma_l^2 &= \mu_l^2 - \alpha^2, \quad \gamma_t^2 = \mu_t^2 - \alpha^2, \quad \mu_l = \omega/a_l, \\ \mu_t &= \omega/a_t, \quad a_l^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_s, \quad a_t^2 = \mu/\rho_s,\end{aligned}$$

a_l, a_t — скорости распространения волн сжатия и сдвига; λ, μ, ρ_s — коэффициенты Ляме и плотность материала заполнителя.

Зная потенциалы φ, ψ, χ , находим проекции смещения на координатные направления x, r, θ по формулам (3.8) и (3.10)

$$\begin{aligned} s_x &= \left\{ \alpha [A_1 J_n(\gamma_l r) + A_2 N_n(\gamma_l r)] + \frac{\gamma_l^2}{\mu_l} [C_1 J_n(\gamma_l r) + C_2 N_n(\gamma_l r)] \right\} \times \\ &\quad \times \cos(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ s_r &= \left\{ \gamma_l [A_1 J'_n(\gamma_l r) + A_2 N'_n(\gamma_l r)] + \frac{n}{r} [B_1 J_n(\gamma_l r) + B_2 N_n(\gamma_l r)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \gamma_l}{\mu_l} [C_1 J'_n(\gamma_l r) + C_2 N'_n(\gamma_l r)] \right\} \sin(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ s_\theta &= -\frac{n}{r} \left\{ A_1 J_n(\gamma_l r) + A_2 N_n(\gamma_l r) + \frac{r \gamma_l}{n} [B_1 J'_n(\gamma_l r) + B_2 N'_n(\gamma_l r)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{\mu_l} [C_1 J_n(\gamma_l r) + C_2 N_n(\gamma_l r)] \right\} \sin(\alpha x + \varepsilon) \sin n\theta e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (22.2)$$

где штрих означает дифференцирование по $\gamma_l r$ или $\gamma_l r$.

Вектор напряжения на цилиндрической поверхности ($r = \text{const}$) выражается через вектор смещения формулой (3.6). Подставив в (3.6) выражения для divs и $\nabla s + s\nabla$ из (3.11), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r s_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu \frac{\partial s_r}{\partial r}, \\ \sigma_{rx} &= \mu \left(\frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned}$$

Используя выражения (22.2), найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{2\mu \gamma_l}{r} \left\{ A_1 x_2(\gamma_l r) + A_2 y_2(\gamma_l r) + \frac{\gamma_l}{\gamma_l} [B_1 x_1(\gamma_l r) + B_2 y_1(\gamma_l r)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha \gamma_l}{\mu_l \gamma_l} [C_1 J''_n(\gamma_l r) + C_2 N''_n(\gamma_l r)] \right\} \sin(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ \sigma_{rx} &= 2\mu \alpha \gamma_l \left\{ A_1 J'_n(\gamma_l r) + A_2 N'_n(\gamma_l r) + \frac{n}{2\gamma_l r} [B_1 J_n(\gamma_l r) + B_2 N_n(\gamma_l r)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \gamma_l}{\mu_l \gamma_l} \left(1 - \frac{\mu_l^2}{2x^2} \right) [C_1 J'_n(\gamma_l r) + C_2 N'_n(\gamma_l r)] \right\} \cos(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2\mu \gamma_l}{r} \left\{ A_1 x_1(\gamma_l r) + A_2 y_1(\gamma_l r) + \frac{\gamma_l}{\gamma_l} [B_1 x_3(\gamma_l r) + B_2 y_3(\gamma_l r)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \gamma_l}{\mu_l \gamma_l} [C_1 x_1(\gamma_l r) + C_2 y_1(\gamma_l r)] \right\} \sin(\alpha x + \varepsilon) \sin n\theta e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (22.3)$$

где

$$\begin{aligned} x_1(z) &= n \left[\frac{1}{z} J_n(z) - J'_n(z) \right], \\ x_2(z) &= J'_n(z) + z J_n(z) \left[1 + \frac{(\lambda/2\mu)(\mu_l r)^2 - n^2}{z^2} \right], \\ x_3(z) &= J'_n(z) + z J_n(z) \left(\frac{1}{2} - \frac{n^2}{z^2} \right). \end{aligned}$$

Через $y_1(z), y_2(z), y_3(z)$ обозначены функции, подобные $x_1(z), x_2(z), x_3(z)$, но содержащие вместо $J_n(z)$ функции Неймана $N_n(z)$.

Составляющие векторов напряжений σ_x и σ_θ на площадках $x = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, как это следует из (3.5), (3.7), равны

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rs_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu \frac{\partial s_x}{\partial x}, \\ \sigma_{xr} &= \sigma_{rx}, \quad \sigma_{x\theta} = \mu \left(\frac{\partial s_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_x}{\partial \theta} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rs_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu \left(\frac{s_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \sigma_{\theta x} &= \sigma_{x\theta}, \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta}.\end{aligned}$$

Приведем полные выражения для σ_{xx} , $\sigma_{x\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -2\mu\alpha^2 \left\{ \left(1 + \frac{\lambda\mu_l^2}{2\mu\alpha^2} \right) [A_1 J_n(\gamma_l r) + A_2 N_n(\gamma_l r)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_l^2}{\alpha\mu_l} [C_1 J_n(\gamma_l r) + C_2 N_n(\gamma_l r)] \right\} \sin(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ \sigma_{x\theta} &= -\frac{2\mu\alpha n}{r} \left\{ A_1 J_n(\gamma_l r) + A_2 N_n(\gamma_l r) + \frac{\gamma_l r}{2n} [B_1 J'_n(\gamma_l r) + B_2 N'_n(\gamma_l r)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{\mu_l} \left(1 - \frac{\mu_l^2}{2\alpha^2} \right) [C_1 J_n(\gamma_l r) + C_2 N_n(\gamma_l r)] \right\} \cos(\alpha x + \varepsilon) \sin n\theta e^{i\omega t}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\mu\gamma_l}{r} \left\{ A_1 \bar{x}_2(z) + A_2 \bar{y}_2(z) + \frac{\gamma_l}{\gamma_l} [B_1 x_1(z) + B_2 y_1(z)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha\gamma_l}{\mu_l\gamma_l} [C_1 \bar{x}_1(z) + C_2 \bar{y}_1(z)] \right\} \sin(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t}.\end{aligned}\quad (22.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(z) &= \frac{n^2}{z} J_n(z) - J'_n(z), \\ \bar{x}_2(z) &= J'_n(z) - z J_n(z) \left[\frac{(\lambda/2\mu)(\mu_l r)^2 + n^2}{z^2} \right].\end{aligned}$$

Выражения для $\bar{y}_1(z)$ и $\bar{y}_2(z)$ содержат функции Неймана.

Акустическое давление и радиальная скорость в газовой полости, конечные на оси, будут

$$\begin{aligned}p &= -\rho_0 i\omega A J_n(\gamma r) \sin(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ v_r &= A \gamma J'_n(\gamma r) \sin(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t},\end{aligned}\quad (22.5)$$

где A — постоянная, $\gamma = \sqrt{(\omega/a)^2 - \alpha^2}$, a — скорость распространения звука в газе. Штрих означает производную по γr .

В качестве уравнений, описывающих движение тонкой оболочки, возьмем систему трех уравнений моментной теории (5.1). Примем компоненты перемещения оболочки в виде

$$\begin{aligned}u &= U \cos(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ v &= V \sin(\alpha x + \varepsilon) \sin n\theta e^{i\omega t}, \\ w &= W \sin(\alpha x + \varepsilon) \cos n\theta e^{i\omega t}.\end{aligned}\quad (22.6)$$

Проекции распределенных по поверхности оболочки усилий на оси x , y , z будут

$$\begin{aligned}X &= -\sigma_{rx} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\sigma_{r\theta} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z = -\sigma_{rr} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ (r &= R).\end{aligned}\quad (22.7)$$

Здесь ρ , h — плотность и толщина стенок оболочки.

Выражения (22.7) являются условиями равенства напряжений на стыке оболочки и упругого заполнителя ($r = R$). Равенство векторов смещений дает остальные условия

$$s_x = u, s_\theta = v, s_r = w \quad (r = R). \quad (22.8)$$

На поверхности соприкосновения газа и заполнителя радиальные скорости перемещений и давления равны, а касательные напряжения отсутствуют

$$v_r = \partial s_r / \partial t, p = -\sigma_{rr}, \sigma_{rx} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad (r = R_1). \quad (22.9)$$

Десять условий (22.7), (22.8), (22.9) при использовании уравнений изгиба оболочки (5.1) и выражений (22.2), (22.3), (22.5), (22.6) дают систему однородных алгебраических уравнений относительно десяти величин $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, U, V, W, A$. Ее легко свести к системе девяти уравнений, исключив коэффициент A из первых двух равенств (22.9). В результате имеем

$$\begin{aligned} 1) & -\left(\beta^2 + \frac{1-v}{2}n^2 - K\omega^2\right)U + \frac{1+v}{2}\beta nV + v\beta W = \\ & = H\alpha \left\{ A_1 J'_n(\gamma_l R) + A_2 N'_n(\gamma_l R) + \frac{n}{2\gamma_l R} [B_1 J_n(\gamma_l R) + B_2 N_n(\gamma_l R)] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha\gamma_l}{\mu_l \gamma_l} \left(1 - \frac{\mu_l^2}{2\alpha^2}\right) [C_1 J'_n(\gamma_l R) + C_2 N'_n(\gamma_l R)] \right\}, \\ 2) & \frac{1+v}{2}\beta nU - \left(n^2 + \frac{1-v}{2}\beta^2 - K\omega^2\right)V - nW = \\ & = \frac{H}{R} \left\{ A_1 x_1(\gamma_l R) + A_2 y_1(\gamma_l R) + \frac{\gamma_l}{\gamma_l} [B_1 x_3(\gamma_l R) + B_2 y_3(\gamma_l R)] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha\gamma_l}{\mu_l \gamma_l} [C_1 x_1(\gamma_l R) + C_2 y_1(\gamma_l R)] \right\}, \\ 3) & -v\beta U + nV + [b^2(\beta^2 + n^2)^2 + 1 - K\omega^2]W = \\ & = \frac{H}{R} \left\{ A_1 x_2(\gamma_l R) + A_2 y_2(\gamma_l R) + \frac{\gamma_l}{\gamma_l} [B_1 x_1(\gamma_l R) + B_2 y_1(\gamma_l R)] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha\gamma_l}{\mu_l \gamma_l} [C_1 J''_n(\gamma_l R) + C_2 N''_n(\gamma_l R)] \right\}, \quad (22.10) \\ 4) & U = \alpha [A_1 J_n(\gamma_l R) + A_2 N_n(\gamma_l R)] + \frac{\gamma_l^2}{\mu_l} [C_1 J_n(\gamma_l R) + C_2 N_n(\gamma_l R)], \\ 5) & V = -\frac{n}{R} [A_1 J_n(\gamma_l R) + A_2 N_n(\gamma_l R)] - \gamma_l [B_1 J'_n(\gamma_l R) + B_2 N'_n(\gamma_l R)] + \\ & \quad + \frac{\alpha n}{\mu_l R} [C_1 J_n(\gamma_l R) + C_2 N_n(\gamma_l R)], \\ 6) & W = \gamma_l [A_1 J'_n(\gamma_l R) + A_2 N'_n(\gamma_l R)] + \frac{n}{R} [B_1 J_n(\gamma_l R) + B_2 N_n(\gamma_l R)] - \\ & \quad - \frac{\alpha\gamma_l}{\mu_l} [C_1 J'_n(\gamma_l R) + C_2 N'_n(\gamma_l R)], \\ 7) & A_1 x_4(\gamma_l R_1) + A_2 y_4(\gamma_l R_1) + B_1 x_5(\gamma_l R_1) + B_2 y_5(\gamma_l R_1) + C_1 x_6(\gamma_l R_1) + \\ & \quad + C_2 y_6(\gamma_l R_1) = 0, \\ 8) & A_1 J'_n(\gamma_l R_1) + A_2 N'_n(\gamma_l R_1) + \frac{n}{2\gamma_l R_1} [B_1 J_n(\gamma_l R_1) + B_2 N_n(\gamma_l R_1)] - \\ & \quad - \frac{\alpha\gamma_l}{\mu_l \gamma_l} \left(1 - \frac{\mu_l^2}{2\alpha^2}\right) [C_1 J'_n(\gamma_l R_1) + C_2 N'_n(\gamma_l R_1)] = 0, \\ 9) & A_1 x_1(\gamma_l R_1) + A_2 y_1(\gamma_l R_1) + \frac{\gamma_l}{\gamma_l} [B_1 x_3(\gamma_l R_1) + B_2 y_3(\gamma_l R_1)] - \\ & \quad - \frac{\alpha\gamma_l}{\mu_l \gamma_l} [C_1 x_1(\gamma_l R_1) + C_2 y_1(\gamma_l R_1)] = 0. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha R, \quad K = \frac{(1-v^2) R^2 \rho}{E}, \quad H = \frac{(1-v^2) R^2}{Eh} 2\mu\gamma_l, \\ x_4(z) &= x_2(z) - \frac{\omega^2 \rho_0 R_1^2}{2\mu} \Delta_n(\bar{z}) J'_n(z), \\ \Delta_n(\bar{z}) &= \frac{J_n(\bar{z})}{z J'_n(z)}, \quad \bar{z} = \gamma R_1, \\ x_5(z) &= \frac{\gamma_l}{\gamma_l} x_1(z) - \frac{\omega^2 \rho_0 R_1 n}{2\mu\gamma_l} \Delta_n(\bar{z}) J_n(z), \\ x_6(z) &= \frac{\alpha\gamma_l}{\mu_l \gamma_l} \left[J'_n(z) - \frac{\omega^2 \rho_0 R_1^2}{2\mu} \Delta_n(\bar{z}) J'_n(z) \right].\end{aligned}$$

Выражения для $y_4(z)$, $y_5(z)$, $y_6(z)$ получаются из $x_4(z)$, $x_5(z)$, $x_6(z)$ заменой в последних $J_n(z)$ функцией Неймана $N_n(z)$. Из системы (22.10) при заданных значениях волновых чисел α и n определяются частоты совместных колебаний.

Полагая оболочку бесконечно жесткой ($E = \infty$, $K = 0$, $H = 0$), приходим к системе шести уравнений, которые получены в [154]. В этом случае первые три уравнения (22.10) теряют смысл, а в трех последующих нужно положить $U = V = W = 0$.

Если принять $h = 0$, то (22.10) сведется к системе шести уравнений для определения частот колебаний цилиндра со свободной поверхностью. Левые части первых трех уравнений (22.10) обращаются в нули, последующие три — теряют силу.

Частотное уравнение осесимметричных форм колебаний получаем, положив $n = 0$. При этом $x_1(z) = y_1(z) = 0$, и система уравнений (22.10) разбивается на две группы. Одну — составляют второе, пятое и десятое уравнения, которые описывают крутильные колебания

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1-v}{2}\beta^2 - K\omega^2\right)V &= \frac{H\gamma_l}{R\gamma_l} [B_1 x_3(\gamma_l R) + B_2 y_3(\gamma_l R)], \\ V &= \gamma_l [B_1 J_1(\gamma_l R) + B_2 N_1(\gamma_l R)], \\ B_1 x_3(\gamma_l R_1) + B_2 y_3(\gamma_l R_1) &= 0, \quad \left[x_3(z) = -J_1(z) + \frac{z}{2} J_0(z)\right].\end{aligned}\tag{22.11}$$

Обратим внимание на то, что теперь остались функции только от аргумента $\gamma_l R$. Величина γ_l в первом уравнении сокращается, ибо содержится и в составе коэффициента H . Как следует из (22.11), газ не оказывает никакого влияния на крутильные колебания оболочки и заполнителя (газ не обладает такими формами колебаний). Остальные уравнения (22.10) образуют вторую группу, в которую входят постоянные A_1 , A_2 , C_1 , C_2 , U , W . Эта группа является характеристическим уравнением осесимметричных форм колебаний, не сопровождаемых кручением (оболочка подвергается изгибным деформациям в продольном направлении).

При $\alpha = 0$ [$\beta = 0$, $x_6(z) = y_6(z) = 0$] отделяются первое, четвертое и восьмое уравнения системы (22.10)

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1-v}{2}n^2 - K\omega^2\right)U &= \frac{H\mu_l^2}{2\mu_l} [C_1 J'_n(\mu_l R) + C_2 N'_n(\mu_l R)], \\ U &= \mu_l [C_1 J_n(\mu_l R) + C_2 N_n(\mu_l R)], \\ C_1 J'_n(\mu_l R_1) + C_2 N'_n(\mu_l R_1) &= 0.\end{aligned}\tag{22.12}$$

Здесь учтено, что $\gamma_l = \mu_l = \omega/a_l$. Это есть характеристическое уравнение

сдвиговых колебаний¹. В этом движении продольная полоса бесконечной длины перемещается по положительному направлению оси x , соседняя полоса — в противоположном направлении и т. д. Соответственно образуются n узловых диаметральных плоскостей (а также m узловых цилиндров бесконечной длины в теле заполнителя). При таких формах колебаний нет взаимодействия между упругим заполнителем и газом. Оставшаяся после выделения (22.12) система уравнений (22.10) относительно A_1, A_2, B_1, B_2, V, W служит для определения частот колебаний, сопровождаемых поперечно-радиальными деформациями (оболочка изгибается с образованием волн в окружном направлении). Последний случай весьма подробно исследован в статье [154], в частности, построены графики частот в зависимости от отношения R_1/R ; $n = 0, 1, 2, 3$.

Если теперь положить $\alpha = n = 0$, то из (22.11) найдутся частоты сдвиговых колебаний вращения заполнителя и оболочки вокруг оси x , а из (22.12) — частоты сдвиговых осесимметричных колебаний в продольном направлении. При этом третье, шестое и седьмое уравнения (22.10) определяют спектр частот чисто радиальных форм колебаний оболочки, заполнителя и газа (в оболочке и заполнителе имеют место только деформации растяжения — сжатия):

$$\begin{aligned} (1 - K\omega^2)W &= \frac{H}{R} [A_1 x_2(\mu_l R) + A_2 y_2(\mu_l R)], \\ W &= -\mu_l [A_1 J_1(\mu_l R) + A_2 N_2(\mu_l R)], \\ A_1 x_4(\mu_l R_1) + A_2 y_4(\mu_l R_1) &= 0, \end{aligned} \quad (22.13)$$

где

$$\begin{aligned} x_2(z) &= -J_1(z) + zJ_0(z) \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right), \quad \gamma_l = \mu_l = \omega/a_l, \\ x_4(z) &= x_2(z) + \frac{\omega^2 \rho R_1^2}{2\mu} \Delta_0(\bar{z}) J_1(z), \quad \Delta_0(\bar{z}) = -\frac{J_0(\bar{z})}{\bar{z} J_1(\bar{z})}. \end{aligned}$$

Когда заполнитель без отверстия, частотные уравнения соответственно упрощаются [163]. Например, из последнего уравнения (22.11) в силу неограниченного возрастания функции $y_3(z)$ при $z \rightarrow 0$ следует $B_2 = 0$. В системах (22.12) и (22.13) также остаются первые два уравнения, в которых коэффициенты $C_2 = 0$ и $A_2 = 0$.

Систему (22.13) рассмотрим более подробно. Частотное уравнение парциальных частот газа получаем, считая заполнитель абсолютно жестким ($\lambda = \mu = \infty$). Тогда $a_l = \infty$ и $\mu_l = \omega/a_l = 0$. Из второго уравнения (22.13) находим $W = 0$, а из первого — $A_2 = 0$. Поэтому $x_4(\mu_l R_1) = 0$ или $\Delta_0\left(\frac{\omega}{a} R_1\right) = \infty$, откуда следует известное частотное уравнение для осесимметричных форм колебаний газа:

$$J_1\left(\frac{\omega}{a} R_1\right) = 0. \quad (22.14)$$

Уравнение парциальных частот заполнителя и оболочки ($\rho_0 = 0$) примет вид

$$\frac{x_2\left(\frac{\omega}{a_l} R_1\right)}{y_2\left(\frac{\omega}{a_l} R_1\right)} = \frac{\Gamma x_2\left(\frac{\omega}{a_l} R\right) + J_1\left(\frac{\omega}{a_l} R\right)}{\Gamma y_2\left(\frac{\omega}{a_l} R\right) + N_1\left(\frac{\omega}{a_l} R\right)}, \quad (22.15)$$

где

$$\Gamma = \frac{2\mu}{\rho h R (\Omega^2 - \omega^2)}, \quad \Omega^2 = \frac{E}{(1 - \nu^2) R^2 \rho}.$$

¹ Колебания двух концентрических цилиндров по указанной форме исследованы в работе [124].

Для иллюстрации влияния упругой оболочки на частоты совместных колебаний заполнителя и оболочки построены графики (рис. 40). Были приняты следующие числовые данные:

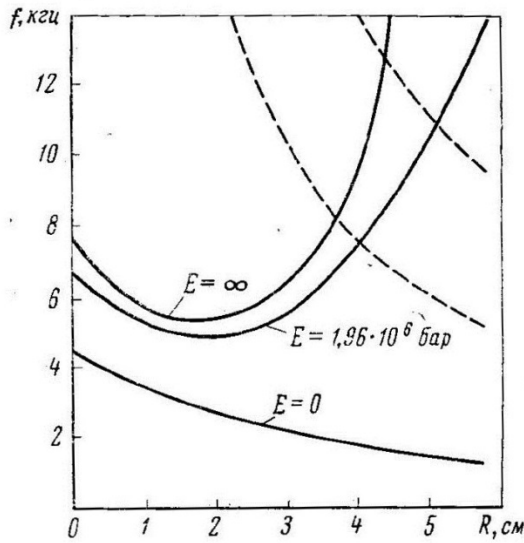


Рис. 40

$R = 5,75$ см, $\mu = 1,92 \cdot 10^2$ бар, $\rho_s = 0,2$ г/см³, $a_t = 3,1 \cdot 10^4$ см/сек, $a_l = 7 \cdot 10^4$ см/сек², $\rho_0 = 0,01$ г/см³, $a = 5 \cdot 10^4$ см/сек, $E = 1,96 \cdot 10^6$ бар, $h = 0,04$ см, $\rho = 7,8$ г/см³. Собственные частоты заполнителя с жестким корпусом ($E = \infty$) и без корпуса ($h = 0$) образуют «вилку», внутри которой располагаются частоты совместных колебаний заполнителя и упругой оболочки. Когда $E = \infty$ ($\Gamma = 0$) и $h = 0$ ($\Gamma = \infty$) из уравнения (22.15) получим

$$x_2 \left(\frac{\omega}{a_l} R_1 \right) N_1 \left(\frac{\omega}{a_l} R \right) = y_2 \left(\frac{\omega}{a_l} R_1 \right) J_1 \left(\frac{\omega}{a_l} R \right), \quad (22.16)$$

$$x_2 \left(\frac{\omega}{a_l} R_1 \right) y_2 \left(\frac{\omega}{a_l} R \right) = y_2 \left(\frac{\omega}{a_l} R_1 \right) x_2 \left(\frac{\omega}{a_l} R \right). \quad (22.17)$$

На рис. 40 приведены лишь первые корни уравнений (22.16) и (22.17), причем значения частот отложены в килогерцах, т. е. $f = 1000 \frac{\omega}{2\pi}$ гц. Штриховыми линиями нанесены парциальные частоты газа (22.14).

Вынужденные колебания.

Вязко-упругий заполнитель

Вынужденные колебания заполнителя и оболочки конечной длины под действием внутреннего давления газа p заданной частоты ω будем рассматривать по ранее описанной расчетной схеме. Задача заключается в определении напряжений в заполнителе и оболочке.

Пусть давление газа на поверхности $r = R_1$ представимо в виде суммы

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{kn} \sin \alpha_k x \cos n\theta e^{i\omega t}, \quad (22.18)$$

где P_{kn} — амплитуды; $\alpha_k = k\pi/L$; L — длина цилиндра. Предполагаем, что на торцевых поверхностях заполнителя отсутствуют нормальные напряжения и тангенциальные перемещения, т. е.

$$\sigma_{xx} = 0, s_r = s_\theta = 0 \quad (x = 0, L). \quad (22.19)$$

Граничными условиями для оболочки будут

$$v = w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0, \partial u / \partial x = 0 \quad (x = 0, L). \quad (22.20)$$

Прежние условия (22.7) — (22.9), кроме первого соотношения (22.9), остаются в силе.

Заполнители обычно изготавливаются из материалов с ярко выраженными вязко-упругими свойствами. Для их учета удобно пользоваться комплексной теорией внутреннего трения [107], [117], [148]. Согласно этой теории вводятся комплексные коэффициенты Ляме

$$\lambda_* = \left(1 + \frac{i}{\pi} \delta_1 \right) \lambda, \quad \mu_* = \left(1 + \frac{i}{\pi} \delta_2 \right) \mu, \quad (22.21)$$

где λ , μ — константы упругой среды, δ_1 , δ_2 — логарифмические декременты (удельные затухания), определяемые экспериментально. Коэффициенты δ_1 и δ_2 в общем случае зависят от амплитуды напряжений и частоты. Однако зависимость от напряжений здесь не учитывается. Заметим, что для некоторых материалов значение удельного затухания по частоте постоянно в широком диапазоне. В дальнейшем для простоты записи звездочки у λ_* и μ_* опускаются, однако подразумевается, что величины λ и μ комплексные. Выражения для смещений и напряжений в заполнителе и оболочке получаются комплексными. Действительные напряжения определяются вещественной частью, например,

$$\operatorname{Re}[(\sigma'_{rr} + i\sigma''_{rr})e^{i\omega t}] = \sigma'_{rr} \cos \omega t - \sigma''_{rr} \sin \omega t$$

или

$$\sqrt{\sigma'^2_{rr} + \sigma''^2_{rr}} (\cos \omega t + \psi).$$

Если в (22.2), (22.4) и (22.6) принять $\alpha = \alpha_k = k\pi/L$, $\varepsilon = 0$, то условия (22.19) и (22.20) будут выполнены.

Выражения для компонент перемещения (22.2), (22.6) и напряжений (22.3), (22.4), записываем в виде сумм по k и n

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{kn} \sin \alpha_k x \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ s_x &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha_k [A_{1kn} J_n(\gamma_{lk} r) + A_{2kn} N_n(\gamma_{lk} r)] + \right. \\ &+ \frac{\gamma_{lk}^2}{\mu_{lk}} [C_{1kn} J_n(\gamma_{lk} r) + C_{2kn} N_n(\gamma_{lk} r)] \left. \right\} \cos \alpha_k x \cos n\theta e^{i\omega t} \text{ и т. д.,} \\ \gamma_{lk}^2 &= \mu_l^2 - \alpha_k^2, \quad \gamma_{tk}^2 = \mu_t^2 - \alpha_k^2. \end{aligned}$$

Уравнения (22.10), кроме седьмого, будут справедливы и теперь. Вместо седьмого, объединяющего в себе два первых условия (22.9), имеем уравнение, соответствующее только равенству радиальных давлений (для kn -й моды)

$$\begin{aligned} -P_{kn} &= \frac{2\mu\gamma_{lk}}{R_1} \{A_{1kn} x_2(\gamma_{lk} R_1) + A_{2kn} y_2(\gamma_{lk} R_1) + \\ &+ \frac{\gamma_{lk}}{\gamma_{lk}} [B_{1kn} x_1(\gamma_{lk} R_1) + B_{2kn} y_1(\gamma_{lk} R_1)] + \\ &+ \frac{\alpha_k \gamma_{lk}}{\mu_{lk} \gamma_{lk}} [C_{1kn} J''_n(\gamma_{lk} R_1) + C_{2kn} N''_n(\gamma_{lk} R_1)] \}. \end{aligned} \quad (22.22)$$

Из уравнений (22.10) (кроме седьмого) и (22.22) по известным значениям P_{kn} и ω находятся A_{1kn} , A_{2kn} , B_{1kn} , B_{2kn} , C_{1kn} , C_{2kn} , U_{kn} , V_{kn} , W_{kn} , по которым определяются напряжения (в оболочке — по известным формулам [112], а в заполнителе — по (22.3), (22.4)). Коэффициенты A_{1kn} , ... могут быть вычислены методом Крамера по числовым значениям элементов определителя девятого порядка. Полагая в системе (22.10) и (22.22) $P_{kn} = 0$, получаем характеристическое уравнение для заполнителя и оболочки.

В случае, когда нагрузка (22.18) осесимметричная ($n = 0$), из системы (22.10) выделяется группа уравнений (22.12). Этот результат понятен: при действии радиальных нагрузок крутильные формы колебаний не поддерживаются. Оставшиеся уравнения описывают осесимметричные вынужденные колебания системы. Если в третьем уравнении (22.10) отбросить моментный член $b^2 \beta_k^4 W_{kn}$, то приходим к рассмотренному в работе [148] случаю.

В указанной работе при некоторых комбинациях параметров вычислялось кольцевое напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ на внутренней поверхности заполнителя ($r = R_1$)

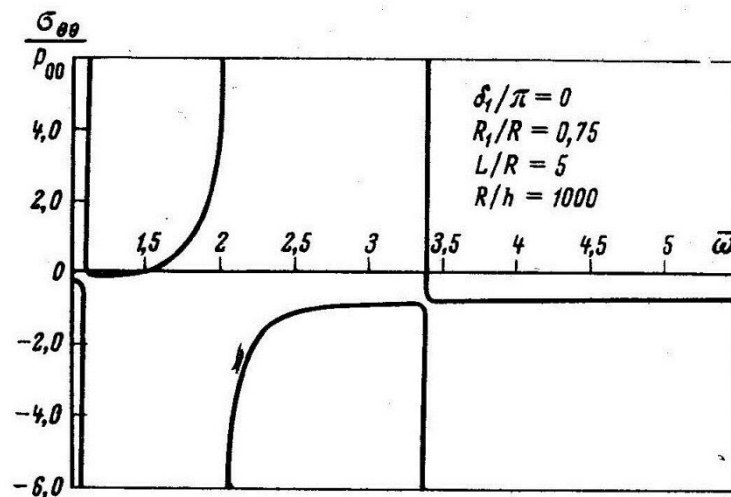


Рис. 41

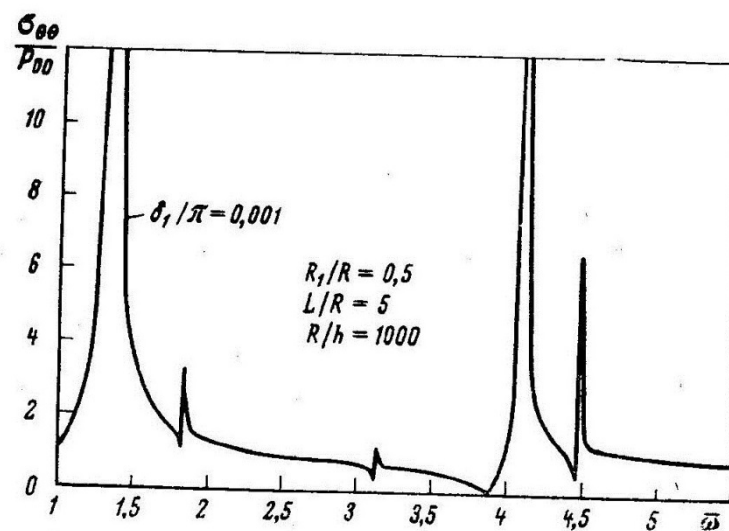


Рис. 42

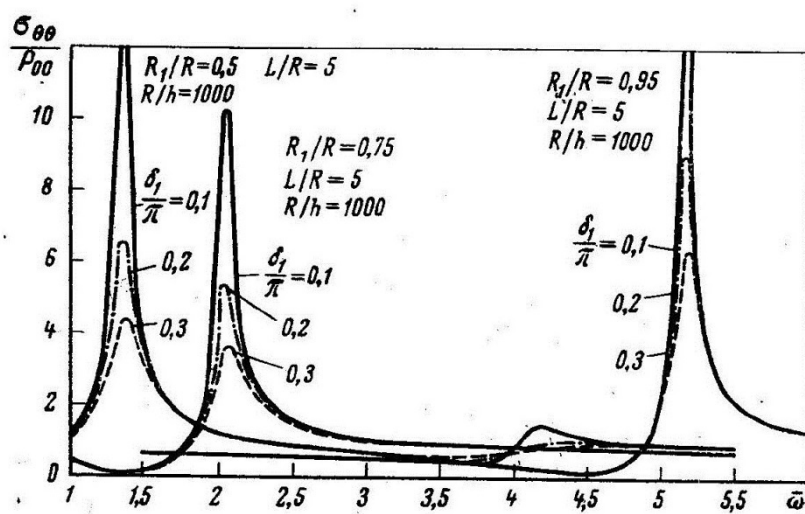


Рис. 43

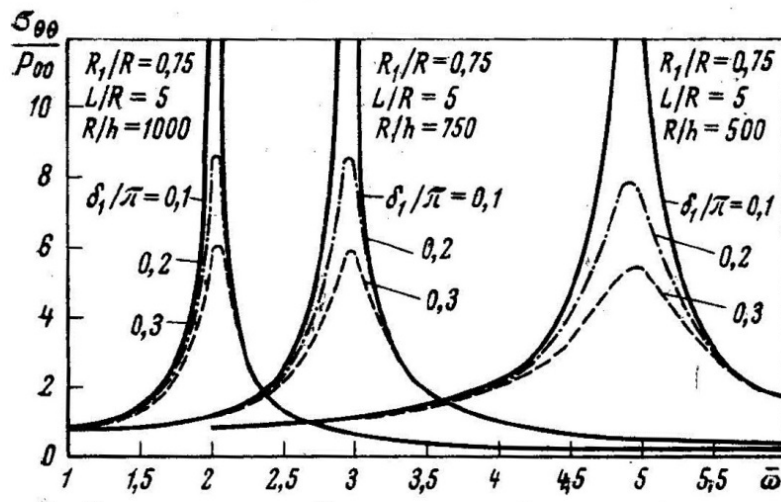


Рис. 44

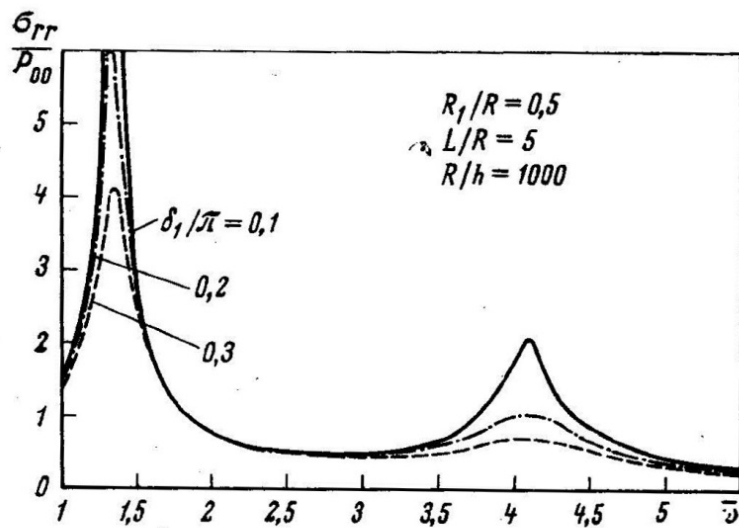


Рис. 45

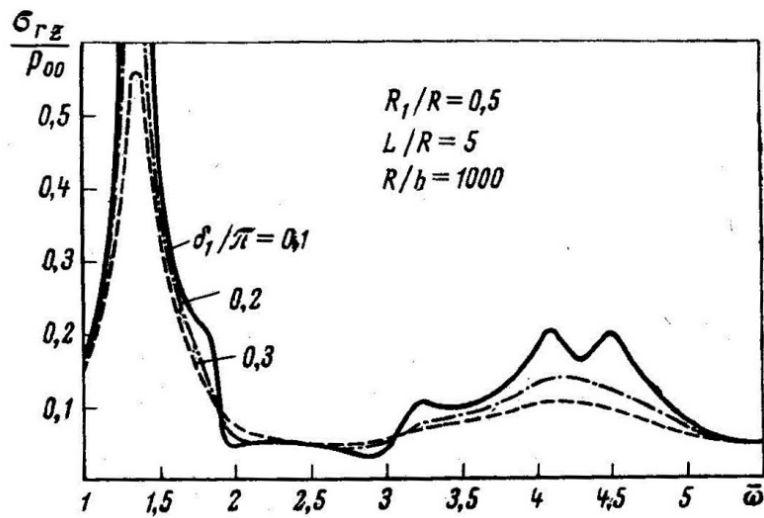


Рис. 46

и на поверхности контакта с оболочкой (для среднего сечения $x = L/2$). При $r = R$ для одной комбинации параметров были также вычислены величины σ_{rr} , σ_{rx} и s_r . В расчетах приняты следующие данные: $L/R = 5,0$, $G/G_s = 10^4$ (G_s — модуль сдвига заполнителя), $\nu = 0,3$, $\nu_s = 0,4$, $\rho/\rho_s = 0,5$. Графики построены по безразмерной частоте $\bar{\omega} = \frac{10^5}{2\pi} \mu_1 h = \frac{10^5}{2\pi} \frac{\omega h}{a_1}$ для $k = 1$, т. е. первой бочкообразной формы колебаний.

Следует отметить, что в диапазоне $\bar{\omega}$ от 1 до 6 имеется меньше корней частотного уравнения парциальной частоты заполнителя, чем собственных частот составной конструкции из заполнителя и оболочки. Для принятых параметров первая собственная частота квазимоды оболочки находится за пределами рассматриваемого диапазона. В результате взаимодействия заполнителя и оболочки в указанный диапазон попадают дополнительные резонансы.

На рис. 41 видно это различие в количестве собственных частот (точками указаны собственные частоты заполнителя). Рис. 42 показывает влияние малого затухания ($\delta_1/\pi = \delta_2/\pi = 0,001$) на кольцевое напряжение на внутренней поверхности ($r = R_1$), а рис. 43 и 44 — большего затухания ($\delta_1/\pi = 0,1; 0,2; 0,3$) и изменения геометрических параметров. Как видим, некоторые резонансные пики полностью исчезают уже при значении коэффициента $\delta_1/\pi = 0,1$. Для больших значений затухания в указанном диапазоне все-таки остается один преобладающий пик, соответствующий первой резонансной частоте бочкообразной формы колебаний. При отношении $R_1/R \rightarrow 1$ преобладающие резонансы смещаются к значениям первого резонанса оболочки.

На рис. 45 и 46 приведены графики радиальных (при $x = L/2$) и касательных (при $x = L$) напряжений на поверхности контакта с оболочкой, показывающие, что касательное напряжение по амплитуде гораздо меньше, чем кольцевое или радиальное. Следует отметить, что при $\delta_1/\pi = 0,1$ все еще остаются пики касательных напряжений, в то время как для других напряжений большинство из них уже исчезло.

Увеличение отношения R_1/R , соответствующее различным стадиям выгорания заполнителя, дает рост амплитуд напряжений. Следовательно, в конструкции наиболее тяжелое напряженное состояние должно возникать на поздних стадиях, когда заполнитель почти полностью выгорел.

В статье [148] указывается, что экспериментально измеренные значения коэффициента затухания для заполнителей составляют $\delta_1/\pi = 0,35$. Поэтому любой динамический анализ системы, выполненный без учета вязкоупругих свойств заполнителя, не дает правильной картины.

§ 23. Сферическая система

Собственные колебания [43]

Рассмотрим теперь собственные колебания системы «замкнутая сферическая оболочка — концентрический упругий заполнитель — газовая полость» (рис. 47). По-прежнему считаем, что заполнитель и оболочка между собой скреплены жестко.

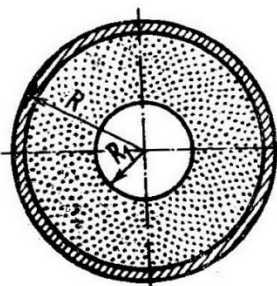


Рис. 47

Величина статического давления в полости p_0 определяется балансом образования и истечения газов во внешнюю среду. Для этого, очевидно, должен быть отводящий канал. Расчет сферы с каналом весьма сложен, однако, если отверстие достаточно мало по сравнению с размерами сферы, то, как известно из теории резонаторов [111], его влиянием на собственные частоты колебаний можно пренебречь. Мы будем считать это условие выполненным и ограничимся рассмотрением приведенной модели.

Прежде всего определим перемещения и напряжения в сплошном теле. Группируя в (3.12) коэффициенты при одинаковых единичных векторах для всех типов волн, получим проекции смещения на оси координат r, β, θ (см. рис. 3)

$$\begin{aligned} s_r &= \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{\mu_t} \left(\mu_l^2 r \chi + \frac{\partial^2 (r \chi)}{\partial r^2} \right), \\ s_\beta &= \frac{1}{\mu_l r} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu_l r} \frac{\partial^2 (r \chi)}{\partial r \partial \beta}, \\ s_\theta &= \frac{1}{\mu_l r \sin \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \frac{1}{\mu_l r \sin \beta} \frac{\partial^2 (r \chi)}{\partial r \partial \theta}, \end{aligned} \quad (23.1)$$

где $\mu_l = \omega/a_l$, $\mu_t = \omega/a_t$.

Функции Φ, Ψ, χ являются решениями скалярных волновых уравнений

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{a_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \Psi - \frac{1}{a_t^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \chi - \frac{1}{a_t^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0,$$

где ∇^2 — оператор Лапласа в сферической системе координат. Как известно из § 18, решениями их являются

$$\begin{aligned} \Phi &= [A_1 j_n(\mu_l r) + A_2 n_n(\mu_l r)] Y^c(\beta, \theta), \\ \Psi &= [B_1 j_n(\mu_l r) + B_2 n_n(\mu_l r)] Y^c(\beta, \theta), \\ \chi &= [C_1 j_n(\mu_l r) + C_2 n_n(\mu_l r)] Y^c(\beta, \theta) \end{aligned} \quad (23.2)$$

Здесь $j_n(z)$ и $n_n(z)$ — сферические функции Бесселя и Неймана порядка n , причем $n = 0, 1, 2, \dots$, $Y^c = \cos k \theta P_n^k(\cos \beta)$, $P_n^k(\cos \beta)$ — присоединенная функция Лежандра порядка n , k — число узловых меридианных плоскостей.

Вводя (23.2) в (23.1), получаем выражения для проекций перемещения

$$\begin{aligned} s_r &= a_0 Y^c, \\ s_\beta &= a_1 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - a_2 \frac{k}{\sin \beta} Y^s, \\ s_\theta &= -a_2 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - a_1 \frac{k}{\sin \beta} Y^s. \end{aligned} \quad (23.3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$a_0 = \frac{1}{\mu_l} \left\{ A_1 \frac{\partial}{\partial r} [j_n(\mu_l r)] + A_2 \frac{\partial}{\partial r} [n_n(\mu_l r)] \right\} + \frac{\lambda_n}{\mu_l r} [C_1 j_n(\mu_l r) + C_2 n_n(\mu_l r)], \quad (23.4)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\mu_l r} [A_1 j_n(\mu_l r) + A_2 n_n(\mu_l r)] + \\ &+ \frac{1}{\mu_l r} \left\{ C_1 \frac{\partial}{\partial r} [r j_n(\mu_l r)] + C_2 \frac{\partial}{\partial r} [r n_n(\mu_l r)] \right\}, \end{aligned}$$

$$a_2 = B_1 j_n(\mu_l r) + B_2 n_n(\mu_l r),$$

$$Y^s = \sin k \theta P_n^k(\cos \beta), \quad \lambda_n = n(n+1).$$

Согласно формулам (3.5) и (3.13) составляющие вектора напряжения на сферической поверхности ($r = c$) равны

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{s} + 2\mu \frac{\partial s_r}{\partial r}, \\ \sigma_{r\beta} &= \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \beta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\beta}{r} \right) \right], \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left[\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\theta}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Учитывая (23.3), выражения (23.5) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= b_0 Y^c, \\ \sigma_{r\beta} &= b_1 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - b_2 \frac{k}{\sin \beta} Y^s, \\ \sigma_{r\theta} &= -b_2 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - b_1 \frac{k}{\sin \beta} Y^s,\end{aligned}\quad (23.6)$$

где

$$\begin{aligned}b_0 &= \lambda \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_0) - \lambda_n \frac{a_1}{r} \right] + 2\mu \frac{\partial a_0}{\partial r}, \\ b_1 &= \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_1}{r} \right) + \frac{a_0}{r} \right], \quad b_2 = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_2}{r} \right).\end{aligned}\quad (23.7)$$

Звуковое давление и радиальная скорость в газовой полости, конечные в центре, определяются функциями

$$\begin{aligned}p &= -\rho_0 i \omega A j_n(\mu r) Y^c(\beta, \theta) e^{i\omega t}, \\ v_r &= A \mu j'_n(\mu r) Y^c(\beta, \theta) e^{i\omega t} \left(\mu = \frac{\omega}{a} \right),\end{aligned}\quad (23.8)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по μr .

Наконец, для описания движения тонкого корпуса можно воспользоваться уравнениями изгиба сферической оболочки (5.11), записанными относительно компонент перемещения.

Граничные условия аналогичны принятым в предыдущем параграфе. На стыке заполнителя и оболочки ставятся условия равенства компонент перемещения

$$s_\beta = u, \quad s_\theta = v, \quad s_r = w \quad (r = R) \quad (23.9)$$

и равенства давлений

$$\begin{aligned}X &= -\sigma_{r\beta} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\sigma_{r\theta} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ Z &= -\sigma_{rr} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (r = R).\end{aligned}\quad (23.10)$$

На внутренней поверхности заполнителя соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений, а также отсутствие тангенциальных напряжений

$$v_r = \partial s_r / \partial t, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\beta} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad (r = R_1). \quad (23.11)$$

Условия (23.9), (23.10), (23.11) дают систему десяти уравнений относительно десяти неизвестных $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, U, V, W, A$. Условия (23.9) будут выполнены, если принять u, v, w в виде

$$\begin{aligned}u &= a_1(R) \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - a_2(R) \frac{k}{\sin \beta} Y^s, \\ v &= -a_2(R) \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - a_1(R) \frac{k}{\sin \beta} Y^s, \\ w &= a_0(R) Y^c.\end{aligned}\quad (23.12)$$

Соотношения (23.10), очевидно, нужно рассматривать совместно с уравнениями для оболочки (5.11) и выражениями для напряжений (23.6). Взаимно складывая и вычитая первые два уравнения (5.11), будем иметь

$$\begin{aligned}- (\lambda_n - 1 + \nu - K\omega^2) a_1(R) + [b^2(\lambda_n - 2) + 1 + \nu] a_0(R) &= \frac{K}{\rho h} b_1(R), \\ - \left[\frac{1}{2}(\lambda_n - 2)(1 - \nu) - K\omega^2 \right] a_2(R) &= \frac{K}{\rho h} b_2(R),\end{aligned}\quad (23.13)$$

$$\lambda_n [b^2 (\lambda_n - 1 + \nu) + 1 + \nu] a_1(R) - \\ - [b^2 (\lambda_n - 1 + \nu) \lambda_n + 2(1 + \nu) - K\omega^2] a_0(R) = \frac{K}{\rho h} b_0(R),$$

где $K = (1 - \nu^2) \rho R^2 / E$.

Из условий (23.11) с учетом выражений (23.3), (23.5), (23.8) получаем

$$b_1(R_1) = 0, \quad b_2(R_1) = 0, \quad (23.14)$$

$$b_0(R_1) + \rho_0 R_1 \omega^2 \Delta_n(R_1) a_0(R_1) = 0, \quad \Delta_n(R_1) = \left[n - \mu R_1 \frac{j_{n+1}(\mu R_1)}{j_n(\mu R_1)} \right]^{-1}.$$

Система однородных алгебраических уравнений (23.13) и (23.14) дает ответ на поставленную задачу: из них можно найти спектр собственных значений ω , которые обращают в нуль определитель указанной системы уравнений.

Можно выделить два типа колебаний (a_2) и (a_0, a_1). Первый из них характеризуется деформациями оболочки и заполнителя без радиальных перемещений. При $k = 0$ их можно назвать крутильными колебаниями (вокруг оси z). В этом движении газ участия не принимает. Колебания описываются вторыми уравнениями в каждой из систем (23.13), (23.14), которые легко преобразуются к виду

$$\frac{\rho h}{K \mu R} \left[\frac{1}{2} (\lambda_n - 2) (1 - \nu) - K\omega^2 \right] a_2(R) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_2}{r} \right) \Big|_{r=R}, \quad (23.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_2}{r} \right) \Big|_{r=R_1} = 0 \quad (n \neq 0).$$

Полагая здесь $\mu_l = 0$, получаем собственные частоты оболочки

$$\omega_n^2 = \Omega_n^2 = \frac{(\lambda_n - 2) (1 - \nu)}{2K}.$$

Значение $n = 1$ соответствует движению оболочки как жесткого тела. При этом, очевидно, $\Omega_1 = 0$. При $n = 2$ северное и южное полушария колеблются в противофазе, а частота Ω_2 — минимальна. Экватор является узловой линией.

Если оболочку считать абсолютно жесткой ($E \rightarrow \infty, K = 0$), то собственные частоты упругого заполнителя определяются из уравнений

$$a_2(R) = 0, \quad R_1 \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - a_2(R_1) = 0. \quad (23.16)$$

Подставляя сюда значения a_2 из (23.4) и исключая коэффициенты B_1, B_2 , получаем следующее частотное уравнение:

$$\frac{j_n(\mu_t R)}{n_n(\mu_t R)} = \frac{(n-1) j_n(\mu_t R_1) - \mu_t R_1 j_{n+1}(\mu_t R_1)}{(n-1) n_n(\mu_t R_1) - \mu_t R_1 n_{n+1}(\mu_t R_1)}.$$

В случае сплошного шара ($R_1 = 0$), поверхность которого жестко скреплена, останется лишь первое уравнение (23.16), что дает

$$j_n(\mu_t R) = 0.$$

Несколько первых корней его следующие:

$$\mu_t R = 1,43\pi; \quad 2,46\pi; \quad 3,47\pi \quad \text{при } n = 1,$$

$$\mu_t R = 1,83\pi; \quad 2,89\pi; \quad 3,92\pi \quad \text{при } n = 2.$$

В отсутствии оболочки ($n = 0$) уравнения (23.15) приводятся к виду

$$R \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} \Big|_{r=R} - a_2(R) = 0,$$

$$R_1 \frac{\partial a_2(r)}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - a_2(R_1) = 0,$$

или после исключения коэффициентов B_1 и B_2

$$\frac{(n-1)j_n(\mu_l R) - \mu_l R j_{n+1}(\mu_l R)}{(n-1)n_n(\mu_l R) - \mu_l R n_{n+1}(\mu_l R)} = \frac{(n-1)j_n(\mu_l R_1) - \mu_l R_1 j_{n+1}(\mu_l R_1)}{(n-1)n_n(\mu_l R_1) - \mu_l R_1 n_{n+1}(\mu_l R_1)}.$$

Частотное уравнение для сплошного шара ($R_1 = 0$) со свободной поверхностью

$$(n-1)j_n(\mu_l R) - \mu_l R j_{n+1}(\mu_l R) = 0$$

рассмотрено в работе [80]

Второй тип колебаний характеризуется перемещениями без компонент вращения. Соответствующие уравнения для определения частот следующие:

$$-[(\lambda_n - 1 + \nu) - K\omega^2]a_1(R) + [b^2(\lambda_n - 2) + 1 + \nu]a_0(R) = \frac{K}{\rho h}b_1(R),$$

$$\lambda[b^2(\lambda_n - 1 + \nu) + 1 + \nu]a_1(R) -$$

$$-[b^2(\lambda_n - 1 + \nu)\lambda_n + 2(1 + \nu) - K\omega^2]a_0(R) = \frac{K}{\rho h}b_0(R), \quad (23.17)$$

$$b_1(R_1) = 0, \quad b_0(R_1) + \rho_0 R_1 \omega^2 \Delta_n(R_1)a_0(R_1) = 0.$$

Значения $k = n = 0$ соответствуют чисто радиальным колебаниям сферы. При $k = 0, n = 1$ происходит движение системы как жесткого тела. Случаю $k = 0, n = 2$ соответствует изменение формы из вытянутого сфероида в сплюснутый и т. д.

Положив в (23.17) $\lambda = \mu = 0, \rho_s = 0$ или $R_1 = R, \rho_0 = 0$, придем к уравнению (18.9) для определения собственных частот оболочки в вакууме. Отметим, что в уравнении (18.9) учтено влияние статического перепада давлений p_0 .

Для колебаний газа и заполнителя в абсолютно жесткой оболочке имеем

$$a_1(R) = 0, \quad a_0(R) = 0,$$

$$b_1(R_1) = 0, \quad b_0(R_1) + \rho_0 R_1 \omega^2 \Delta_n(R_1)a_0(R_1) = 0.$$

При $k = n = 0$ остаются второе и четвертое уравнения¹, которые после исключения неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 приводятся к виду

$$\frac{[j_0(\mu_l R_1) - \xi j_2(\mu_l R_1)]n_1(\mu_l R) - [n_0(\mu_l R_1) - \xi n_2(\mu_l R_1)]j_1(\mu_l R)}{j_1(\mu_l R)n_1(\mu_l R_1) - n_1(\mu_l R)j_1(\mu_l R_1)} =$$

$$= -\frac{\rho_0 a}{\rho_s a_l} \frac{j_0(\mu_l R_1)}{j_1(\mu_l R_1)}, \quad (23.18)$$

где $\xi = 4\mu/(3\lambda + 2\mu)$.

Парциальные частоты газа ($\rho_s a_l \rightarrow \infty$) определяются из

$$j_1(\mu_l R_1) = 0, \quad (23.19)$$

а парциальные частоты заполнителя ($\rho_0 a = 0$) из²

$$\frac{j_0(\mu_l R_1) - \xi j_2(\mu_l R_1)}{n_0(\mu_l R_1) - \xi n_2(\mu_l R_1)} = \frac{j_1(\mu_l R)}{n_1(\mu_l R)}. \quad (23.20)$$

¹ Уравнения $a_1(R) = 0$ и $b_1(R_1) = 0$ не рассматриваем, так как они изображают поперечные волны, возникающие при $n > 0$.

В реальных условиях отношение $\rho_s a_l / \rho_0 a$ велико, поэтому корни (23.18) близки к корням (23.19) и (23.20). Соответственно частоты заполнитель — газ довольно близки к парциальным частотам.

Рассмотрим конкретный числовой пример: $R = 0,1$ м, $a = 10^3$ м/сек, $a_l = 0,7 \cdot 10^3$ м/сек, $\zeta = 0,354$, $\rho_0 = 10$ кг/м³. На рис. 48 приводится график частот $f = \omega/2\pi$ первых двух мод колебаний, вычисленных по (23.19) и (23.20) (пунктирные линии) и по (23.18) (сплошные линии) в зависимости от переменного радиуса R_1 .

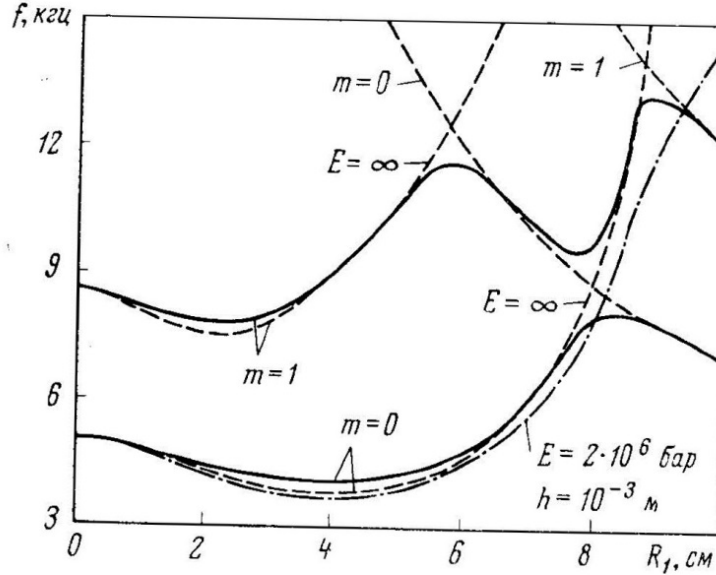


Рис. 48

Парциальные частоты заполнителя и упругой оболочки ($\rho_0 = 0$) в случае $n = 0$ находятся из уравнений

$$[K\omega^2 - 2(1 + \nu)] a_0(R) = \frac{K}{\rho h} b_0(R), \quad b_0(R_1) = 0$$

или

$$\frac{j_0(\mu_l R) - \zeta j_2(\mu_l R) - D j_1(\mu_l R)}{n_0(\mu_l R) - \zeta n_2(\mu_l R) - D n_1(\mu_l R)} = \frac{j_0(\mu_l R_1) - \zeta j_2(\mu_l R_1)}{n_0(\mu_l R_1) - \zeta n_2(\mu_l R_1)} \quad (23.21)$$

Здесь обозначено

$$D = \frac{3}{(3\lambda + 2\mu)\mu_l} [K\omega^2 - 2(1 + \nu)].$$

Пример рассмотрен при данных, приведенных выше, и $E = 2 \cdot 10^6$ бар, $h = 10^{-3}$ м, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. На рис. 48 приводится первая частота совместных колебаний заполнителя и оболочки в зависимости от R_1 (штрих-пунктирная линия). Как видим, за исключением того случая, когда $R_1 \rightarrow R$, эта частота близка к парциальной частоте заполнителя (23.20). При $R_1 = R$ получается собственная частота оболочки $\Omega^2 = 2E/\rho R^2 (1 - \nu)$. На рис. 49 приведен график зависимости частот $f = \omega/2\pi$, построенный по формуле (23.20) при следующих данных: $\zeta = 0,61$, $a_l = 50$ м/сек (левая шкала) и $\zeta = 0,35$, $a_l = 7 \cdot 10^2$ м/сек (правая шкала).

Собственные частоты kn -й моды газа и заполнителя без оболочки определяются из уравнений

$$b_0(R) = 0, \quad b_1(R) = 0,$$

$$b_0(R_1) = 0, \quad b_1(R_1) = 0,$$

вытекающих из системы (23.17) при $h = 0$ и $\rho_0 = 0$. Для случая $k = n = 0$ они дают

$$\frac{j_0(\mu_l R_1) - \xi j_2(\mu_l R_1)}{n_0(\mu_l R_1) - \xi n_2(\mu_l R_1)} = \frac{j_0(\mu_l R) - \xi j_2(\mu_l R)}{n_0(\mu_l R) - \xi n_2(\mu_l R)}.$$

Аналогичное уравнение рассмотрено в работе [171].

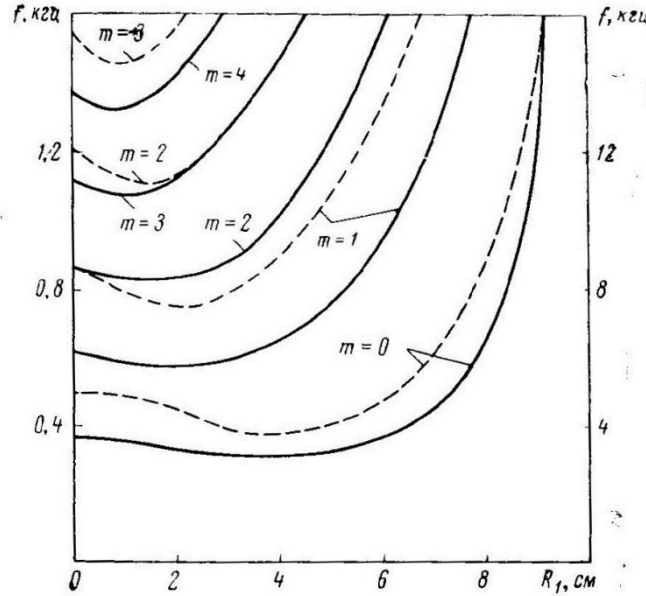


Рис. 49

Учет радиального потока газа [43]

Выше предполагалось, что среднее течение газа отсутствует. Теперь учтем влияние дозвукового среднего (по времени) безвихревого течения, направленного по внутренней нормали к поверхности $r = R_1$, на собственные колебания системы. Обозначим через V скорость радиального течения, а через V_0 — значение ее при $r = R_1$, которое будем считать заданным. Скорость V по радиусу изменяется согласно уравнению (2.8). Так как $\nabla \phi_0 = a_0 V$ и $\nabla \phi = 0$, то, переходя к сферической системе координат, из (2.8) и (2.9) найдем

$$\begin{aligned} a_0^2 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (rV) - V^2 \frac{dV}{dr} &= 0, \\ a_0^2 &= a_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2} V^2, \end{aligned} \quad (23.22)$$

где a_1 — скорость звука в заторможенном потоке ($V = 0$). Подставляя в (2.8) соотношения

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial r} = V(r) + \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \phi_*}{\partial \beta} = \frac{\partial \phi}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \phi_*}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

и линеаризуя, получим уравнение для потенциала возмущений

$$a_0^2 \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left(V^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{(\kappa - 1)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - V \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0. \quad (23.23)$$

Решение уравнения (23.23) разыскиваем в виде

$$\phi = \Gamma(r) Y^c(\beta, \theta) e^{i\omega t}.$$

Тогда с учетом первого соотношения (23.22) для функции $\Gamma(r)$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Gamma}{dr} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{d}{dr} \left(V \frac{d\Gamma}{dr} \right) + \frac{2i\omega V}{a_0^2} \frac{d\Gamma}{dr} + \\ + \left(\frac{\omega^2}{a_0^2} - \frac{\lambda_n}{r^2} \right) \Gamma + \frac{\kappa-1}{a_0^4} \frac{dV}{dr} \left(i\omega \Gamma - V \frac{d\Gamma}{dr} \right) = 0. \end{aligned} \quad (23.24)$$

Интегралы данного уравнения неизвестны. Поэтому ограничимся задачей об определении собственных частот колебаний оболочки и заполнителя с учетом влияния оттока газа с поверхности $r = R_1$. В этом случае достаточно найти решение (23.24) вблизи поверхности $r = f_1$. В узкой зоне около этой поверхности скорость газа можно приближенно считать постоянной и равной V_0 . Тогда дифференциальное уравнение (23.24) примет вид

$$(1 - M^2) \frac{d^2 \Gamma}{dr^2} + 2 \left(\frac{1}{r} + iM\mu \right) \frac{d\Gamma}{dr} + \left(\mu^2 - \frac{\lambda_n}{r^2} \right) \Gamma = 0, \quad (23.25)$$

$$M = V_0/a_0.$$

Последнее является обобщенным уравнением Уиттекера. Решение его следующее [114]:

$$\Gamma(r) = D_1 K_m(x) + D_2 K_{-m}(x), \quad (23.26)$$

где

$$x = \frac{2i\mu r}{1 - M^2}, \quad m = \sqrt{m_0^2 + \frac{\lambda_n}{1 - M^2}}.$$

Коэффициенту $m_0 = \frac{1}{2} \frac{1+M^2}{1-M^2}$ соответствуют симметричные (радиальные) возмущения газов.

Если $2m$ не равно целому числу, то функции $K_{\pm m}^{\text{пр}}(x)$ выражаются через ряд Похгаммера ${}_1F_1$

$$\begin{aligned} K_{\pm m}(x) = x^{-m_0 \pm m} e^{-\frac{1}{2}(1+M)} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \pm m - \nu, \pm 2m + 1, x \right), \\ \nu = -\frac{M}{1 - M^2}. \end{aligned} \quad (23.27)$$

Если пользоваться функциями Уиттекера $M_{\nu \pm m}$, то [114]

$$K_{\pm m}(x) = x^{-\left(\frac{1}{2} + m_0\right)} e^{Mx} M_{\nu \pm m}(x). \quad (23.28)$$

При $M = 0$ ($m_0 = \frac{1}{2}$, $m = n + \frac{1}{2}$) функции $K_{\pm m}(x)$ переходят в сферические функции Бесселя:

$$K_{n+\frac{1}{2}}(2i\mu r) = 4^{n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} (-1)^n j_n(\mu r), \quad (23.29)$$

следовательно, получен рассмотренный в предыдущем разделе случай. Если ожидаемые собственные числа x данной задачи больше восьми, то можно воспользоваться асимптотическим разложением ряда [105]

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} e^{i\pi a} x^{-a} \left\{ \sum_0^{p-1} \frac{(a)_n (1+a-b)_n}{n!} (-x)^{-n} + O(|x|^{-p}) \right\} + \\ + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} \left\{ \sum_0^{s-1} \frac{(b-a)_n (1-a)_n}{n!} x^{-n} + O(|x|^{-s}) \right\}, \end{aligned}$$

имеющим быструю сходимость. Здесь $(a)_n$, $(a - b)_n$... символ Похгаммера: $(a)_0 = 1$, $(a)_1 = a$, $(a)_2 = a(a + 1)$, ... Далее будем рассматривать высокие моды колебаний (большие числа n), когда линии тока замыкаются вблизи поверхности $r = R_1$, и в (23.26) отбросим второй член, возрастающий при убывании r . Решение уравнения (23.23), справедливое вблизи поверхности $r = R_1$, принимает вид

$$\varphi = DK_m(x) Y^c(\beta, \theta) e^{i\omega t}. \quad (23.30)$$

Звуковое давление и радиальная скорость через потенциал (23.30) определяются по формулам, приведенным в § 2, т. е.

$$p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (r = R_1 - 0).$$

Граничные условия на поверхности контакта оболочки и заполнителя (23.9) и (23.10), а также условие равенства давлений на внутренней поверхности заполнителя остаются без изменений. Для скоростей воспользуемся соотношением (4.7)

$$v_r - \partial s_r / \partial t = (V_0 / p_0) (\zeta_1 + i\zeta_2) \sigma_{rr},$$

где вещественные числа ζ_1 и ζ_2 — характеристики зоны теплоподвода.

Вместо (23.14) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} b_1(R_1) &= 0, \quad b_2(R_1) = 0, \\ b_0(R_1) - \rho_0 D \left\{ i\omega K_m(x) - V_0 \frac{d}{dr} [K_m(x)] \right\} \Big|_{r=R_1} &= 0, \\ D \frac{d}{dr} [K_m(x)] \Big|_{r=R_1} - i\omega a_0(R_1) &= -\frac{v_0}{p_0} (\zeta_1 + i\zeta_2) b_0(R_1), \end{aligned} \quad (23.31)$$

которая должна решаться совместно с системой (23.13). Исключая из последних двух уравнений (23.31) коэффициент D , получим

$$\frac{b_0(R_1)}{i\omega a_0(R_1) - \frac{v_0}{p_0} (\zeta_1 + i\zeta_2) b_0(R_1)} = i\omega \rho_0 \left[\frac{iM}{\mu} + \frac{K_m(x)}{\frac{d}{dr} K_m(x)} \right] \Big|_{r=R_1}.$$

Положив здесь $M = 0$, на основании (23.29) приходим к последнему уравнению (23.14).

Вынужденные колебания двух вязко-упругих сфер [44]

Рассмотрим вынужденные колебания двух жестко скрепленных между собой толстых сферических слоев под действием изменения давления газа, находящегося во внутренней сферической полости. Внешней сферой, в частности, может быть тонкостенная оболочка. Предполагается, что колебания давления носят акустический характер и могут быть выражены с помощью линейной комбинации сферических функций

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n Q_{kn} Y_{kn}^c e^{i\omega t}, \quad (23.32)$$

где $Y_{kn}^c = P_n^k(\cos \beta) \cos k\theta$; Q_{kn} — амплитуды, вычисляемые по формуле

$$Q_{kn} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} p(\beta, \theta) Y_{kn}^c d(\cos \beta) d\theta.$$

Вязко-упругое поведение колебательной системы учитываем, введя комплексные модули

$$\lambda_*^{(j)} = \left(1 + \frac{i}{\pi} \delta_1^{(j)}\right) \lambda^{(j)}, \quad \mu_*^{(j)} = \left(1 + \frac{i}{\pi} \delta_2^{(j)}\right) \mu^{(j)}.$$

Здесь и в дальнейшем верхний знак $j = 1, 2$ означает принадлежность тех или иных величин к внутреннему и внешнему слоям. Для простоты записи звездочки у величин λ_* и μ_* опускаем.

Под действием давления, выраженного формулой (23.32), будут возбуждаться колебания, описываемые векторами смещения s_L и s_N . Волны типа s_N не поддерживаются. Поэтому в выражениях (23.3) и (23.6) следует положить $a_2 = b_2 = 0$. Например, $s_\beta^{(j)}$ и $\sigma_{rr}^{(j)}$ запишутся

$$\begin{aligned} s_\beta^{(j)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{1kn}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \beta} (Y_{kn}^c) e^{i\omega t}, \\ \sigma_{rr}^{(j)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n b_{0kn}^{(j)} Y_{kn}^c e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (23.33)$$

Коэффициенты $a_{0kn}^{(j)}$, $a_{1kn}^{(j)}$, $b_{0kn}^{(j)}$, $b_{1kn}^{(j)}$ равны

$$\begin{aligned} a_{0kn}^{(j)} &= \frac{1}{\mu_l^{(j)}} \left\{ A_{1kn}^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} [j_n(\mu_l^{(j)} r)] + A_{2kn}^{(j)} \frac{\partial}{\partial r} [n_n(\mu_l^{(j)} r)] \right\} + \\ &+ \frac{\lambda_n}{\mu_l^{(j)} r} [C_{1kn}^{(j)} j_n(\mu_l^{(j)} r) + C_{2kn}^{(j)} n_n(\mu_l^{(j)} r)], \end{aligned}$$

и т. д.

$$\mu_l^{(j)} = \frac{\omega}{a_l^{(j)}}, \quad \mu_t^{(j)} = \frac{\omega}{a_t^{(j)}}, \quad a_l^{(j)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}}{\rho_s^{(j)}}}, \quad a_t^{(j)} = \sqrt{\frac{\mu^{(j)}}{\rho_s^{(j)}}}.$$

Решение должно удовлетворять следующим условиям: на внутренней поверхности ($r = R_1$)

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -p, \quad \sigma_{r\beta}^{(1)} (\sigma_{r\theta}^{(1)}) = 0; \quad (23.34)$$

на стыке ($r = R$)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} &= -\sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{r\beta}^{(1)} (\sigma_{r\theta}^{(1)}) = -\sigma_{r\beta}^{(2)} (\sigma_{r\theta}^{(2)}), \\ s_r^{(1)} &= s_r^{(2)}, \quad s_\beta^{(1)} (s_\theta^{(1)}) = s_\beta^{(2)} (s_\theta^{(2)}); \end{aligned} \quad (23.35)$$

на наружной поверхности ($r = R_2$)

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{r\beta}^{(2)} (\sigma_{r\theta}^{(2)}) = 0. \quad (23.36)$$

Подставляя (23.33) и другие выражения для смещений и напряжений из первого раздела этого параграфа в условия (23.34), (23.35), (23.36), находим систему восьми алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_{1kn}^{(j)}$, $A_{2kn}^{(j)}$, $C_{1kn}^{(j)}$, $C_{2kn}^{(j)}$ ($j = 1, 2$). Система приведена в табл. 3. Коэффициенты $A_{1kn}^{(j)}$, ... можно найти методом Крамера после того, как уже вычислены все элементы определителя M и N .

Если колебания давления в газе происходят только по радиусу [$n = k = 0$, $Y_{00}^c = P_0^0 (\cos \beta) = 1$], то в слоях поддерживаются полностью симметричные стоячие волны типа s_L . В этом случае $C_{1kn}^{(j)} = C_{2kn}^{(j)} = 0$ и получается система уравнений четвертого порядка, приведенная в табл. 4.

Для последнего случая нагружения были определены напряжения $\sigma_{rr}^{(j)}$ и $\sigma_{\beta\beta}^{(j)} = \sigma_{\theta\theta}^{(j)}$, отнесенные к величине Q_{00} , по безразмерной частоте возбужде-

Таблица 3

$A_{1kn}^{(1)}$	$A_{2kn}^{(1)}$	$C_{1kn}^{(1)}$	$C_{2kn}^{(1)}$	$A_{1kn}^{(2)}$	$A_{2kn}^{(2)}$	$C_{1kn}^{(2)}$	$C_{2kn}^{(2)}$	const
$M_1(\mu_l^{(1)}R_1)$	$N_1(\mu_l^{(1)}R_1)$	$M_3(\mu_l^{(1)}R_1)$	$N_2(\mu_l^{(1)}R_1)$	0	0	0	0	$-Q_{kn}$
$M_3(\mu_l^{(1)}R_1)$	$N_3(\mu_l^{(1)}R_1)$	$M_4(\mu_l^{(1)}R_1)$	$N_4(\mu_l^{(1)}R_1)$	0	0	0	0	0
$M_1(\mu_l^{(1)}R)$	$N_1(\mu_l^{(1)}R)$	$M_2(\mu_l^{(1)}R)$	$N_2(\mu_l^{(1)}R)$	$M_1(\mu_l^{(2)}R)$	$N_1(\mu_l^{(2)}R)$	$M_2(\mu_l^{(2)}R)$	$N_2(\mu_l^{(2)}R)$	0
$M_3(\mu_l^{(1)}R)$	$N_3(\mu_l^{(1)}R)$	$M_4(\mu_l^{(1)}R)$	$N_4(\mu_l^{(1)}R)$	$M_3(\mu_l^{(2)}R)$	$N_3(\mu_l^{(2)}R)$	$M_4(\mu_l^{(2)}R)$	$N_4(\mu_l^{(2)}R)$	0
$i_n'^*(\mu_l^{(1)}R)$	$n_n'(\mu_l^{(1)}R)$	$\lambda_n M_5(\mu_l^{(1)}R)$	$\lambda_n N_5(\mu_l^{(1)}R)$	$-i_n'(\mu_l^{(2)}R)$	$-n_n'(\mu_l^{(2)}R)$	$-\lambda_n M_5(\mu_l^{(2)}R)$	$-\lambda_n N_5(\mu_l^{(2)}R)$	0
$M_5(\mu_l^{(1)}R)$	$N_5(\mu_l^{(1)}R)$	$M_6(\mu_l^{(1)}R)$	$N_6(\mu_l^{(1)}R)$	$-M_5(\mu_l^{(2)}R)$	$-N_5(\mu_l^{(2)}R)$	$-M_6(\mu_l^{(2)}R)$	$-N_6(\mu_l^{(2)}R)$	0
0	0	0	0	$M_1(\mu_l^{(2)}R_2)$	$N_1(\mu_l^{(2)}R_2)$	$M_2(\mu_l^{(2)}R_2)$	$N_2(\mu_l^{(2)}R_2)$	0
0	0	0	0	$M_3(\mu_l^{(2)}R_2)$	$N_3(\mu_l^{(2)}R_2)$	$M_4(\mu_l^{(2)}R_2)$	$N_4(\mu_l^{(2)}R_2)$	0

* Здесь штрихи обозначают производные по аргументу $\mu_l^{(j)}r$, $\mu_l^{(j)}r$, $M_1(\alpha^{(j)}z) = \frac{1}{\alpha^{(j)}} \left\{ -\lambda^{(j)} \alpha^{(j)2} i_n(\alpha^{(j)}z) + 2\mu^{(j)} \frac{d^2}{dz^2} [i_n(\alpha^{(j)}z)] \right\}$, $M_2(\alpha^{(j)}z) = \frac{2\lambda_n \mu^{(j)}}{\alpha^{(j)}} \frac{d}{dz} \left[\frac{i_n(\alpha^{(j)}z)}{z} \right]$, $M_3(\alpha^{(j)}z) = \frac{1}{\lambda_n} M_2(\alpha^{(j)}z)$, $M_4(\alpha^{(j)}z) = \frac{\mu^{(j)}}{\alpha^{(j)}} \left\{ \frac{\lambda_n - 2}{z^2} i_n(\alpha^{(j)}z) + \frac{d^2}{dz^2} [i_n(\alpha^{(j)}z)] \right\}$, $M_5(\alpha^{(j)}z) = \frac{1}{\alpha^{(j)}} i_n(\alpha^{(j)}z)$, $M_6(\alpha^{(j)}z) = \frac{1}{\alpha^{(j)}z} \frac{d}{dz} [z i_n(\alpha^{(j)}z)]$. $N_1, \dots$ обозначены аналогичные функции, но содержащие $n_n(\alpha^{(j)}z)$ вместо $i_n(\alpha^{(j)}z)$

Таблица 4

$A_{100}^{(1)}$	$A_{200}^{(1)}$	$A_{100}^{(2)}$	$A_{200}^{(2)}$	const
$M_1(\mu_l^{(1)} R_1)$	$N_1(\mu_l^{(1)} R_1)$	0	0	$-Q_{00}$
$M_1(\mu_l^{(1)} R)$	$N_1(\mu_l^{(1)} R)$	$M_1(\mu_l^{(2)} R)$	$N_1(\mu_l^{(2)} R)$	0
$j_0'(\mu_l^{(1)} R)$	$n_0'(\mu_l^{(1)} R)$	$-j_0'(\mu_l^{(2)} R)$	$-n_0'(\mu_l^{(2)} R)$	0
0	0	$M_1(\mu_l^{(2)} R_2)$	$N_1(\mu_l^{(2)} R_2)$	0

ния $\mu_l^{(1)} R_1 = \omega R_1 / a_l^{(1)}$ и радиусу r/R_1 (рис. 50) без учета затухания ($\delta_1 = \delta_2 = 0$). Зависимость абсолютных значений нормальных напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\beta\beta}$ в точках $r/R_1 = 1, 2$ и $r/R_1 = 3,0$ от частоты возбуждения $\mu_l^{(1)} R_1$

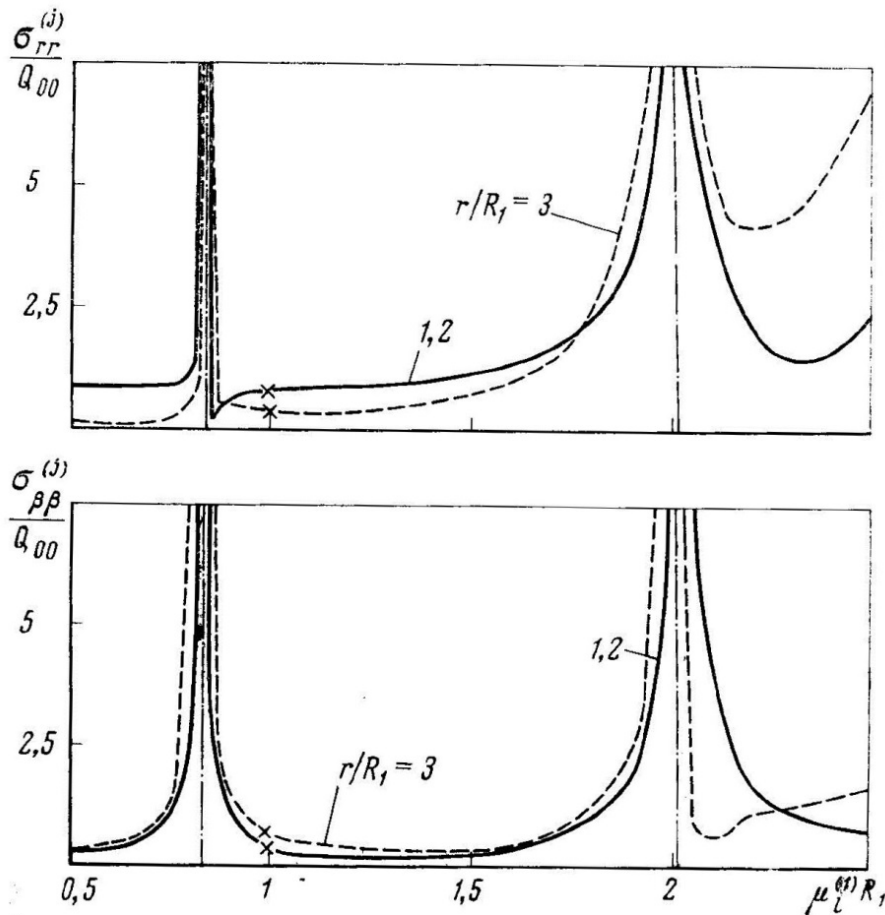


Рис. 50

построена при следующих данных: $E^{(2)}/E_1^{(1)} = 9,1$, $\nu^{(1)} = 0,38$, $\nu^{(2)} = 0,24$, $a_l^{(1)}/a_l^{(2)} = 0,6$, $R_2/R = 2$, $R_1/R = 0,5$. Графики зависимости σ_{rr} и $\sigma_{\beta\beta}$ от r/R_1 (рис. 51) построены для безразмерной частоты возбуждения $\mu_l^{(1)} R_1 = 1$, отмеченной на рис. 50 крестиками, при значениях: а) $E^{(2)}/E^{(1)} = 9,1$, $\nu^{(1)} = 0,38$, $\nu^{(2)} = 0,24$, $a_l^{(1)}/a_l^{(2)} = 0,6$ (сплошные линии); б) $E^{(2)}/E^{(1)} = 2,0$, $\nu^{(1)} = 0,38$, $\nu^{(2)} = 0,24$, $a_l^{(1)}/a_l^{(2)} = 0,9$ (штриховые линии); в) $E^{(2)}/E^{(1)} = 1$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)}$, $a_l^{(1)}/a_l^{(2)} = 1$ (один полый шар; штрих-пунктирные линии).

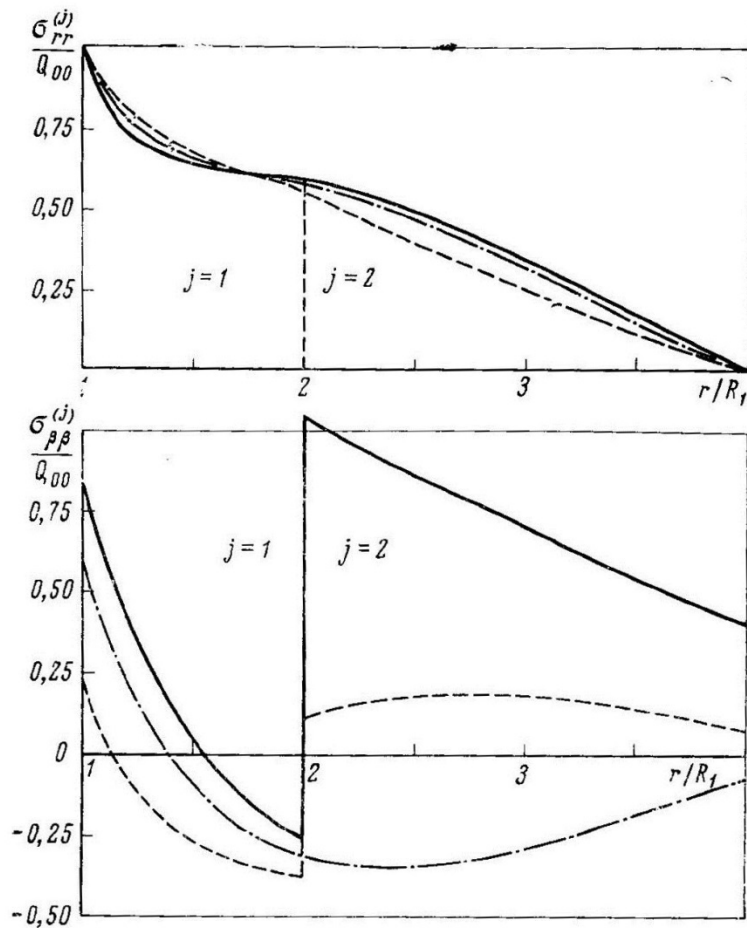


Рис. 51

Изложенная выше теория позволяет рассчитывать напряжения и в том случае, когда внешний слой становится тонким. Однако в этом случае целесообразнее решить задачу заново, используя для внешнего слоя уравнения тонких сферических оболочек. В начале параграфа (23.17) уже были приведены уравнения собственных колебаний такой системы. В задаче вынужденных колебаний первые три из них остаются без изменения, а четвертое приобретает вид

$$b_{0kn}(R_1) = -Q_{kn}.$$

Используя выражения для a_{0kn} , a_{1kn} , b_{0kn} , b_{1kn} , приходим к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_{1kn} , A_{2kn} , C_{1kn} , C_{2kn} (табл. 5).

Таблица 5

A_{1kn}	A_{2kn}	C_{1kn}	C_{2kn}	const
$M_1(\mu_l R_1)$	$N_1(\mu_l R_1)$	$M_2(\mu_l R_1)$	$N_2(\mu_l R_1)$	$-Q_{kn}$
$M_3(\mu_l R_1)$	$N_3(\mu_l R_1)$	$M_4(\mu_l R_1)$	$N_4(\mu_l R_1)$	0
$\bar{M}_1(\mu_l R)$	$\bar{N}_1(\mu_l R)$	$\bar{M}_2(\mu_l R)$	$\bar{N}_2(\mu_l R)$	0
$\bar{M}_3(\mu_l R)$	$\bar{N}_3(\mu_l R)$	$\bar{M}_4(\mu_l R)$	$\bar{N}_4(\mu_l R)$	0

Теперь в величинах, относящихся к толстому упругому слою, нет необходимости сохранять индекс $j = 1$. Поэтому в таблице вместо $M_1(\mu_l^{(1)} R_1)$, ...

написано $M_1(\mu_l R_1)$ и т. д. Другие обозначения следующие:

$$\bar{M}_1(\mu_l R) = M_1(\mu_l R) + d_1 j'_n(\mu_l R) - \frac{d_2}{\mu_l R} j_n(\mu_l R),$$

$$\bar{M}_2(\mu_l R) = M_2(\mu_l R) + \frac{d_1 \lambda_n}{\mu_l R} j_n(\mu_l R) - \frac{d_2}{\mu_l R} \frac{\partial}{\partial R} [R j_n(\mu_l R)],$$

$$\bar{M}_3(\mu_l R) = M_3(\mu_l R) - d_3 j'_n(\mu_l R) + \frac{d_4}{\mu_l R} j_n(\mu_l R),$$

$$\bar{M}_4(\mu_l R) = M_4(\mu_l R) - \frac{d_3 \lambda_n}{\mu_l R} j_n(\mu_l R) + \frac{d_4}{\mu_l R} \frac{\partial}{\partial R} [R j_n(\mu_l R)],$$

$$d_1 = \frac{\rho h}{K} [b^2(\lambda_n - 1 + \nu) \lambda_n + 2(1 + \nu) - K \omega^2], \quad \lambda_n = n(n+1),$$

$$d_2 = \frac{\rho h}{K} [b^2(\lambda_n - 1 + \nu) + 1 + \nu] \lambda_n, \quad d_3 = \frac{\rho h}{K} [b^2(\lambda_n - 2) + 1 + \nu],$$

$$d_4 = \frac{\rho h}{K} [\lambda_n - 1 + \nu - K \omega^2], \quad K = \frac{(1 - \nu^2) R^2 \rho}{E}, \quad b^2 = \frac{h^2}{12 R^2}.$$

Здесь h , R , ρ , E , ν — толщина, радиус, плотность, модуль упругости, коэффициент Пуассона стенок оболочки.

На рис. 52 приведены отношения значения величин σ_{rr}/Q_{00} , $\sigma_{\beta\beta}/Q_{00}$ для точек $r/R_1 = 1,2$ и $r/R_1 = 2$ в зависимости от безразмерной частоты возбуждения $\mu_l R_1$ при данных $E/E_s = 100$, $\nu = 0,3$, $\nu_s = 0,38$, $\rho/\rho_s = 5$, $h/R = 0,01$, $R/R_1 = 4$.

Эти кривые построены для симметричной формы колебаний ($n = k = 0$) упругого материала. Здесь же для точки $r = R_1$ дана за-

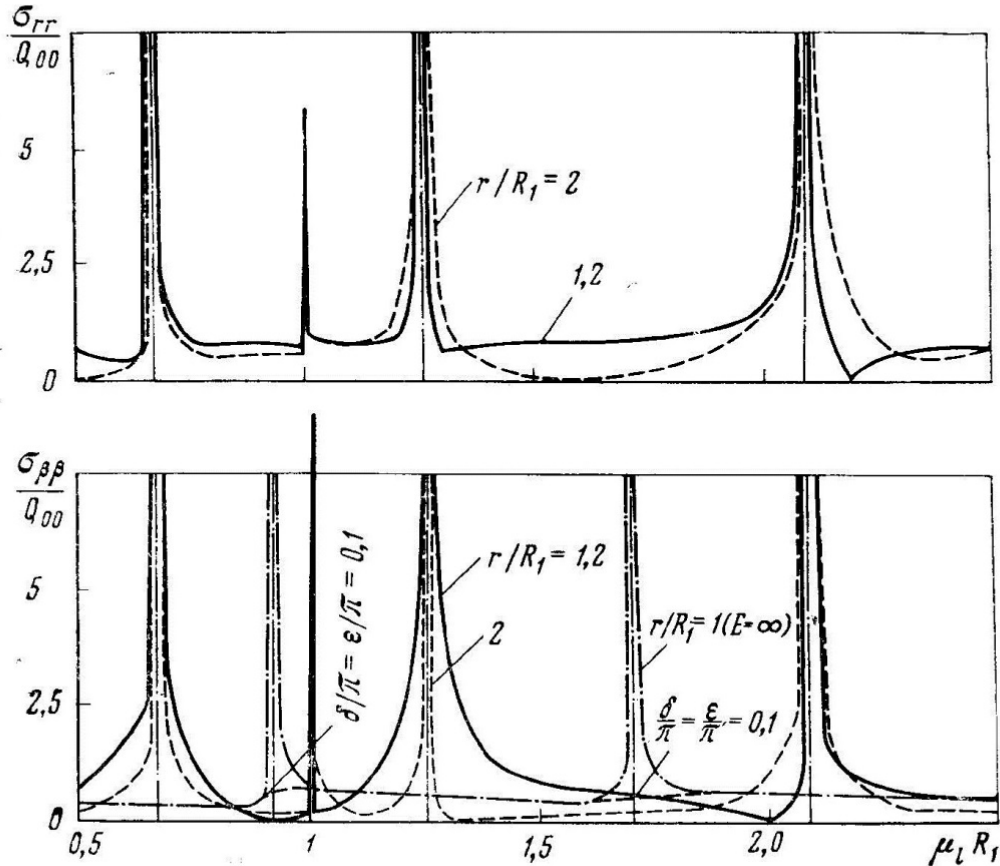


Рис. 52

висимость амплитуды $\sigma_{\beta\beta}/Q_{00}$ при коэффициентах затухания $\delta_1/\pi = \delta_2/\pi = 0,1$, когда оболочка абсолютно жесткая ($E = \infty$).

При расчетах с учетом внутреннего затухания сложности связаны с тем, что приходится иметь дело со сферическими функциями от комплексного аргумента. Поэтому для рассматриваемого случая $n = 0$ при помощи формул

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z},$$

$$n_0(z) = -\frac{\cos z}{z}, \quad n_1(z) = -\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\sin z}{z}$$

был сделан переход к тригонометрической форме

$$\frac{\sigma_{rr}}{Q_{00}} = \left(\frac{z_1}{z}\right)^3 \frac{[z + (1 - \eta z^2)q] \sin(z_2 - z) + [zq - (1 - \eta z^2)] \cos(z_2 - z)}{[z_1 + (1 - \eta z_1^2)q] \sin(z_2 - z_1) + [z_1q - (1 - \eta z_1^2)] \cos(z_2 - z_1)} e^{i\omega t},$$

$$\frac{\sigma_{\beta\beta}}{Q_{00}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{z_1}{z}\right)^3 \frac{[z + (1 - \chi z^2)q] \sin(z_2 - z) + [zq - (1 - \chi z^2)] \cos(z_2 - z)}{[z_1 + (1 - \chi z_1^2)q] \sin(z_2 - z_1) + [z_1q - (1 - \chi z_1^2)] \cos(z_2 - z_1)} e^{i\omega t}.$$

(23.37)

Здесь

$$\eta = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu}, \quad \chi = \frac{\lambda}{2\mu}, \quad q = \frac{1}{z_2} - \frac{\eta z_2}{1 - z_2(d_1/4\mu\mu_l)},$$

$z = \mu_l r$, $z_1 = \mu_l R_1$, $z_2 = \mu_l R = \mu_l R_2$ — комплексные числа. Действительные напряжения даются вещественными частями комплексных выражений (23.37). Упомянутая кривая $\sigma_{\beta\beta}/Q_{00}$ для вязко-упругого тела построена при $z = z_1$ ($r = R_1$), $q = 1/z_2$ ($E = \infty$, $d_1 = \infty$).

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК И ТРУБОПРОВОДОВ

§ 24. Цилиндрическая трехслойная оболочка, содержащая жидкость и газ

Уравнения движения оболочки

Колебательная система состоит из двух concentрических цилиндрических оболочек, соединенных при помощи равномерно расположенных продольных ребер или гофра, между которыми течет несжимаемая жидкость, и газового потока во внутренней оболочке (рис. 53). Колебания указанной системы (без газа) в предположении, что составная оболочка по всей толщине стенок подчиняется гипотезе недеформируемой нормали, рассматривались в работах [90], [109]. Когда толщины и приведенные модули упругости слоев отличаются не сильно, применение этой гипотезы ко всему пакету слоев вполне оправдано. Но в общем случае целесообразно использовать хорошо разработанную теорию трехслойных оболочек, хотя соответствующие уравнения ее отличаются большой громоздкостью.

Теории трехслойных оболочек посвящена обширная журнальная литература. Имеются также справочная, монографическая и обзорная работы [3], [38], [71]. Для пологих оболочек, у которой все три слоя ортотропны, воспользуемся зависимостями, приведенными в статьях [48], [49]. Существуют методы определения приведенных модулей упругости среднего слоя-заполнителя [4].

При расчетах оболочку будем считать тонкой, если удовлетворяется условие

$$\varepsilon = (\lambda H^2 / L)^2 \ll 1,$$

где H — общая толщина; L — характерный размер оболочки; λ — коэффициент изменчивости деформированного состояния. Предполагаем, что оси ортотропии внешних слоев и заполнителя совпадают с продольной и дуговой координатами x и $y = R\theta$. Нормальная координата z положительна, если она измеряется от срединной поверхности заполнителя в сторону внешней нормали.

Введем параметры s_1, s_2, s_3 , определяющие относительные геометрические и механические характеристики слоев, по формулам [85]

$$\frac{h'}{h} \sim \frac{h''}{h} \sim \varepsilon^{s_1}, \quad \frac{E_3}{E_1} \sim \frac{E_3}{E_1''} \sim \varepsilon^{s_2}, \quad \frac{E_1}{E_1'} \sim \frac{E_1}{E_1''} \sim \varepsilon^{s_3},$$

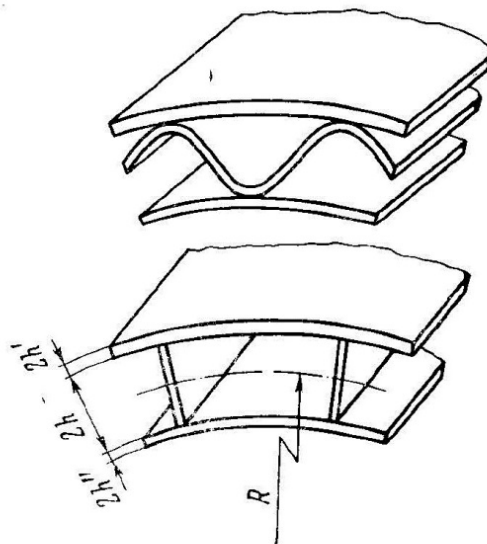


Рис. 53

где величины с одним и двумя штрихами относятся соответственно к верхнему и нижнему слоям, а без верхнего индекса — к заполнителю, E_1, E_2, E_3 — модули упругости заполнителя по осям x, y, z .

В работе [85] было установлено, что неравенство $s_2 \leq s_1 + 1$ является условием, при выполнении которого с точностью до ε и выше по сравнению с единицей можно пренебрегать величиной прогиба по толщине заполнителя. Это значит, что модуль E_3 достаточно большой (при заданном отношении толщин внешних слоев и заполнителя), и прогиб можно считать постоянным по всей толщине оболочки. Если модули упругости материалов и толщины слоев таковы, что удовлетворяется неравенство $s_3 < s_1 + 1$, то в расчетах необходимо учитывать тангенциальные усилия в заполнителе. Оболочку с такими механическими и геометрическими характеристиками слоев принято называть оболочкой с жестким заполнителем.

Полагая для внешних слоев справедливой гипотезу Кирхгофа — Лява и считая, что при деформировании первоначально нормальная линия к срединной поверхности заполнителя остается прямой, но не нормальной к срединной поверхности, имеем следующие выражения для перемещений по оси x : в верхнем слое ($h \leq z \leq h + 2h'$)

$$u = u' - (z - z') w_x \quad (z' = h + h');$$

в среднем слое ($-h \leq z \leq h$)

$$u = \frac{1}{2} (u' + u'') + \frac{1}{2} (h' - h'') w_x + \frac{z}{2h} [u' - u'' + (h' + h'') w_x];$$

в нижнем слое ($-h \geq z \geq -h - 2h''$)

$$u = u'' - (z + z'') w_x \quad (z'' = h + h'').$$

Индексы x, y, z, t указывают на дифференцирование по соответствующей переменной. Аналогичные соотношения имеют место для направления y .

Уравнения движения и естественные граничные условия можно получить при помощи вариационного принципа Лагранжа. В случае, когда тангенциальные силы инерции не учитываются, система уравнений относительно компонент перемещения имеет вид

$$\begin{aligned} & b'_1 u'_{xx} + b''_1 u''_{xx} + b'_3 u'_{yy} + b''_3 u''_{yy} + (b'_3 + l'_1) v'_{xy} + (b''_3 + l''_1) v''_{xy} - \\ & - \frac{1}{R} (l'_1 + l''_1) w_x - \frac{1}{2} (h' - h'') (B_1 w_{xxx} + l_1 w_{xyy}) = 0, \\ & b'_2 v'_{yy} + b''_2 v''_{yy} + b'_3 v'_{xx} + b''_3 v''_{xx} + (b'_3 + l'_1) u'_{xy} + (b''_3 + l''_1) u''_{xy} - \\ & - \frac{1}{R} (B'_2 + B''_2 + B_2) w_y - \frac{1}{2} (h' - h'') (B_2 w_{yyy} + l_1 w_{xxy}) = 0, \\ & \bar{b}'_1 u'_{xx} - \bar{b}''_1 u''_{xx} + \bar{b}'_3 u'_{yy} - \bar{b}''_3 u''_{yy} + (\bar{b}'_3 + \bar{l}'_1) v'_{xy} - (\bar{b}''_3 + \bar{l}''_1) v''_{xy} - \\ & - \frac{1}{6} (h' + h'') (B_1 w_{xxx} + l_1 w_{xyy}) - \frac{1}{R} (l'_1 - l''_1) w_x = \frac{1}{g_1} [u' - u'' - (z' + z'') w_x], \\ & \bar{b}'_2 v'_{yy} - \bar{b}''_2 v''_{yy} + \bar{b}'_3 v'_{xx} - \bar{b}''_3 v''_{xx} + (\bar{b}'_3 + \bar{l}'_1) u'_{xy} - (\bar{b}''_3 + \bar{l}''_1) u''_{xy} - \\ & - \frac{1}{6} (h' + h'') (B_2 w_{yyy} + l_1 w_{xxy}) - \frac{1}{R} (b'_2 - b''_2) w_y = \frac{1}{g_2} [v' - v'' - (z' + z'') w_y], \\ & c'_1 u'_{xxx} - c''_1 u''_{xxx} + c'_2 v'_{yyy} - c''_2 v''_{yyy} + c'_{12} (u'_y + v'_x)_{xy} - c''_{12} (u''_y + v''_x)_{xy} - \\ & - \frac{1}{R} (l'_1 u'_x + l''_1 u''_x + b'_2 v'_y + b''_2 v''_y) + d_1 w_{xxxx} + 2d_{12} w_{xxyy} + d_2 w_{yyyy} - \end{aligned} \quad (24.1)$$

$$-\frac{1}{R} \left[z' B_1' v_{21}' - z'' B_1'' v_{21}'' - \frac{1}{2} (h' - h'') B_1 v_{21} \right] w_{xx} - \\ - \frac{1}{R} \left[z' B_2' - z'' B_2'' - \frac{1}{2} (h' - h'') B_2 \right] w_{yy} + (B_2^c / R^2) w = Z.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B_j^i = \frac{2E_j^i h^i}{1 - v_{21}^i v_{12}^i}, \quad B_3^i = 2G_{12}^i h^i, \\ D_j^i = \frac{2}{3} \frac{E_j^i h^{i3}}{1 - v_{21}^i v_{12}^i}, \quad D_3^i = \frac{2}{3} G_{12}^i h^{i3}, \\ D_j = \frac{2}{3} \frac{E_j h^3}{1 - v_{21} v_{12}}, \quad D_3 = \frac{2}{3} G_{12} h^3, \\ b_j^i = B_j^i + \frac{1}{2} B_j, \quad \bar{b}_j^i = B_j^i + \frac{1}{6} B_j, \quad l_1^i = B_1^i v_{21}^i + \frac{1}{2} B_3^i, \\ l_1 = B_1 v_{21} + 2B_3, \quad c_j^i = z^i B_j^i + \frac{h}{6} B_j, \quad \bar{l}_1^i = B_1^i v_{21}^i + \frac{1}{6} B_3^i, \\ c_{12}^i = z^i (B_1^i v_{21}^i + 2B_3^i) + \frac{1}{6} l_1, \quad d_j = D_j' + D_j'' - \frac{h' + h''}{2h} D_j, \\ d_{12} = D_1' v_{21}' + 2D_3' + D_1'' v_{21}'' + 2D_3'' - \frac{h' + h''}{2h} (D_1 v_{21} + 2D_3), \\ B_2^c = B_2' + B_2'' + B_2, \quad g_1 = h / G_{13}, \quad g_2 = h / G_{23}.$$

G_{12}^i — модули сдвига в плоскости xu . Для ортотропных материалов справедливы соотношения

$$D_1^i v_{21}^i = D_2^i v_{12}^i.$$

В (24.1) следует положить

$$Z = -mw_{tt} + p, \quad m = 2(\rho h + \rho' h' + \rho'' h''). \quad (24.2)$$

Давление со стороны газа и несжимаемой жидкости равно

$$p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - 2\bar{\rho}_0 h \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w. \quad (24.3)$$

Здесь $U_0, \bar{U}_0$ — скорости течений газа и жидкости, $\bar{\rho}_0$ — приведенная плотность жидкости, определенная за вычетом объема, занимаемого ребрами. Внутреннее избыточное давление газа не учитывается. Жидкость оказывает на оболочку лишь инерционное воздействие.

*Колебания трехслойной
цилиндрической оболочки [63], [25]*

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую оболочку, свободную от подкреплений и опор. Решение системы уравнений (24.1) зададим в виде

$$u' = U_1 \sin(n/R) y \exp[-i(\lambda x - \omega t)], \\ u'' = U_2 \sin(n/R) y \exp[-i(\lambda x - \omega t)], \\ v' = V_1 \cos(n/R) y \exp[-i(\lambda x - \omega t)], \\ v'' = V_2 \cos(n/R) y \exp[-i(\lambda x - \omega t)], \\ w = W \sin(n/R) y \exp[-i(\lambda x - \omega t)]. \quad (24.4)$$

Потенциал возмущений в газе

$$\Phi = A \sin(n/R) y \exp[-i(\lambda x - \omega t)]. \quad (24.5)$$

Как всегда, удовлетворяя условию непроницаемости на стенке оболочки, находим связь между амплитудами A и W . Используя эту зависимость и (24.5), получаем выражение для акустического давления на оболочку

$$(\omega - U_0 \lambda)^2 m^* W \sin(n\gamma/R) \exp[-i(\lambda x - \omega t)],$$

где

$$m^* = \rho_0 J_n(\gamma R) / J'_n(\gamma R).$$

Подставим (24.2), (24.3), (24.4) и полученное выражение для возмущений давления газа в (24.1). Приравнявая нулю определитель пятого порядка, составленный из коэффициентов при U_1 , U_2 , V_1 , V_2 , W , получаем

$$\omega^2 + (\omega - U_0 \lambda)^2 \frac{\bar{m}}{m} + (\omega - U_0 \lambda)^2 \frac{m^*}{m} = \Omega^2. \quad (24.6)$$

Здесь $\bar{m} = 2\rho_0 h$, Ω — частота свободных колебаний трехслойной оболочки без жидкости и газа

$$\begin{aligned} m\Omega^2 = & d_1 \beta^4 + 2d_{12} \beta^2 n^2 + d_2 n^4 - \frac{1}{S_5} \left[\frac{h' - h''}{2} (\beta S_1 A_1 - n S_2 A_2) + \right. \\ & + (z' + z'') (\beta S_3 - n S_4) + \frac{h' + h''}{6} (g_1 \beta S_3 A_1 - g_2 n S_4 A_2) \Big] + B_2^c / R^2 + \\ & + \frac{1}{R} \left[(z' B_1' v_{21} - z'' B_1'' v_{21} - \frac{h' - h''}{2} B_1 v_{21}) \beta^2 + (z' B_2' - z'' B_2'' - \frac{h' - h''}{2} B_2) n^2 \right] + \\ & + \frac{1}{S_5 R} [(\mu_1' + \mu_2'') S_1 \beta - B_2^c S_2 n - g_1 S_3 (B_1'' v_{21} - B_1' v_{21}) \beta + g_2 S_4 (B_2'' - B_2') n]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda R, \quad A_1 = \beta^2 B_1 + n^2 l_1, \quad A_2 = n^2 B_2 + \beta^2 l_1, \\ S_1 &= \beta \left\{ [(a + g_1 \delta_\beta) (a + g_2 \delta_n) - g_1 g_2 \beta^2 n^2 L_3^2] \times \right. \\ &\times \left[c_n (C_1^- \beta^2 + C_{12}^- n^2 + \frac{1}{R} M_2^+) - n^2 L_3 (C_2^- n^2 + C_{12}^- \beta^2 + \frac{1}{R} L_2^+) \right] - \\ &- (a + g_1 \delta_\beta) (b + g_2 l_n) \left[a_n (C_1^- \beta^2 + C_{12}^- n^2 + \frac{1}{R} M_2^+) - \right. \\ &- n^2 L_3 (C_2^+ n^2 + C_{12}^+ \beta^2 + \frac{1}{R} A_2^-) \Big] - g_2 n^2 L_3 (b + g_1 l_\beta) \left[a_n (C_2^- n^2 + C_{12}^- \beta^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{R} L_2^+) - c_n (C_2^+ n^2 + C_{12}^+ \beta^2 + \frac{1}{R} A_2^-) \Big] + (C_1^+ \beta^2 + C_{12}^+ n^2 + \frac{1}{R} M_2^+) \times \\ &\times \{ (b + g_1 l_\beta) [a_n (b + g_2 l_n) - c_n (a + g_2 \delta_n)] - \beta^2 n^2 L_3^2 g_1 (b + g_2 l_n) \} \}, \\ S_3 &= \beta \left\{ (C_1^+ \beta^2 + C_{12}^+ n^2 + \frac{1}{R} M_2^-) \left[(c_\beta c_n - \beta^2 n^2 L_3^2) (a + g_2 \delta_n) - a_n c_\beta (b + g_2 l_n) \right] + \right. \\ &+ n^2 L_3^2 \left\{ (C_2^- n^2 + C_{12}^- \beta^2 + \frac{1}{R} L_2^+) [a_\beta (a + g_2 \delta_n) + g_2 a_n c_\beta] - \right. \\ &- (C_2^+ n^2 + C_{12}^+ \beta^2 + \frac{1}{R} A_2^-) \left[(c_\beta c_n - \beta^2 n^2 L_3^2) g_2 + a_\beta (b + g_2 l_n) \right] \Big\} + \\ &+ (C_1^- \beta^2 + C_{12}^- n^2 + \frac{1}{R} M_2^+) \{ a_\beta [a_n (b + g_2 l_n) - c_n (a + g_2 \delta_n)] - a_n g_2 \beta^2 n^2 L_3^2 \} \}, \\ S_5 &= - (c_\beta c_n - \beta^2 n^2 L_3^2) [(a + g_1 \delta_\beta) (a + g_2 \delta_n) - g_1 g_2 \beta^2 n^2 L_3^2] + \\ &+ \beta^2 n^2 L_3^2 [g_1 a_\beta (b + g_2 l_n) + g_2 a_n (b + g_1 l_\beta)] + a_n c_\beta (a + g_1 \delta_\beta) (b + g_2 l_n) + \\ &+ a_\beta (b + g_1 l_\beta) [c_n (a + g_2 \delta_n) - a_n (b + g_2 l_n)], \\ a &= B_1' v_{21} + B_1'' v_{21} + B_3^c, \quad B_3 = B_3' + B_3'' + B_3, \\ b &= (b_3'' - b_3') + (l_3'' - l_3') - \bar{b}_3, \quad L_3 = l_3' a_3'' + l_3'' a_3', \\ C_j^+ &= c_j' a_3'' + c_j'' a_3', \quad C_{12}^+ = c_{12}' a_3'' + c_{12}'' a_3', \quad M_j^+ = \mu_j' l_3'' + \mu_j'' l_3', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_j^- &= c_j' l_3'' - c_j'' l_3', \quad C_{12}^- = c_{12}' l_3'' - c_{12}'' l_3', \quad M_j^- = \mu_j' a_3'' - \mu_j'' a_3', \\
a_\beta &= A_1^- \beta^2 + A_3^- n^2, \quad a_n = A_2^- n^2 + A_3^- \beta^2, \quad A_3^- = b_3' a_3'' - b_3'' a_3', \\
\delta_\beta &= A_1^+ \beta^2 + A_3^+ n^2, \quad \delta_n = A_2^+ n^2 + A_3^+ \beta^2, \quad A_3^+ = b_3' a_3'' + b_3'' a_3', \\
c_\beta &= L_1^+ \beta^2 + L_3^+ n^2, \quad c_n = L_2^+ n^2 + L_3^+ \beta^2, \quad L_3^- = b_3' l_3'' - b_3'' l_3', \\
l_\beta &= L_1^- \beta^2 + L_3^- n^2, \quad l_n = L_2^- n^2 + L_3^- \beta^2, \quad L_3^+ = b_3' l_3'' + b_3'' l_3', \\
A_j^- &= b_j' a_3'' - b_j'' a_3', \quad L_j^- = b_j' l_3'' - b_j'' l_3', \\
A_j^+ &= b_j' a_3'' + b_j'' a_3', \quad L_j^+ = b_j' l_3'' + b_j'' l_3', \\
a_3^i &= B_1^i v_{21}^i + b_3^i, \\
l_3^i &= l_1^i + B_3^i, \\
\mu_1^i &= B_1^i v_{21}^i + \frac{1}{2} B_{11} v_{21}^i, \quad \mu_2^i = B_2^i v_{12}^i + \frac{1}{2} B_{12} v_{12}^i.
\end{aligned}$$

S_2 и S_4 получаются из выражений S_1 и S_2 путем замены в них β на n и наоборот — n на β ($\beta \rightleftharpoons n$), а также $g_1 \rightleftharpoons g_2$, $C_1^- \rightleftharpoons C_2^-$, $C_1^+ \rightleftharpoons C_2^+$, $L_2^- \rightleftharpoons M_2^-$, $A_2^- \rightleftharpoons M_2^-$. При этом знаки у S_2 и S_4 нужно брать обратными по сравнению с S_1 и S_3 .

Весьма громоздкое выражение для собственной частоты (25.7) несколько упрощается в частных случаях строения оболочки. Например, несущие слои могут быть изготовлены из одинаковых материалов и одинаковой толщины. Тогда все постоянные, отмеченные одним и двумя штрихами, равны между собой. Далее, материал несущих слоев может быть изотропным. Если средний слой представляет собой только продольный набор ребер, то окружные усилия в среднем слое отсутствуют и т. д.

При $U_0 = \bar{U}_0 = 0$ уравнение (25.6) приводится к виду

$$\omega = \Omega (1 + \bar{m}/m + m^*/m)^{-1/2}.$$

Отсюда видно, что жидкость уменьшает частоту ω , в то время как газ приводит либо к снижению, либо к повышению ее в зависимости от знака приведенной массы m^* .

Пусть $m^* = 0$. Тогда $(\omega - \bar{U}_0 \lambda)^2 = \frac{m}{\bar{m}} (\Omega^2 - \omega^2)$, откуда видно, что с увеличением $\bar{U}_0$ частота ω падает. Наконец, при $\omega = 0$ получается значение критической скорости течения жидкости $\bar{U}_0 = (\Omega/\lambda) \sqrt{m/\bar{m}}$, при котором трехслойная оболочка испытывает неограниченно возрастающий изгиб (в рамках линейной теории). Аналогичное выражение получается для критической скорости течения газа $U_0 = (\Omega/\lambda) \sqrt{m/m^*}$, которое хорошо исследовано [16]. В общем случае получаем критическую комбинацию $\bar{m} \bar{U}_0^2 + m^* U_0 = (\Omega/\lambda)^2 m$.

§ 25. Колебания и устойчивость трубопроводов

Устойчивость и колебания прямого трубопровода при протекании в нем жидкости

Очень часто наиболее слабым элементом оказывается не корпус камеры сгорания (топки), а детали, находящиеся в пульсирующем потоке: топливный коллектор, стабилизатор пламени, теплоотводящие трубы, всевозможные датчики и т. д. На рис. 54 показана схема камеры с одним прямым топливным коллектором (трубкой), снабженным форсунками для впрыска горючего. Ту же схему может иметь топочная камера, но в этом случае обычно почти все пространство камеры бывает заполнено трубками, между которыми проходят горячие газы и отдают тепло движущейся в трубках жидкости.

Строгое определение действующих на трубки переменных усилий от распространяющихся в камере волн представляет значительные трудности. Возможно, для этой цели окажется полезным привлечение теории нестационарного обтекания решеток. Задача упрощается, если в камере находится одна или несколько редко расположенных трубок. Тогда обтекание каждой трубки с большой точностью можно рассматривать изолированно от других. Такая задача применительно к кольцевому коллектору будет разобрана далее. Рассмотрим свободные колебания и устойчивость прямого трубопровода, что представляет самостоятельный интерес¹.

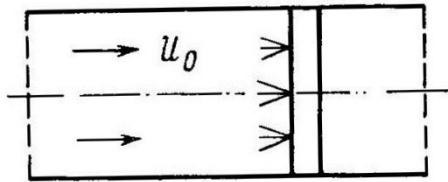


Рис. 54

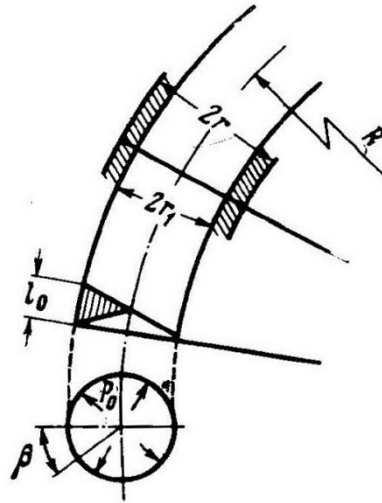


Рис. 55

Прежде чем составить уравнение движения трубопровода, обратим внимание на одно обстоятельство, которое не учитывалось в предыдущих исследованиях. При искривлении трубки с радиусом кривизны R площадь, на которую действует внутреннее давление p_0 , с выпуклой стороны больше, чем с вогнутой. Если принять обычную для изгиба балок гипотезу плоских сечений, то избыточная площадь будет иметь вид, заштрихованный на рис. 55. Вычислим равнодействующую от давления, действующего на эту площадку

$$Z = 2 \int_0^{\pi/2} p(\beta) l(\beta) r_1 d\beta, \quad (25.1)$$

где центральный угол β в поперечном сечении трубки отсчитывается от плоскости изгиба. Функции $p(\beta)$ и $l(\beta)$ равны

$$p = p_0 \cos \beta, \quad l = l_0 \cos \beta. \quad (25.2)$$

Здесь $l_0 = 2r_1/R$ — разность длин дуг радиусов $R + r_1$ и $R - r_1$, отнесенная к длине дуги радиуса R . Подставляя (25.2) в (25.1), находим боковое давление на единицу длины дуги

$$Z = \pi p_0 r_1^2 / R \quad (25.3)$$

или учитывая, что $1/R \approx -d^2 w/dz^2$, где w — прогиб трубки,

$$Z = -\pi p_0 r_1^2 \frac{d^2 w}{dz^2}. \quad (25.4)$$

Выражение (25.3) было использовано нами при изучении колебаний кольцевого коллектора [46], [47].

Если жидкость движется, то появляется боковое давление от центробежных сил, равное $-\pi r_1^2 \rho_0 V_0^2 d^2 w/dz^2$; V_0 — скорость движения жидкости. Центробежные силы направлены в ту же сторону, что усилие (25.4).

¹ Исследованию колебаний и устойчивости трубопроводов посвящены работы [32], [122], [115], [149], [17], [86], [93], [77], [82] и др.

Дифференциальное уравнение изгиба оси трубопровода запишется так:

$$EJ \frac{d^4 w}{dz^4} = - \pi r_1^2 (p_0 + \rho_0 V_0^2) \frac{d^2 w}{dz^2}$$

или

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + \alpha^2 \frac{d^2 w}{dz^2} = 0,$$

где

$$\alpha^2 = \frac{\pi r_1^2 (p_0 + \rho_0 V_0^2)}{EJ}. \quad (25.5)$$

Его общее решение имеет вид

$$w = C_1 + C_2 z + C_3 \sin \alpha z + C_4 \cos \alpha z. \quad (25.6)$$

Пусть при $z = 0$, L имеем $w = d^2 w / dz^2 = 0$. Подчинив решение (25.6) этим условиям, приходим к уравнению $\sin \alpha L = 0$. Отсюда с учетом выражения для α (25.5) получаем

$$p_0 + \rho_0 V_0^2 = \frac{\pi EJ}{r_1^2 L^2}. \quad (25.7)$$

Это критическая комбинация давления и скорости движения жидкости, при которой отклоненная от прямолинейной форма трубки является состоянием равновесия. Таким образом, в результате учета конечности изгибных деформаций трубопровода в известном в литературе соотношении (25.7) появился новый член p_0 .

Вопрос заключается в том, насколько реально значение этой комбинации величин. Например, при $V_0 = 0$, возможно, давление p_0 должно быть столь большим, что трубка разорвется, прежде чем потеряет устойчивость прямолинейной формы.

П р и м е р. Пусть $L = 1$ м, $r_1 = 0,01$ м, $r/r_1 = 1,08$, $E = 2 \cdot 10^6$ бар. Момент инерции трубчатого сечения равен $J = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4)$.

Подставляя эти данные в выражение

$$p_0 = E \left(\frac{\pi r_1}{2L} \right)^2 \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^4 - 1 \right],$$

определяем критическое внутреннее давление: $p_0 = 178$ бар, что соответствует порядку величин рабочих давлений в топливной системе. При этом разрывающее трубку напряжение будет равно $\sigma = p_0 r_1 / (r - r_1) = 2250$ бар, т. е. в 2—3 раза меньше предела прочности сталей.

При рассмотрении колебаний трубки также учтем член (25.4). Так как жидкость при поперечных колебаниях узкой трубки можно считать несжимаемой, то уравнение будет иметь вид:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + (m + \bar{m}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\bar{m} V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} + \bar{m} (p_0 / \rho_0 + V_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad (25.8)$$

$$\bar{m} = \pi r_1^2 \rho_0.$$

Выражение для прогиба, удовлетворяющее условиям на концах трубки $w = \partial^2 w / \partial z^2 = 0$, примем в форме

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} W_s \sin \frac{s\pi}{L} z e^{i\omega t}.$$

Подставляя его в (25.8) и интегрируя по методу Бубнова — Галеркина, находим бесконечную систему характеристических уравнений

$$(\bar{\Omega}_s^2 - \omega^2) W_s + iV_0 \omega \sum_{j=1}^{\infty} v_{sj} W_j = 0,$$

$$(j + s = \text{нечетно}, s = 1, 2, 3, \dots),$$

где

$$\bar{\Omega}_s^2 = \left[\Omega_s^2 - \frac{\bar{m}}{m} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2 \right) \left(\frac{s\pi}{L} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{\bar{m}}{m} \right)^{-1}, \quad (25.9)$$

$$v_{sj} = \frac{8js}{L(j^2 - s^2)} \left(1 + \frac{m}{\bar{m}} \right)^{-1}, \quad \Omega_s^2 = \frac{EJ}{m} \left(\frac{s\pi}{L} \right)^4. \quad (25.10)$$

Частотное уравнение представляет собой бесконечный определитель

$$\begin{vmatrix} \bar{\Omega}_1^2 - \omega^2 & iV_0 v_{12} \omega & iV_0 v_{14} \omega \dots \\ iV_0 v_{21} \omega & \bar{\Omega}_2^2 - \omega^2 & iV_0 v_{23} \omega \dots \\ 0 & iV_0 v_{32} \omega & \bar{\Omega}_3^2 - \omega^2 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь основными являются диагональные элементы $\bar{\Omega}_s^2 - \omega^2$. Приравнявая их нулю, для собственных частот получим выражение (25.9). Элементы, содержащие коэффициенты v_{sj} , соответствуют кориолисовым силам, и их учет лишь уточняет значение частот $\omega = \bar{\Omega}_s$. Например, уточненное значение частоты ω_1 получим, приравняв нулю определитель второго порядка в верхнем левом углу

$$(\bar{\Omega}_1^2 - \omega^2)(\bar{\Omega}_2^2 - \omega^2) - V_0^2 v_{12}^2 \omega^2 = 0.$$

Здесь учтено, что $v_{21} = -v_{12}$. Ввиду малости величины $V_0^2 v_{12}^2 \frac{\bar{\Omega}_1^2 + \bar{\Omega}_2^2 + V_0^2 v_{12}^2}{(\bar{\Omega}_2^2 - \bar{\Omega}_1^2)^2}$

по сравнению с единицей низший корень квадратного уравнения можно привести к виду

$$\omega_1^2 \approx \bar{\Omega}_1^2 - V_0^2 v_{12}^2 \frac{\bar{\Omega}_1^2 + \frac{1}{2} V_0^2 v_{12}^2}{\bar{\Omega}_2^2 - \bar{\Omega}_1^2}. \quad (25.11)$$

Уравнение (25.11) показывает, что учет кориолисовых сил понижает значение собственной частоты. Следующее приближение для ω_1 получим, рассматривая определитель третьего порядка. Чтобы избежать при этом получения кубического уравнения относительно ω^2 , в членах, содержащих v_{14} , v_{23} , v_{32} , а также в члене $\bar{\Omega}_3^2 - \omega^2$ вместо ω^2 можно поставить значение (25.11). Аналогично уточняются высшие собственные частоты колебаний.

Вынужденные колебания упругого кольца в акустической среде [62]

Здесь рассмотрим вынужденные колебания кругового кольца, концентрически расположенного внутри цилиндрической камеры, под действием продольных акустических волн (рис. 56). Распространяющиеся вдоль камеры плоские волны описываются потенциалом скоростей

$$\varphi = (A_1 e^{-i\alpha x} + A_2 e^{i\alpha x}) e^{i\omega t} \quad \left(\alpha = \frac{\omega}{a} \right). \quad (25.12)$$

Если задан коэффициент отражения η в выходном сечении камеры ($x = L$),

то $A_2 = \eta A_1$. При полном отражении ($\eta = 1$) получаем только стоячую волну, а при полном поглощении ($\eta = 0$) — только бегущую волну. Рассмотрим колебания кольца под действием волн, распространяющихся в положительном направлении оси x . Для обратной волны расчеты могут быть проведены аналогично.

Кольцо закреплено в камере при помощи n равномерно расположенных упругих подвесок. Обозначим через w_1 упругие смещения кольца по бинормали, закрепленного на абсолютно жестких опорах, а через w_2 — смещение кольца как твердого тела на гибких опорах, так что полное смещение будет равно

$$w(\theta, t) = we^{i\omega t} = (w_1 + w_2) e^{i\omega t}.$$

Ввиду равномерного закрепления однородного кольца, на которое падает плоская волна, w_1 и угол поворота поперечного сечения вокруг оси кольца γ (угол скручивания) аппроксимируем функциями

$$w_1 = W_1 \sin^2 \frac{n}{2} \theta, \quad \gamma = \Gamma \sin^2 \frac{n}{2} \theta, \quad (25.13)$$

где θ — центральный угол в плоскости кольца, отсчитываемый от какой-либо опоры. Амплитуда w_2 , очевидно, от θ не зависит.

При определении сил, действующих на кольцо, ввиду малости отношения r/R элемент кольца, образованный радиальными сечениями s и s' (рис. 56), принимаем за цилиндрический элемент. Представим плоскую волну как сумму цилиндрических волн. При отсутствии кольца потенциал плоской бегущей волны (25.12) может быть записан так:

$$\varphi = A e^{-i\alpha r \cos \beta} e^{i\omega t} = A e^{-i(\alpha r \cos \beta - \omega t)}. \quad (25.14)$$

Здесь $A = A_1$, β — угол, отсчитываемый от положительного направления волны. Разлагая $\exp(-i\alpha r \cos \beta)$ в ряд по цилиндрическим и тригонометрическим функциям, выражение (25.14) перепишем в виде

$$\varphi = A \left[J_0(\alpha r) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} i^{-j} J_j(\alpha r) \cos j\beta \right] e^{i\omega t}. \quad (25.15)$$

Потенциал рассеянных кольцом волн при малом отношении r/R возьмем в виде ряда по $\cos j\beta$ и расходящимся функциям Ханкеля

$$\psi = \sum_{j=0}^{\infty} B_j H_j^{(2)}(\alpha r) \cos j\beta e^{i\omega t}. \quad (25.16)$$

Принимаем для упрощения расчета допущение о том, что рассеянные кольцом волны не отражаются от стенок трубы. Это вполне допустимо, так как тонкие круглые стержни, как известно, являются весьма плохими излучателями акустической энергии.

На поверхности кольца должно выполняться условие равенства суммы скоростей падающей и рассеянной волн и скорости движения кольца

$$\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial r} = i\omega w \cos \beta e^{i\omega t}. \quad (25.17)$$

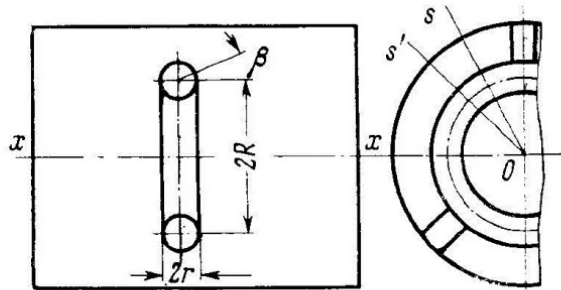


Рис. 56

Подставляя выражения (25.15), (25.16) в (25.17) и приравнивая в нем члены с одинаковым j , находим коэффициенты B_j

$$\begin{aligned} B_0 &= -AJ'_0(\alpha r)[J'_0(\alpha r) - iN'_0(\alpha r)]^{-1}, \\ B_1 &= i[\omega w + 2AJ'_1(\alpha r)][J'_1(\alpha r) - iN'_1(\alpha r)]^{-1}, \dots, \end{aligned} \quad (25.18)$$

где штрихи означают производные по r .

Полное всестороннее давление на поверхность цилиндра, очевидно, будет равно $p = -\rho_0 \partial(\varphi + \psi)/\partial t$. Сила, действующая на единицу длины кольца в направлении оси x , равна

$$q = r \int_0^{2\pi} p \cos \beta d\beta = -i\pi r p_0 \omega \{-2iAJ_1(\alpha r) + B_1[J'_1(\alpha r) - iN'_1(\alpha r)]\} e^{i\omega t}. \quad (25.19)$$

Численные вычисления равнодействующей (25.19) несколько упрощаются, если вместо цилиндрических функций ввести их амплитуды C_j и фазовые углы δ_j по формулам [79]

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \frac{1}{2} C_0(z) \sin \delta_0(z), \quad J_{j+1}(z) - J_{j-1}(z) = 2C_j(z) \sin \delta_j(z) \quad (j > 0), \\ N_1(z) &= -\frac{1}{2} C_0(z) \cos \delta_0(z), \quad N_{j+1}(z) - N_{j-1}(z) = -2C_j(z) \cos \delta_j(z) \quad (j > 0). \end{aligned}$$

Для $C_j(z)$ и $\delta_j(z)$ имеются таблицы [79]. Используя выражение для B_1 , вместо (25.19) получим

$$q = \pi r C_0 \left[iP (\sin \delta_1 e^{-i(\delta_1 - \delta_0)} - \sin \delta_0) - \frac{\rho_0 \omega^2 w}{2C_1 \alpha} e^{-i(\delta_0 - \delta_1)} \right] e^{i\omega t}. \quad (25.20)$$

Здесь $P = -i\omega \rho_0 A$ — амплитуда давления падающей волны. Неподвижное абсолютно жесткое кольцо ($w = 0$) испытывает давление, равное

$$q = i\pi r C_0 P [\sin \delta_1 e^{-i(\delta_1 - \delta_0)} - \sin \delta_0] e^{i\omega t}. \quad (25.21)$$

Асимптотические значения C_j и δ_j при малых αr следующие:

$$C_0 \approx \frac{4}{\pi \alpha r}, \quad \delta_0 \approx \pi \left(\frac{\alpha r}{2} \right)^2, \quad C_1 \approx \frac{2}{\pi (\alpha r)^2}, \quad \delta_1 \approx -\pi \left(\frac{\alpha r}{2} \right)^2 = -\delta_0.$$

Поэтому выражение силы, действующей на тонкое кольцо, упрощается

$$q = -\pi \alpha r^2 \left[2iP (1 - i\delta_0) + \frac{\rho_0 \omega^2 w}{\alpha} (1 - 2i\delta_0) \right] e^{i\omega t}. \quad (25.22)$$

При $w = 0$ и $\delta_0 \rightarrow 0$ $q = -2i\pi P r^2 e^{i\omega t}$. Как видно, усилие на неподвижное кольцо при малых αr линейно зависит от волнового числа α (обратно пропорционально длине волны), квадратично — от радиуса поперечного сечения кольца.

Полагая в (25.22) $w_1 = 0$, получаем значение бокового давления $q_2 \exp(i\omega t)$ на абсолютно жесткое кольцо, подвешенное на гибких подвесках. Полагая же $w_2 = 0$, получаем давление $q_1 \exp(i\omega t)$ на гибкое кольцо, закрепленное на абсолютно жестких опорах. Рассмотрим эти два крайних случая.

Изгибно-крутильные колебания кольца (по бинормали) при пренебрежении инерцией поворота элемента, внутреннего трения, растягивающего действия давления жидкости, находящейся внутри трубчатого кольца, описываются уравнениями [118], [46]

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_1}{d\theta^4} - \frac{1}{\lambda} \frac{d^2 w_1}{d\theta^2} - \frac{R(1+\lambda)}{\lambda} \frac{d^2 \gamma}{d\theta^2} - \frac{mR^4 \omega^2}{B} w_1 &= q_1 \frac{R^4}{B}, \\ \frac{d^2 w_1}{d\theta^2} + \frac{R}{(1+\lambda)} \frac{d^2 \gamma}{d\theta^2} - \frac{R\lambda}{(1+\lambda)} \gamma &= 0, \end{aligned} \quad (25.23)$$

где m — масса единицы длины кольца; λ — отношение жесткости на изгиб $B = EJ$ к жесткости на кручение; для круглого и трубчатого сечений $\lambda = 1 + \nu$. В (25.23) уже учтен временной множитель $e^{i\omega t}$.

Для смещений w_2 имеем уравнение

$$-m\omega^2 w_2 + cw_2 = q_2, \quad (25.24)$$

где $c = nC/2\pi R$ жесткость гибких подвесок, отнесенная к единице длины кольца, C — жесткость одной подвески.

Подставляя в уравнение (25.24) значение q_2 из (25.22), получаем

$$w_2 = \frac{2\pi\alpha r^2 P (i + \delta_0)}{m \left[\Omega_2^2 - \left(1 + \frac{m^*}{m}\right) \omega^2 + 2i \frac{m^*}{m} \delta_0 \omega^2 \right]}. \quad (25.25)$$

Здесь $\Omega_2 = \sqrt{c/m}$ — собственная частота жесткого кольца, установленного на гибких подвесках; $m^* = \pi r^2 \rho_0$ — присоединенная масса среды, равная массе газа, вытесненного кольцом единицы длины. Собственная частота колебаний кольца в среде равна

$$\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \left(1 + \frac{m^*}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Последний член в знаменателе (25.25) представляет собой аэродинамическое демпфирование. Так как $\delta_0 = \pi (r\omega/2a)^2$, оно от частоты падающих волн зависит в четвертой степени. Очень легкое ($m \approx m^*$) и слабо закрепленное ($c \rightarrow 0$) кольцо волны перемещают с амплитудой

$$w_2 = -P\alpha (i + \delta_0)/\rho_0 \omega^2 (1 - 2i\delta_0).$$

Интегрируя уравнения (25.23) при функциях (25.13) по методу Бубнова — Галеркина, получаем амплитуды перемещения и поворота сечения

$$W_1 = \frac{8\pi i \alpha r^2 P (1 - i\delta_0)}{3m \left[\Omega_1^2 - \left(1 + \frac{m^*}{m}\right) \omega^2 + 2i \frac{m^*}{m} \delta_0 \omega^2 \right]}, \quad (25.26)$$

$$\Gamma = -\frac{n^2 (1 + \lambda)}{R (n^2 + 3\lambda)} W_1,$$

где

$\Omega_1^2 = \frac{B}{mR^4} \left[\frac{n^2}{3} \left(n^2 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{n^4 (1 + \lambda)^2}{3\lambda (n^2 + 3\lambda)} \right]$ — квадрат собственной частоты упругого кольца.

Для сравнения с экспериментальными данными следует брать вещественные части выражений (25.25), (25.26). Изгибающий и крутящий моменты равны [118]

$$M_1 = -\frac{B}{R^2} \left(\frac{d^2 w_1}{d\theta^2} - R\gamma \right), \quad M_2 = \frac{B}{\lambda R^2} \left(\frac{dw_1}{d\theta} + R \frac{d\gamma}{d\theta} \right). \quad (25.27)$$

Для проверки полученных расчетных формул было проведено испытание трех колец в акустической среде, характеристики которых приведены в табл. 6.

Таблица 6

Кольцо	Материал	$E \cdot 10^{-8}$, бар	$2r$, см	$2r_1$, см	R , см	$m \cdot 10^{-3}$, кг/см	Расчетная частота, гц	Эксперимен- тальная частота, гц
I	АМЦМ	0,5	2,7	2,5	15	2,23	1235	1240
II	АМг	0,72	1	0,8	15	0,696	550	534
III	ст. 20	2,1	1	0,8	15	2,38	523	503

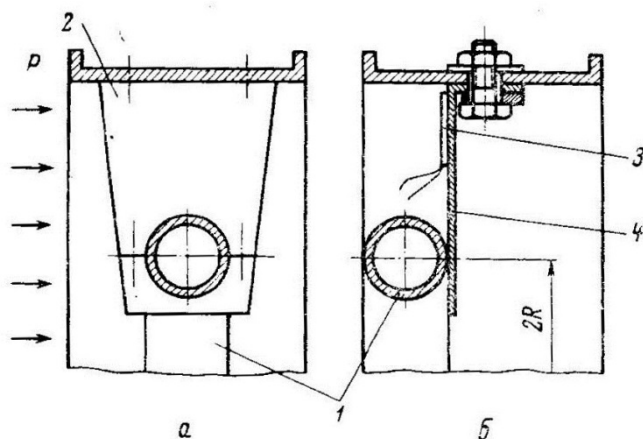


Рис. 57

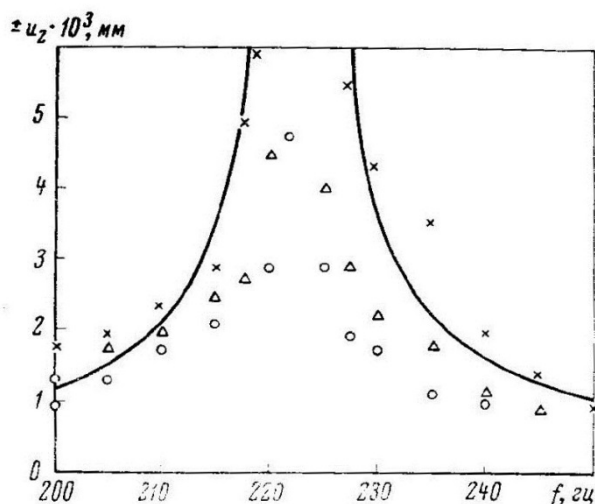


Рис. 58

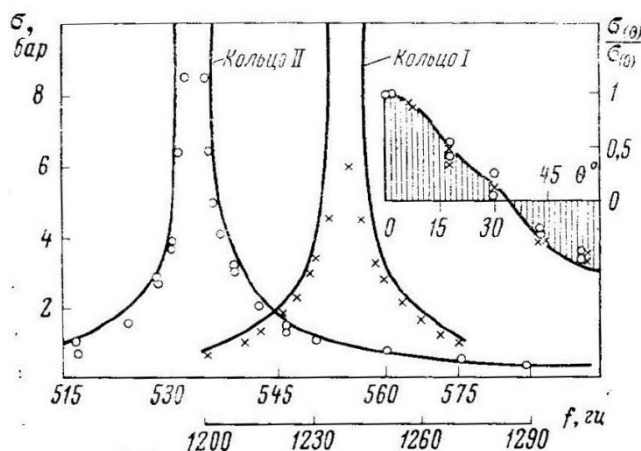


Рис. 59

Кольцо закреплялось в круглом корпусе на трех опорах (рис. 56). Акустическое поле создавалось с помощью динамика РД-10 мощностью 10 в, расположенного соосно с кольцом на некотором удалении от корпуса. Интенсивность звука в плоскости расположения кольца определялась шумомером типа Ш-63. Интенсивность звука $\Delta\beta$ и звуковое давление p связаны соотношением

$$p = 2,04 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{\frac{\Delta\beta}{20}}.$$

Максимальная интенсивность звука, создаваемая динамиком, равна $\Delta\beta = 121-122 \text{ дб}$.

Изгибные деформации кольца 1 на жестких опорах 2 (рис. 57, а) определялись с помощью тензодатчиков 3. Для замера деформаций использовался тензометрический усилитель с потенциометрическим входом, а выходной сигнал регистрировался по экрану катодного осциллографа ЭО-7.

Перемещения кольца как жесткого тела на гибких опорах 4 определялись по показаниям тензодатчиков, наклеенных на пластинчатых опорах (рис. 57, б). Предварительно путем статического нагружения опор были определены их жесткости и коэффициенты перевода показаний тензодатчиков в перемещения кольца. Жесткость гибких опор составляет примерно одну сотую часть жесткости кольца на изгиб.

Экспериментальные и расчетные значения частот собственных колебаний кольца на гибких опорах составляют $f_2 = 222 \text{ гц}$ и $f_2 = \Omega_2/2\pi = 220 \text{ гц}$. Далее замерялись перемещения кольца при разных частотах возбуждающей силы. На рис. 58 нанесены соответствующие экспериментальные точки, а также амплитуды колебаний, вычисленные по (25.25). Как видно из графика, расчетные и

экспериментальные значения амплитуд при нерезонансных колебаниях кольца совпадают.

Экспериментальные значения собственных частот изгибно-крутильных колебаний колец на жестких опорах, а также расчетные значения, вычисленные по формуле (25.26), приведены в табл. 6.

Упругие деформации колец замерялись при разных частотах и интенсивностях акустических волн. На рис. 59 приведены экспериментальные (О и ×) и расчетные значения напряжений около опор $\sigma(0)$ (сплошная линия) при постоянной интенсивности звука и разных частотах звукового давления, а также эпюра деформаций для половины дуги между опорами.

Изгибные напряжения вычислялись по формуле

$$\sigma = \frac{8\pi r^2 R^2 P (n^2 + 3\lambda) f(\omega) f(\theta)}{J[(n^2 - 1)^2 + 2(n^2\lambda + 1)]},$$

найденной с помощью соотношений (25.13), (25.26) и (25.27). Функции для $f(\omega)$ и $f(\theta)$ следующие:

$$f(\omega) = \frac{\alpha r (i + \delta_0)}{\left[1 - \left(1 + \frac{m^*}{m} \right) \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 + 2 \frac{m^*}{m} i \delta_0 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right]},$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cos n\theta + \frac{1 + \lambda}{n^2 + 3\lambda} \sin^2 \frac{n}{2} \theta.$$

§ 26. Две задачи о возбуждении волн в газе

Параметрическое возбуждение акустических волн [50]

В первом разделе § 20 по виду уравнения (20.4) был сделан вывод о возможности возбуждения в сжимаемой жидкости волн совершенно иной структуры, чем вызываемые первоначально какой-либо силой. Действительно, при работе, например, плоского поршня в замкнутой жесткой трубе имеют место лишь плоские стоячие волны (соответствующий потенциал скоростей обозначим через φ). Однако при некоторых соотношениях между собственными частотами ω_{kmn} газовой полости и частотой ω работы поршня могут возбуждаться неплоские волны ψ . Движение с потенциалом ψ описывается уравнением (20.4) или (11.2). Если предположить, что

$$\varphi = \varphi(x, t), \quad \psi = \psi(x, y, z, t), \quad U_0 = 0,$$

то уравнение (11.2) представится в виде

$$\left[a^2 - (\kappa - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - (\kappa - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (26.1)$$

Как видно из (26.1), одним из периодически изменяющихся параметров является скорость звука. Она претерпевает изменения в результате колебаний давления и плотности или в результате адиабатических колебаний температуры среды при возбуждении первичных волн. Периодическое изменение параметров системы приводит к ее раскачке. В несжимаемой жидкости, полностью заполняющей полость с жесткими стенками, возбуждение параметрических колебаний невозможно (уравнение для потенциала $\nabla^2 \psi = 0$). Задача может быть поставлена, если в системе имеется свободная поверхность.

Пусть первичные продольные волны возбуждаются источниками, расположенными в каком-либо сечении внутри трубы с обоими закрытыми кон-

пами. Соответствующий потенциал скоростей можно представить в виде суммы собственных функций

$$\varphi = \sum_{q=0}^{\infty} A_q \cos \frac{q\pi x}{L} \cos \omega t,$$

где коэффициенты A_q зависят от мощности источников (§ 9). Функцию ψ примем в виде осесимметричных стоячих волн

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{km}(t) J_0(\gamma_m r) \cos \frac{k\pi x}{L}. \quad (26.2)$$

Здесь γ_m — корни уравнения $J_1(\gamma R) = 0$; $m, k = 0, 1, 2, \dots$

Для простоты вычислений ограничимся в ряду для φ одним членом

$$\varphi = A_q \cos \frac{q\pi x}{L} \cos \omega t. \quad (26.3)$$

Подставим (26.2) и (26.3) в уравнение (26.1). Умножив последнее на $\cos \frac{j\pi x}{L}$ и проинтегрировав в пределах от 0 до L , получаем

$$\begin{aligned} M_j \ddot{B}_{j,m}(t) + A_q \frac{\omega_q}{a^2} \cos \omega t \left[\left(\omega_{q-j} K_{q-j} - \frac{\kappa-1}{2} \omega_q M_{q-j} \right) \dot{B}_{q-j,m}(t) + \right. \\ \left. + \left(\omega_{q+j} K_{q+j} - \frac{\kappa-1}{2} \omega_q M_{q+j} \right) \dot{B}_{q+j,m}(t) \right] + \omega_{j,m}^2 M_j B_{j,m}(t) - \\ - A_q \frac{\omega}{a^2} \sin \omega t \left[\left(\omega_q \omega_{q-j} K_{q-j} - \frac{\kappa-1}{2} \omega_{q-j,m}^2 M_{q-j} \right) B_{q-j,m}(t) + \right. \\ \left. + \left(\omega_q \omega_{q+j} K_{q+j} - \frac{\kappa-1}{2} \omega_{q+j,m}^2 M_{q+j} \right) B_{q+j,m}(t) \right] = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (26.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_q &= \frac{q\pi a}{L}, \quad \omega_{j,m} = a \sqrt{\left(\frac{j\pi}{L} \right)^2 + \gamma_m^2}, \\ \omega_{q \pm j, m} &= a \sqrt{(q \pm j)^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \gamma_m^2}, \quad \omega_{q \pm j} = \frac{(q \pm j)\pi a}{L}, \\ M_j &= \begin{cases} L & (k = j = 0), \\ L/2 & (k = j \neq 0), \\ 0 & (k \neq j), \end{cases} \\ M_{q \pm j} &= \begin{cases} L & (k = q \pm j = 0), \\ L/2 & (k = q \pm j \neq 0), \\ 0 & (k \neq q \pm j), \end{cases} \\ K_{q \pm} &= \begin{cases} 0 & (k = q \pm j = 0), \\ L/2 & (k = q \pm j \neq 0), \\ 0 & (k \neq q \pm j). \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение (26.4) указывает на взаимодействие различных мод продольных колебаний газа. Исследование этого уравнения в общем случае не представляется возможным. Поэтому в дальнейшем рассмотрим частный случай, когда по длине трубы укладывается вдвое меньше вторичных волн, чем первичных, т. е. $q = 2j$. Пусть $j \neq 0$ (значение $j = 0$ в данном случае не имеет физического смысла). Тогда $M_{q/2} = L/2$, $M_{q \pm q/2} = L/2$, $K_{q \pm q/2} = L/2$ и

уравнение (26.4) приводится к виду

$$\ddot{B}_{q/2, m}(t) + 2A_q \left(\frac{\omega_{q/2}}{a} \right)^2 \cos \omega t [(2 - \kappa) \dot{B}_{q/2, m}(t) + (4 - \kappa) \dot{B}_{3q/2, m}(t)] + \\ + \omega_{q/2, m}^2 B_{q/2, m}(t) - A_q \frac{\omega}{a^2} \sin \omega t \left[\left(\omega_q \omega_{q/2} - \frac{\kappa - 1}{2} \omega_{q/2, m}^2 \right) B_{q/2, m}(t) + \right. \\ \left. + \left(\omega_q \omega_{3q/2} - \frac{\kappa - 1}{2} \omega_{3q/2, m}^2 \right) B_{3q/2, m}(t) \right] = 0 \quad (q/2 = 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь было учтено, что $\omega_q = 2\omega_{q/2}$. Отбрасывая в этом уравнении побочные члены и обозначая

$$\varepsilon_q = 2A_q (2 - \kappa) \left(\frac{\omega_{q/2}}{a} \right)^2, \quad \eta_q = 2A_q \frac{\omega}{a^2} \left(\frac{\omega_{q/2}^2}{\omega_{q/2, m}^2} - \frac{\kappa - 1}{4} \right),$$

найдем

$$\ddot{B}_{q/2, m}(t) + \varepsilon_q \dot{B}_{q/2, m}(t) \cos \omega t + \omega_{q/2, m}^2 (1 - \eta_q \sin \omega t) B_{q/2, m} = 0. \quad (26.5)$$

Введем новую переменную по формуле

$$B_{q/2, m}(t) = \Psi_{q/2, m}(t) \exp \left(-\frac{\varepsilon_q}{2\omega} \sin \omega t \right),$$

где экспонента — ограниченная функция. Если пренебречь величиной $(\varepsilon_q/\omega)^2$ по сравнению с единицей, то согласно (26.5) уравнением для $\Psi_{q/2, m}$ будет

$$\ddot{\Psi}_{q/2, m} + \omega_{q/2, m}^2 \left[1 - \left(\eta_q - \frac{\omega \varepsilon_q}{2\omega_{q/2, m}^2} \right) \sin \omega t \right] \Psi_{q/2, m} = 0.$$

Таким образом, мы пришли к уравнению Матье, которое, как известно, имеет области неограниченных решений. Эти решения соответствуют продольно-поперечным колебаниям газа.

Коэффициент возбуждения $2\mu_q = \eta_q - \omega \varepsilon_q / 2\omega_{q/2, m}^2$ обычно мал. Поэтому области параметрических колебаний можно определить по простым формулам [13]. Для первой зоны имеем

$$\frac{\omega}{2\omega_{q/2, m}} = \sqrt{1 \pm \mu_q} = 1 \pm \frac{1}{2} \mu_q.$$

Учитывая, что $a^2 = \kappa p_0 / \rho_0$, коэффициент $2\mu_q$ представим в виде

$$2\mu_q = \frac{P_q}{2p_0} \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{\alpha_{q/2}^2 - \gamma_m^2}{\alpha_{q/2}^2 + \gamma_m^2} \right),$$

где $P_q = \rho_0 A_q \omega$ — амплитуда начального звукового давления, $\alpha_{q/2}$, γ_m — волновые числа продольных и радиальных волн. Напомним, что $\alpha_{q/2} = q\pi/2L$, $\gamma_m R = 0; 3,83; 7,02 \dots$. Таким образом, ширина областей параметрических колебаний зависит от отношений звукового давления к равновесному P_q/p_0 и волновых чисел $\gamma_m/\alpha_{q/2}$. Отношение P_q/p_0 для акустических колебаний мало.

Акустическое поле во вращающейся среде

Потенциал возмущений в равномерно движущемся и вращающемся с постоянной циркуляцией газе описывается уравнением (2.15). Решение его в общем виде представляет большие трудности, так как a и, следовательно, M и N зависят от радиуса. Мы приведем его решение только для случая вращающегося газа в длинной цилиндрической полости с центральным телом (рис. 60).

Перепишем уравнение (2.15), положив в нем $M = 0$,

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2N}{ar} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial t} + N^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (26.6)$$

где

$$N = V_0 R / ar, \quad a^2 = a_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{RV_0}{r} \right)^2.$$

Здесь a_1 — скорость звука в покое газе. Считаем, что наибольшая скорость V (при $r = R_1$) не превышает значения $a(R_1)$

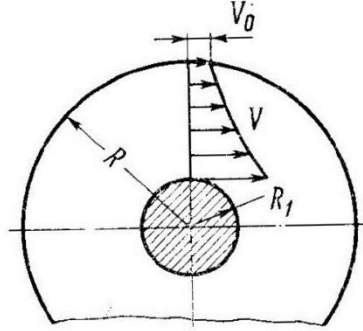


Рис. 60

Уравнение (26.6) будем решать методом разделения переменных. Полагая $\varphi = X(x) Y(r, \theta) e^{i\omega t}$, после некоторых преобразований приходим к уравнениям

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0, \quad (26.7)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} - 2v \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{r^2}{1-N^2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1+N^2}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} + \gamma^2 Y \right) = 0,$$

где

$$v = \frac{iN\mu r}{1-N^2}, \quad \mu = \frac{\omega}{a}, \quad \mu^2 = \alpha^2 + \gamma^2.$$

Второе из этих уравнений не разделяется. С помощью подстановки $Y = Y_1 e^{v\theta}$ избавляемся от члена $2v \partial Y / \partial \theta$ и приводим его к виду

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial \theta^2} + \frac{r^2}{1-N^2} \left\{ \frac{\partial^2 Y_1}{\partial r^2} + \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1+N^2}{r} \right) \frac{\partial Y_1}{\partial r} + \right. \\ \left. + \left[\gamma^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{1+N^2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-N^2}{r^2} v^2 \right] Y_1 \right\} = 0.$$

Положим

$$Y_1 = \Theta(\theta) \Gamma(r) \exp \left[-\frac{1}{2} \int \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1+N^2}{r} \right) dr \right] = \\ = \Theta(\theta) \Gamma(r) e^{-vr}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a_1}{a} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}.$$

Тогда для функций $\Theta(\theta)$ и $\Gamma(r)$ получим уравнения

$$\frac{d^2 \Gamma}{dr^2} - \left[\gamma^2 - \frac{-1+N^4+4(1-N^2)(v^2+n^2)}{4r^2} - \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (N^2) \right] \Gamma = 0, \quad (26.8) \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0.$$

Если воспользоваться зависимостью a от a_1 (26.6), то уравнение для $\Gamma(r)$

можно привести к виду

$$\frac{d^2\Gamma}{dr^2} - \left\{ \frac{1 + \kappa' N^2}{1 - N^2} \mu_1^2 - \alpha^2 - \frac{1}{r^2} [p^2 - (p^2 + 1) N^2 - \kappa' N^4] \right\} \Gamma = 0, \quad (26.9)$$

где

$$\kappa' = (\kappa - 1)/2, \quad p^2 = n^2 - 1/4, \quad \mu_1 = \omega/a_1.$$

Теперь в фигурной скобке уравнения (26.9) только величина N зависит от r .

Учитывая, что $N < 1$, решение уравнения (26.9) будем искать в виде разложения по N^2

$$\Gamma = \sum_{s=0} N^{2s} \Gamma_s = \Gamma_0 + N^2 \Gamma_1 + \dots \quad (26.10)$$

Введем (26.10) в (26.9) и воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (N^{2s}) = \frac{2s}{r^2} [(1 + 2s) N^{2s} + \kappa' (3 + 4s) N^{2(s+1)} + 2\kappa'^2 (s + 1) N^{2(s+2)}].$$

Приравнявая нулю выражения при одинаковых N^{2s} , получим следующие уравнения для определения Γ_s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial r^2} + \left(\gamma_1^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) \Gamma_0 &= 0 \quad (\gamma_1^2 = \mu_1^2 - \alpha^2), \\ \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial r^2} - \frac{4}{r} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial r} + \left(\gamma_1^2 + \frac{6 - p^2}{r^2} \right) \Gamma_1 &= -\mu_1^2 (1 + \kappa') \Gamma_0 - \frac{1 + p^2}{r^2} \Gamma_0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial^2 \Gamma_s}{\partial r^2} - \frac{4s}{r} \frac{\partial \Gamma_s}{\partial r} + \left[\gamma_1^2 + \frac{2s(1 + 2s) - p^2}{r^2} \right] \Gamma_s &= -\mu_1^2 (1 + \kappa') \sum_{l=0}^{s-1} \Gamma_l - \\ &- \frac{1}{r^2} [2(s-1)(4s-1)\kappa' + 1 + p^2] \Gamma_{s-1} - \\ &- \frac{\kappa'}{r^2} [4(s-2)(s-1)\kappa' + 1] \Gamma_{s-2} + \frac{4\kappa'}{r} (s-1) \frac{\partial \Gamma_{s-1}}{\partial r} \\ &(\Gamma_{-1} = \Gamma_{-2} = \dots = 0). \end{aligned} \quad (26.11)$$

Первое уравнение (26.11) описывает возмущения в покоящейся среде. Дальнейшие уравнения дают поправку к этому основному решению (для $N = 0$), обусловленную средним движением среды. Как видно из системы (26.11), каждое Γ_s определяется по известному Γ_{s-1} . По фундаментальной системе решений однородного уравнения ζ_s и χ_s частное решение неоднородного уравнения находим по методу вариации постоянных

$$\Gamma'_s = \zeta_s \int \frac{\chi_s h_s}{\eta_s} dr - \chi_s \int \frac{\zeta_s h_s}{\eta_s} dr.$$

Здесь

$$\eta_s = \frac{\partial \zeta_s}{\partial r} \chi_s - \frac{\partial \chi_s}{\partial r} \zeta_s,$$

h_s — правая часть s -го уравнения, умноженная на r^2 .

В нашем случае

$$\chi_s = r^{\frac{1}{2} + 2s} J_n(\gamma_1 r), \quad \zeta_s = r^{\frac{1}{2} + 2s} N_n(\gamma_1 r), \quad \eta_s = \frac{2}{\pi} r^{4s}.$$

Следовательно,

$$\Gamma'_s = r^{\frac{1}{2} + 2s} \cdot G_s,$$

где

$$G_s = \frac{\pi}{2} \left[N_n(\gamma_1 r) \int r^{\frac{1}{2}-2s} J_n(\gamma_1 r) h_s(\gamma_1 r) dr - \right. \\ \left. - J_n(\gamma_1 r) \int r^{\frac{1}{2}-2s} N_n(\gamma_1 r) h_s(\gamma_1 r) dr \right]. \quad (26.12)$$

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая решения уравнений (26.7), (26.8), получаем общее выражение для потенциала скоростей

$$\varphi = (A_1 e^{-i\alpha x} + A_2 e^{i\alpha x}) (B_1 e^{-in\theta} + B_2 e^{in\theta}) e^{v(\theta-1)} \left(\frac{a_1}{a} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \times \\ \times \sum_{s=0} (Nr)^{2s} [C_s^{(1)} J_n(\gamma_1 r) + C_s^{(2)} N_n(\gamma_1 r) + G_s] e^{i\omega t}. \quad (26.13)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением задачи с точностью N^2 . Так как

$$h_0 = 0, \quad h_1 = -[r^2 \mu_1^2 (\kappa' + 1) + 1 + p^2] \Gamma_0,$$

а

$$\Gamma_0 = C_0^{(1)} J_n(\gamma_1 r) + C_0^{(2)} N_n(\gamma_1 r),$$

то согласно (26.12)

$$G_0 = 0,$$

$$G_1 = \frac{\pi}{4} z C_0^{(1)} \left\{ K_n(z) \left[\frac{1+\kappa'}{2} z J_{n-1}(z) - \frac{1+p^2}{n} \frac{\partial J_n(z)}{\partial n} \right] - \frac{1+\kappa'}{\pi} J_{n+1}(z) \right\} + \\ + \frac{\pi}{4} z C_0^{(2)} \left\{ K_n(z) \left[\frac{1+\kappa'}{2} z N_{n-1}(z) - \frac{1+p^2}{n} \frac{\partial N_n(z)}{\partial n} \right] - \frac{1+\kappa'}{\pi} N_{n+1}(z) \right\}.$$

Здесь

$$z = \gamma_1 r, \quad K_n(z) = N_n(z) J_{n+1}(z) - J_n(z) N_{n+1}(z).$$

Заметим, что интегралы взяты по первому методу Ломмеля. Выражение (26.13) примет вид

$$\varphi = (A_1 e^{-i\alpha x} + A_2 e^{i\alpha x}) (B_1 e^{-in\theta} + B_2 e^{in\theta}) e^{v(\theta-1)} \left(\frac{a_1}{a} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \times \\ \times \left[C_0^{(1)} \left\{ J_n(z) + \frac{\pi z}{4} \left[K_n(z) \left(\frac{1+\kappa'}{2} z J_{n-1}(z) - \frac{1+p^2}{n} \frac{\partial J_n(z)}{\partial n} \right) - \right. \right. \right. \quad (26.14) \\ \left. \left. \left. - \frac{1+\kappa'}{\pi} J_{n+1}(z) \right] N^2 r^2 \right\} + C_0^{(2)} \left\{ N_n(z) + \frac{\pi z}{4} \left[K_n(z) \left(\frac{1+\kappa'}{2} z N_{n-1}(z) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1+p^2}{n} \frac{\partial N_n(z)}{\partial n} \right) - \frac{1+\kappa'}{\pi} N_{n+1}(z) \right] N^2 r^2 \right\} + [C_1^{(1)} J_n(z) + C_1^{(2)} N_n(z)] N^2 r^2 \right] \times \\ \times e^{i\omega t}.$$

В случае $N = 0$ ($a = a_1$, $v = 0$) отсюда получаем известное выражение для потенциала возмущений в покоящейся среде.

Для того чтобы подчинить потенциал (26.14) каким-либо конкретным граничным условиям (например, $\partial\varphi/\partial r = 0$), нужно преодолеть значительные трудности, связанные с дифференцированием весьма сложной функции. В частности, сложно иметь дело с производными бесселевых функций по индексам $\partial J_n(z)/\partial n$, $\partial N_n(z)/\partial n$. Однако в некоторых частных случаях удается несколько упростить выражение для φ . Например, для $\alpha = 0$, $n = 1$,

вычисляя интегралы (26.12) по второму методу Ломмеля, будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi = & (B_1 e^{-in\theta} + B_2 e^{in\theta}) e^{v(\theta-1)} \left(\frac{a_1}{a} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left[C_0^{(1)} \left\{ J_1(z) - \left[\frac{21}{4z} J_0(z) + \right. \right. \right. \\ & + \frac{2(1+\kappa')}{z} J_2(z) - \pi z^2 K_1(z) J_0(z) \left. \left. \right\} N^2 r^2 \right\} + C_0^{(2)} \left\{ N_1(z) - \right. \\ & - \left[\frac{21}{4z} N_0(z) + \frac{2(1+\kappa')}{z} N_2(z) - \pi z^2 K_1(z) N_0(z) \right] N^2 r^2 \left. \right\} + \\ & + [C_1^{(1)} J_1(z) + C_1^{(2)} N_1(z)] N^2 r^2 \left. \right] e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Приведем другое приближенное решение, справедливое для течения в узком кольцевом канале, где скорость V по высоте канала изменяется весьма мало. Считая также $N = \text{const}$, первое уравнение (26.8) перепишем в виде

$$\frac{d^2 \Gamma}{dr^2} + \left(\bar{\gamma}^2 - \frac{4m^2 - 1}{4r^2} \right) \Gamma = 0,$$

где обозначено

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{1}{1-N^2} \mu^2 - \alpha^2, \quad m = \sqrt{(1-N^2)n^2 + \frac{1}{4}N^4}.$$

Решение его следующее

$$\Gamma = [C^{(1)} J_m(\bar{\gamma}r) + C^{(2)} N_m(\bar{\gamma}r)] \sqrt{r}. \quad (26.15)$$

В рассматриваемом случае $a = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Удовлетворяя с учетом этого приближенное выражение для потенциала Φ , содержащее (26.15), условиям $\partial\Phi/\partial r = 0$ ($r = R$, $r = R_1$), найдем уравнение для определения собственных частот колебаний газа, заключенного между двумя жесткими концентрическими цилиндрами

$$\frac{2zJ'_m(z) - N^2 J_m(z)}{2zN'_m(z) - N^2 N_m(z)} = \frac{2z_1 J'_m(z_1) - N^2 J_m(z_1)}{2z_1 N'_m(z_1) - N^2 N_m(z_1)}. \quad (26.16)$$

Здесь $z = \bar{\gamma}R$, $z_1 = \bar{\gamma}R_1$, а штрихом обозначено дифференцирование по $\bar{\gamma}r$.

При $N = 0$ ($\bar{\gamma} = \gamma = \sqrt{\mu^2 - \alpha^2}$, $m = n$) частотное уравнение есть

$$J'_n(z) N'_n(z_1) = J'_n(z_1) N'_n(z),$$

которое уже справедливо для любого отношения R/R_1 , а не только для $R/R_1 \sim 1$. В частности, при $R_1 = 0$ приходим к уравнению $J'_n(\gamma R) = 0$, которое уже встречалось в предыдущих главах. Для осесимметричных форм колебаний $n = 0$, $m = N^2/2$ и уравнение (26.16) приобретает вид

$$J_{\frac{N^2}{2}+1}(z) N_{\frac{N^2}{2}+1}(z_1) = N_{\frac{N^2}{2}+1}(z) J_{\frac{N^2}{2}+1}(z_1).$$

Трудности при расчете еще более возрастают, если наряду с дозвуковой зоной существует сверхзвуковая зона. При условии постоянности циркуляции кольцо, в котором $V > a$, возникает вблизи внутреннего жесткого контура ($R = R_1$) и по мере повышения скорости вращения газа расширяется по радиусу. Вопросы колебательных движений такой среды могут явиться предметом специальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л., Александров А. Я. Осесимметричные задачи теории упругости.— Труды II Всес. съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 3. М., изд-во «Наука», 1966.
2. Авдусский В. С. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике. М., Оборонгиз, 1960.
3. Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Куршин Л. М., Прусаков А. П. Расчет трехслойных панелей. М., Оборонгиз, 1960.
4. Александров А. Я., Трофимова Э. П. Приведенные упругие параметры сотовых заполнителей.— Сб. «Вопросы расчета элементов авиационных конструкций», № 2. М., Оборонгиз, 1959.
5. Алфутов Н. А. К расчету оболочек на устойчивость энергетическим методом.— Инж. сб., т. 22, 1955.
6. Алфутов Н. А., Разумеев В. Ф. Динамическая устойчивость опертой по одному краю конической оболочки, нагруженной осесимметричным давлением.— Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 10.
7. Андреев Н. Н., Русаков И. Г. Акустика движущейся среды. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
8. Балабух Л. И., Ганичев А. И. Молчанов А. Г., Две задачи о собственных колебаниях упругих систем с жидким наполнителем.— Сб. «Расчеты на прочность», вып. 12. М., изд-во «Машиностроение», 1966.
9. Балабух Л. И., Молчанов А. Г. Об одной краевой задаче теории колебаний с граничными условиями, зависящими от параметра.— ПММ, 1966, вып. 6.
10. Баррер М. и др. Ракетные двигатели. М., Оборонгиз, 1962.
11. Безухов Н. И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. М., изд-во «Машиностроение», 1965.
12. Блох В. И. Теория упругости. Харьков. Изд. Харьковского университета, 1964.
13. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
14. Болотин В. В. Некоторые новые задачи динамики оболочек.— Сб. «Расчеты на прочность», вып. 4. М., Машгиз, 1959.
15. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
16. Болотин В. В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости.— Инж. сб., т. XXIV, 1956.
17. Болотин В. В. Конечные деформации гибких трубопроводов.— Труды Моск. энерг. ин-та, вып. XIX. М., Госэнергоиздат, 1956.
18. Болотин В. В., Москаленко Ю. Н., Новицкий В. Н. Об устойчивости процесса горения в упругих камерах сгорания.— ПМТФ, 1968, № 6.
19. Боровченко Е. А. О некоторых методах интенсификации процессов горения.— Труды Ин-та энергетики АН БССР, 1960, вып. 9.
20. Бояришинов С. В. Основы расчета симметричных оболочек. Изд. МВТУ, 1956.
21. Бреславский В. Е. О колебаниях цилиндрических оболочек.— Инж. сб., т. 16, Изд-во АН СССР, 1953.
22. Бреславский В. Е. Колебания цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью.— Труды IV Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1964.
23. Бублик Б. Н., Меркулов В. И. О динамической устойчивости тонких оболочек, наполненных жидкостью.— ПММ, 1960, т. 24, № 5.
24. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. М., Изд-во «Советское радио», 1953.
25. Васицына Т. Н. Изгиб и свободные колебания трехслойных ортотропных цилиндрических оболочек несимметричного строения.— Сб. «Расчеты элементов авиационных конструкций», вып. 4. М., изд-во «Машиностроение», 1965.
26. Власов В. З. Общая теория оболочек. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
27. Галиев Ш. У., Ильгамов М. А. Колебания цилиндрической оболочки при высокочастотных колебаниях внутреннего давления.— Изв. вузов, Авиационная техника, 1967, № 2.

28. Галиев Ш. У., Ильгамов М. А. Колебания цилиндрической оболочки, вызванные нелинейными возмущениями газовой среды. — Материалы юбилейной конф. Казанского физ.-техн. ин-та АН СССР, Казань 1966.
29. Галиев Ш. У. Колебания цилиндрической оболочки, вызванные нелинейными возмущениями газовой среды. — Труды VI конф. по теории оболочек и пластинок. М., изд-во «Наука», 1966.
30. Галиев Ш. У. Колебания сжимаемой жидкости в упругой цилиндрической оболочке. — Труды семинара по теории оболочек, вып. 1, 1968 (Казанск. физико-технический институт АН СССР).
31. Гамбург Д. Ю. Газификация пылевидного топлива в пульсирующем потоке. — Газовая промышленность, 1960, № 5.
32. Гольденблат И. И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных конструкций. М., Стройиздат, 1947.
33. Гонткевич В. С. Собственные колебания оболочек в жидкости. Изд-во «Наукова думка», 1964.
34. Горьков Л. П. Нелинейные акустические колебания столба газа в закрытой трубе. — Инж. ж., 1963, т. III, вып. 2.
35. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
36. Грегуш П. Воздействие звука на процессы горения. — Акуст. журн., 1962, 8, № 4.
37. Григолюк Э. И. О малых колебаниях тонких упругих конических оболочек. — Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.
38. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек. Новосибирск. Западносиб. кн. изд-во, 1966.
39. Громека И. С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубах. — Собр. соч. М., Изд-во АН СССР, 1952.
40. Гуляев А. И., Кузнецов В. М. Колебания газа с большой амплитудой в закрытой трубе. — Инж. ж., 1963, т. III, вып. 2.
41. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. — Избр. соч., т. II. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
42. Зуев В. С., Скубачевский Л. С. Камеры сгорания воздушно-реактивных двигателей. М., Оборонгиз, 1958.
43. Иванов В. А., Ильгамов М. А. Исследование собственных колебаний сферической оболочки, содержащей сплошное упругое тело и газ. — «Исследования по теории пластин и оболочек», сб. V. Казань, Изд. КГУ, 1967.
44. Иванов В. А., Ильгамов М. А. Вынужденные колебания двух замкнутых вязкоупругих сфер. — Материалы юбилейной конф. Казанского физ.-техн. ин-та АН СССР. Казань, 1967.
45. Иванюта Э. И., Финкельштейн Р. М. Исследование осесимметричных колебаний цилиндрических оболочек. — Исследования по упругости и пластичности, сб. 2. Ленинград, ЛГУ, 1963.
46. Ильгамов М. А. Расчет на колебание упругих колец. — Труды Уфимского авиационного ин-та им. С. Орджоникидзе, 1960, вып. V.
47. Ильгамов М. А. К расчету упругих круговых колец на колебания. — Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. общая, 1961, Казань, № 1.
48. Ильгамов М. А., Муштаров Х. М. Некоторые задачи статической и динамической устойчивости трехслойных пластин с заполнителем. — Труды Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Казань, 1961.
49. Ильгамов М. А. Вынужденные и параметрические колебания трехслойных пластин. — Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1962, № 3.
50. Ильгамов М. А. О параметрическом возбуждении колебаний в сплошной среде. — Труды семинара по теории оболочек, вып. 1, 1968 (Казанск. физико-технический институт АН СССР).
51. Ильгамов М. А. и др. О периодических ударных волнах в газе. Тезисы докладов конференции по проблеме колебаний механических систем. Киев, «Наукова думка», 1968.
52. Ильгамов М. А. Колебания цилиндрической оболочки при вибрационном горении в ней топлива. — Труды Всес. конф. по вибрационному и пульсационному горению. Казань, 1962.
53. Ильгамов М. А. Об одной задаче вынужденных осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки. — Исследования по теории пластин и оболочек, сб. II. Казань, Изд. Каз. ун-та, 1964.
54. Ильгамов М. А. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки под действием пульсаций давления. — Исследования по теории пластин и оболочек, сб. III, Казань, Изд. Каз. ун-та, 1965.
55. Ильгамов М. А. Колебания цилиндрических оболочек в акустической среде. — Исследования по теории пластин и оболочек, сб. III. Казань, Изд. Каз. ун-та, 1965.
56. Ильгамов М. А. Параметрические колебания конической оболочки. — Исследования по теории пластин и оболочек, сб. IV. Казань, Изд. Каз. ун-та, 1966.
57. Ильгамов М. А., Камалов А. З. Свободные и параметрические колебания цилиндрической оболочки бесконечной длины в акустической среде. — Изв. вузов, Авиационная техника, 1966, № 4.

58. *Ильгамов М. А., Камалов А. З.* Колебания цилиндрической оболочки конечной длины в акустической среде. — Исследования по теории пластин и оболочек, сб. IV. Казань, Изд. Каз. ун-та, 1966.
59. *Ильгамов М. А.* Вынужденные колебания замкнутой цилиндрической оболочки в акустической среде. — Материалы юбилейной конф. Казанского физ.-техн. ин-та АН СССР. Казань, 1966.
60. *Ильгамов М. А.* Колебания цилиндрической оболочки, содержащей сплошное упругое тело и газ. — Материалы юбилейной конф. Казанского физ.-техн. ин-та АН СССР. Казань, 1967.
61. *Ильгамов М. А., Сабитов М. З.* Вынужденные колебания прямоугольной панели и газа под действием источника звука, находящегося в полости. — Материалы юбилейной конф. Казанского физ.-техн. ин-та АН СССР, Казань, 1967.
62. *Ильгамов М. А., Якупов Р. Г.* Колебания упругого кольца в акустической среде. — ПМ, 1969, вып. 9.
63. *Камалов А. З.* Колебания цилиндрической оболочки, содержащей жидкость. — Материалы юбилейной конф. Казанского физ.-техн. ин-та АН СССР. Казань, 1966.
64. *Карпов Н. И., Палько Л. С.* Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки конечной длины в потоке невязкой сжимаемой жидкости. — ПМ, 1965, вып. 3.
65. *Кильчевский М. О., Селезов Т. Н., Кулиньска С. М., Палько Л. С.* Гидравлический удар в кружном трубопроводе. — Докл. АН УРСР, 1962, № 2.
66. *Кильчевский Н. А. и др.* Приближенный расчет продольно-радиальных колебаний системы цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. — ПМ, 1964, т. X, вып. 6.
67. *Кильчинская Г. А.* Динамическая неустойчивость круглых цилиндрических оболочек, находящихся под действием продольных сжимающих усилий при термопараметрическом резонансе. — Труды IV Всес. конф. по теор. оболочек и пластин. Ереван, Изд. АН Арм. ССР, 1964.
68. *Колесников К. С.* Вынужденные колебания потока идеальной сжимаемой жидкости в однородной прямой трубе. — Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1963, № 4.
69. *Корнишин М. С.* Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М., изд-во «Наука», 1964.
70. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. I, II. М., Гостехиздат, 1945.
71. *Куришин Л. М.* Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. — Сб. «Расчет пространственных конструкций», вып. VII. М., Стройиздат, 1961.
72. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
73. *Ливанов К. К.* Осесимметричные колебания свободно опертых цилиндрических оболочек. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
74. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
75. *Любимов В. М.* Осесимметричные колебания газа в цилиндрической полости с учетом упругости ее торцевой стенки. — Инж. ж., 1965, т. V, вып. 4.
76. *Мак-Клур Ф. Т., Харт Р. В., Берд Дж. Ф.* Ракетные двигатели твердого топлива как источники акустических колебаний. — Сб. «Исследование ракетных двигателей на твердом топливе». ИЛ, 1963.
77. *Мовчан А. А.* Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
78. *Моисеев Н. Н.* К теории колебаний упругих тел, имеющих жидкие полости. — ПММ, 1959, т. 23, № 5.
79. *Морз Ф.* Колебания и звук. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
80. *Морз Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики, т. I, II. ИЛ, 1958.
81. *Мошкин Е. К.* Динамические процессы в ЖРД. М., изд-во «Машиностроение», 1964.
82. *Мушин О. Н.* Динамический критерий устойчивости трубопровода с протекающей жидкостью. — Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
83. *Муштары Х. М.* Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными неправильностями в форме срединной поверхности. — ПММ, 1951, т. XV, вып. 6.
84. *Муштары Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Татгиз, 1957.
85. *Муштары Х. М.* О применимости различных теорий трехслойных пластин и оболочек. — Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1960, № 6.
86. *Натанзон М. С.* Параметрические колебания трубопровода, возбуждаемые пульсирующим расходом жидкости. — Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1962, № 4.
87. *Натушкин В. Ф., Рахимов И. С.* Колебания цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью. — Изв. вузов, Авиационная техника, 1964, № 3.
88. *Николаенко Н. А.* Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций. М., Изд-во «Машиностроение», 1967.
89. *Новиков С. С., Рязанцев Ю. С.* Об отражении плоской звуковой волны от открытого конца круглой трубы. — ПММ, 1962, вып. 2.
90. *Новиков Ю. Н., Швейко Ю. Ю.* Колебания и устойчивость двухслойной цилиндрической оболочки, в полостях которой течет жидкость. — Докл. научно-техн. конф. Моск. энерг. ин-та, секция энергомашиностроительная, 1965, вып. I.
91. *Новиков Ю. Н.* Исследование спектров частот собственных колебаний цилиндри-

- ческих оболочек, содержащих сжимаемую жидкость. — Труды VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., изд-во «Наука», 1966.
92. *Ониашвили О. Д.* Некоторые динамические задачи теории оболочек. М., Изд-во АН СССР, 1957.
 93. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М., изд-во «Наука», 1964.
 94. *Пратусевич Я. А.* Вариационные методы в строительной механике. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
 95. *Рабинович Б. И.* Об уравнениях поперечных колебаний оболочек с жидким заполнителем. — Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1964, № 1.
 96. *Рапопорт И. М.* Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью. М., изд-во «Машиностроение», 1966.
 97. *Раушенбах Б. В.* Вибрационное горение. М., Физматгиз, 1961.
 98. Реактивные двигатели. Серия «Аэродинамика больших скоростей и реактивная техника». М., Воениздат, 1962.
 99. *Ржевский С. Н.* Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.
 100. *Рогинский О. Г.* О вибрационном горении. — Акустический ж., 1961, вып. 2.
 101. *Свирский И. В.* Методы Бубнова — Галеркина и последовательных приближений и их применение к расчету оболочек. М., изд-во «Наука», 1968.
 102. *Селезов И. Т.* О распространении малых возмущений в упругой цилиндрической оболочке, наполненной жидкостью. — Прикл. мех., 1965, т. I, вып. 3.
 103. *Серенсен С. В.* и др. Несущая способность расчета деталей машин на прочность. М., Машгиз, 1963.
 104. *Скучик Е.* Основы акустики, т. I, II. ИЛ, 1959.
 105. *Слейтер Люси Дж.* Вырожденные гипергеометрические функции Изд. ВЦ АН СССР, 1966.
 106. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.
 107. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., Гостройиздат, 1960.
 108. Справочник машиностроителя, т. 3. М., Машгиз, 1962.
 109. *Степанюк В. В.* Колебания и устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки с несжимаемой идеальной жидкостью. — ПМ, 1965, т. I, вып. 2.
 110. *Степанюк В. В.* Поширення акустичних збурень в газі, що протікає в циліндричній і конічній оболонках обертання. — Прикл. мех., 1964, т. X, вып. 6.
 111. *Стретт Дж. В. (Рэлей).* Теория звука, т. II. М., Гостехиздат, 1955.
 112. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер Г.* Пластины и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
 113. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. М., Гостехиздат, 1951.
 114. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа, ч. II. Физматгиз, 1963.
 115. *Феодосьев В. И.* О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости. — Инж. сб., т. X, 1951.
 116. *Феодосьев В. И.* Прочность теплонапряженных узлов ЖДР. М., Оборонгиз, 1963.
 117. *Фрейденталь А. М., Гейрингер Г.* Математические теории неупругой среды. М., Физматгиз, 1962.
 118. *Чудновский В. Г.* Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. Киев, Изд-во АН УССР, 1952.
 119. *Шмаков В. П.* Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнителем. — Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1964, № 1.
 120. *Шорин С. Н.* Теплопередача. М., изд-во «Высшая школа», 1964.
 121. *Якупов Р. Г.* Расчет автоколебаний газов в форсажной камере сгорания с учетом нелинейных свойств зоны теплоподвода. — Изв. вузов, Авиационная техника, 1968, № 4.
 122. *Ashley H., Haviland G.* Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid. — J. Appl. Mech., 17, N 3, 1950.
 123. *Baltrukonis J. H., Gottenberg W. G., Schreiner R. N.* Dynamics of a hollow, elastic cylinder contained by an infinitely long rigid circular — cylindrical tank. JASA, v. 32, N 12, 1960.
 124. *Baltrukonis J. H., Gottenberg W. G., Schreiner R. N.* Axial shear vibrations of an infinitely long composite circular cylinder. — JASA, v. 33, No. 11, 1961.
 125. *Betchov R.* Nonlinear oscillations of the column of a gas. — Phys. Fluids, v. 1, N 3, 1958.
 126. *Bird J. F., Hart R. W., McClure F. T.* Vibrations of thick-walled hollow cylinders: exact numerical solutions. JASA, v. 32, N 11, 1960.
 127. *Bird J. F., Hart R. W., McClure F. T.* Finite acoustic oscillations and erosive burning in solid fuel rockets. — AIAA Journ., v. 3, N 12, 1965. Ограниченные акустические колебания и эрозивное горение в ракетных двигателях твердого топлива. — «Ракет. техн. и космон.», № 12, 1965.
 128. *Bleich H. H., Baron M. L.* Free and Forced vibrations of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium. — J. Appl. Mech., v. 21, N 2, 1954.
 129. *Bleich H. H.* Sound radiation from an elastic cylindrical shell submerged in an infinite medium. — Proceeding of the second U. S. National Congress of Applied Mechanics, N.-Y., 1954.
 130. *Boa-Teh Chu and Ving S. J.* Thermally driven nonlinear oscillations in a pipe with traveling shock waves. — Phys. Fluids, v. 6, 11, 1963.

131. *Boa-Teh Chu*. Analysis of a self — sustained thermally driven nonlinear vibration.— *Phys. Fluids*, v. 6, 11, 1963.
132. *Brownlee W. G.* Nonlinear axial combustion instability in solid propellant motors.— *AIAA Journ.* v. 2, 2, 1964; (Нелинейная продольная неустойчивость горения в ракетных двигателях твердого топлива.— «Ракетн. техн. и космон.» 1964, № 2.
133. *Cantrell R. H., Hart R. W., McClure F. T.* Linear acoustic gains and losses in solid propellant rocket motors. *AIAA Journ.*, v. 2, No 6, 1964; Линейные акустические усиления и потери в ракетных двигателях на твердом топливе.— «Ракетн. техн. и космон.», № 6, 1964.
134. *Cheng Sing-J.* Unstable combustion in solid-propellant rocket motors.— «8th Sympos. Combust. Pasadena, Calif., 1960». Baltimore, 1962.
135. *Chester W.* Resonant oscillations in closed tubes.— *J. Fluid Mech.*, v. 18, Part I, 1964.
136. *Christensen H.* Acoustical oscillation in steam systems.— *Nucleonik*, 5, N 7, 1963.
137. *Coward H. F., Hartwell F. J., Georgson E. H. M.*— *Journ. Chemical Soc.*, 1482, 1937.
138. *Crocco L.*, and *Chengsin-J.* Theory of combustion instability in liquid propellant rocket motors, 1956; Л. Крокко и Чжен Синь-и. Теория неустойчивости горения в ЖРД. М., ИЛ, 1958.
139. *Crocco L.* *Aerotecnica*, 33, 1953.
140. *Crumpp J. E., Price E. W.* «Catastrophic» changes in burning rate of solid propellants during combustion instability.— *ARS Journ.*, 30, N 7, 1960.
141. *Dowell E. H., Voss H. M.* The effect of a cavity on panel vibration. *AIAA J.*, v. 1, No 4, 1963.
142. *Elias I., Cheung H., Cohen N. S.* Acceleration of burning rate of composite propellants by sound waves. *AIAA l.*, v. 3, No 6, 1965; Увеличение скорости горения смесовых твердых топлив с помощью звуковых волн.— «Ракетн. техн. и космон.», 1965, № 6.
143. *Engler J. F., Nachbar W.* Experiments with a solid-propellant acoustic oscillator. *AIAA J.*, v. 2, No 7, 1964; Эксперименты с генератором акустических колебаний на твердом топливе.— «Ракетн. техн. и космон.», 1964, № 7.
144. *Feiler C. E., Yeager E. B.* Effect of large-amplitude oscillations on heat transfer.— *Techn. Rept. NASA*, N 142-R, 1962.
145. *Greguss P.* Über die akustische Beeinflussung von Brennprozessen.— «Proc. of the third Internat. Congr. Acoust.», Stuttgart, v. 2, 1959.
146. *Greenspon J. E.* Axially symmetric vibrations of a thick cylindrical shell in an acoustic medium.— *JASA*, No8, 1960.
147. *Hahne H. V.* Oscillations of a gas in an elastic cylindrical shell.— «Proc. of the third U. S. National Congress of Applied Mecanics». N.-Y., 1958.
148. *Henry L. A., Freudenthal A. M.* Standing waves in a viscoelastic cylinder case-bonded to a thin shell.— *AIAA Journ.*, v. 4, No 2, 1966; Стоячие волны в вязко-упругом цилиндре, скрепленном с тонкой оболочкой.— «Ракетн. техн. и космон.», 1966, № 2.
149. *Housner G. W.* Lateral vibrations of a pipe line containing flowing fluid.— *J. Appl. Mech.*, 19, N 2, 1952.
150. *Junger M. G.* Radial loading of cylindrical and spherical surfaces.— *JASA*, v. 24, No. 3, 1952.
151. *Ketter D. I.* Coupled Panel cavity vibrations.— *AIAA Journ.*, 3, No 11, 1965; Связанные колебания панели и полости.— «Ракетн. техн. и космон.», 1965, № 11.
152. *Korteweg D.* Over Voortplantig-snelheid van golven in elastische buisen. Leiden, 1878.
153. *Lamb H.* Über die Geschwindigkeit des Schalles unter Einfluss der Elastizität der Wandte.— *Proc. of the Manchester Soc.*, 1898.
154. *McClure F. T., Hart R. W., Bird J. F.* Acoustic resonance in solid propellant rocket.— *J. Appl. Physics*, v. 31, N 5, 1960.
155. *Morgan G. W., Ferrante W. R.* Wave propagation inelastice ture filled with streaming liquid.— *JASA*, No 4, 1955.
156. *Pretlove A. J.* Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cabity.— *J. Sound and Vibr.*, v. 2, N 3, 1965.
157. *Putnam A. A.* Practical considerations of combustion oscillations.— «Nonsteady flame propagation», Pergamon Press, 1964.
158. *Reid W. P.* Temperature in a thin shells of revolution.— *ARS Journ.*, 32, No 9, 1962.
159. *Resal H.* Sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau elastique.— *Journ. mathem. pures et appliquées*, v. 2, 1876.
160. *Reynst F. H.* Pulsating combustion. Oxford, Pergamon Press, 1961.
161. *Rosen G.* Nonlinear pressure oscillations in a combustion field.— *Jet propulsion*, v. 30, No 4, 1960.
162. *Saenger R. A., Hudson G. E.* Periodic shock waves in resonating gas columns.— *JASA*, v. 32, No 8, 1960.
163. *Sann R. I., Shaffer B. W.* Free transvers elastic vibrations of a solid cgylinder bonded to a casing.— *Journ. SIAM Appl. Math.*, v. 14, N 2, 1966.
164. *Seagrave R. C., Remer H. H., Sage B. H.* Oxides of nitrogen in combustion: oscillatory combustion at elevated pressure.— *Combustion and Flame*, 9, No 1, 1965.

165. *Sirignano W. A. and Crocco L.* A shock wave model of unstable rocket combustors. *AIAA Journ.*, v. 2, 7, 1964; Модель ударной волны в теории неустойчивости горения в ракетных двигателях на твердом топливе.— «Ракетн. техн. и космон.», 1964, № 7.
166. *Skalak R.* An extension of the theory of water hammer, part 1 and 2.— *Water Power*, No 12, 1955; N 1, 1956.
167. *Sommers H.* Technische Mitteilungen. Heft 6, 1958.
168. *Stephen Weiner.* Standing sound waves of finite amplitude.— *JASA*, v. 40, N 1, 1966.
169. *Tsein H.*— *Journ. Am. Rocket Soc.*, 22, 1952.
170. *Warburton G. B.* Vibration of a cylindrical shell in an asoustic medium.— *J. Mech. Engng. Sci.*, v. 3, No 1, 1961.
171. *Wilfred E., Baker, Frank J. Allen.* The response of elastic apherical shells to,spherically summetric internal blast loading.— *Proc. of the third U. S. National Congress of Applied Mechanics*. N. Y., 1958.
172. *Yount R. A., Angelus T. A.* Chuffing and nonacoustic instability phenomena in solid propellant rockets.— *AIAA Journ.*, v. 2, No 7, 1964; «Чихание» и низкочастотная неустойчивость горения в ракетных двигателях на твердом топливе.— «Ракетн. техн. и космон.», 1964, № 7.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Некоторые сведения из газодинамики горения, акустики и теории упругости	5
§ 1. Колебательные системы. Механизмы обратной связи	5
§ 2. Теория распространения возмущений в газе	9
§ 3. Волны в деформируемых твердых телах	16
§ 4. Граничные условия. Акустический импеданс. Сверхзвуковое сопло	19
§ 5. Уравнения движения тонких упругих оболочек	26
Глава II. Устойчивость одномерного движения. Вынужденные колебания	29
§ 6. Собственная частота и форма колебаний	29
§ 7. Нелинейные задачи	34
§ 8. Автоколебания газа	38
§ 9. Совместные колебания прямоугольной оболочки и заключенного в ней газа	45
Глава III. Осесимметричные колебания оболочек и газа	54
§ 10. Распространение осесимметричных волн в жидкости, заключенной в цилиндрической оболочке бесконечной длины	54
§ 11. Собственные колебания цилиндрической и сферической оболочек, содержащих газ	61
§ 12. Вынужденные колебания оболочек и днищ	66
§ 13. Приближенные решения более сложных задач вынужденных колебаний оболочек	72
§ 14. Вынужденные колебания цилиндрической оболочки при распределенном по объему вибрационном горении	82
§ 15. Колебания цилиндрической оболочки, вызванные ударными волнами	90
Глава IV. Неосесимметричные колебания оболочек и газа	101
§ 16. Распространение неосесимметричных волн вдоль цилиндра бесконечной длины	101
§ 17. Собственные колебания цилиндрической оболочки конечной длины и заключенного в ней газа	105
§ 18. Собственные колебания сферической оболочки и заключенного в ней газа	112
§ 19. Вынужденные колебания цилиндрической оболочки	114
§ 20. Параметрические колебания цилиндрической оболочки	118
§ 21. Параметрические колебания конической оболочки	126
Глава V. Совместные колебания сплошного упругого тела, газа и тонкой оболочки	132
§ 22. Цилиндрическая система бесконечной и конечной длины	132
§ 23. Сферическая система	142
Глава VI. Колебания трехслойных оболочек и трубопроводов	157
§ 24. Цилиндрическая трехслойная оболочка, содержащая жидкость и газ	157
§ 25. Колебания и устойчивость трубопроводов	161
§ 26. Две задачи о возбуждении волн в газе	169
Литература	176

М. А. Ильямов

**Колебания упругих оболочек,
содержащих жидкость и газ**

Утверждено к печати

*Казанским физико-техническим институтом
АН СССР*

Редактор *Л. М. Бекасова*

Художник *Н. И. Шевцов*

Технический редактор *И. А. Макогонова,*

С. Г. Тихомирова

Сдано в набор 3.IX 1968 г. Подписано
к печати 21/V 1969 г. Формат 70×108¹/₁₆.

Бумага № 1. Усл. печ. л. 16,1. Уч.-изд. л. 13,4

Тираж 2600 экз. Тип. зак. 1516. Т-06750.

Цена 84 коп.

Издательство «Наука»

Москва К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»

Москва Г-99, Шубинский пер., 10

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
8	13 св.	$f(t')$	$f_0(t')$
10	Ф-ла (2.8)	$\left] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]$	$\left] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]$
37	5 сн.	15	1,5
42	17 св.	$\bar{\rho}_0 =$	$\bar{\rho}_2 =$
42	34 св.	$t - \tau_0$	$x = 0$
47	12 св.	$\Omega_{iq, kj}$	$\Omega_{iq, kj}^2$
68	Ф-ла (12.12)	$L]$	$L] \sin \alpha_j x$
68	13 сн.	Представим	представим
68	Ф-лы (12.13)	$P_{\xi mj}; A_{\xi m}$	$P_{mj}; A_m$
81	7 сн.	$b_1 e^{-iS_1 \xi_1}$	$d_1 e^{-iS_1 \xi_1}$
»	»	$b_2 e^{-iS_1 \xi_1}$	$d_2 e^{-iS_1 \xi_1}$
98	9 сн.	$(\sigma^2 - \lambda^2)$	$(k^2 \sigma^2 - \alpha_j^2)$
143	9 сн.	$\frac{1}{\mu_i r}$	$\frac{1}{a_i r}$
145	Ф-ла (23.15)	P	ρ
160	Ф-ла (24.6)	$U_0 \lambda)^2 \frac{\bar{m}}{m}$	$\bar{U}_0 \lambda)^2 \frac{\bar{m}}{m}$
161	13 сн.	U_0	U_0^2

М. А. Ильгамов