

М. А. ИЛЬГАМОВ

**СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
ГИДРОУПРУГОСТИ**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Казанский научный центр
Институт механики и машиностроения

М. А. Ильгамов

СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
ГИДРОУПРУГОСТИ

Казань - 1994

Ильгамов М.А. Статические задачи гидроупругости. — Казань: ИММ РАН, 1994. — 208 с.

Рассматривается равновесие тонкостенных упругих элементов, как стержень, мембрана, пластина, оболочка, под действием сил со стороны жидкости и заданных внешних сил. Приводятся характерные задачи.

Для специалистов в области прочности и надежности. Может быть использована для более углубленного изучения отдельных вопросов в курсах сопротивления материалов, теории пластин и оболочек, гидростатики.

Ил. 106. Библиогр. 68 назв.

Научные редакторы:

доктор физико-математических наук,

ведущий научный сотрудник М.С.Ганеева,

доктор технических наук, профессор В.И.Усюкин

Печатается по решению Ученого Совета Института механики и машиностроения КНЦ РАН.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ВВЕДЕНИЕ	9
ГЛАВА I. РАВНОВЕСИЕ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ И ТРУБКИ В ЖИДКОСТИ	
§ 1. Равновесие вертикального стержня в жидкости	18
§ 2. Устойчивость вертикального положения стержня в жидкости	23
§ 3. Некоторые общие свойства задачи устойчивости вертикального стержня в жидкости	27
§ 4. Два частных случая нагружения	30
§ 5. Устойчивость стержня при различных условиях закрепления. Шахтный ствол	34
§ 6. Устойчивость вертикальной трубки с жидкостью. Выпучивание растянутой трубки	37
§ 7. Устойчивость бурильной и добывающей нефтяной колонны	43
§ 8. Устойчивость труб, закрепленных на подвижных опорах	50
ГЛАВА II. РАВНОВЕСИЕ МЕМБРАНЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ	
§ 1. Линейная задача о равновесии мембраны под тяжестью жидкости	54
§ 2. Нелинейная задача о равновесии мембраны под слоем жидкости	58
§ 3. Круглая мембрана под гидростатической нагрузкой	61
§ 4. Взаимодействие мембраны с несжимаемой жидкостью в замкнутом сосуде	64
§ 5. Устойчивость мембраны между жидкостями разной плотности	68
§ 6. Определение отклонений мембраны в задаче устойчивости	71
§ 7. Нелинейное отклонение мембраны под сосредоточенным воздействием	74

ГЛАВА III. РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

§ 1. Изгиб легкого бруса, покоящегося на поверхности воды.....	78
§ 2. Изгиб круглой пластины под тяжестью жидкости.....	81
§ 3. Изгиб круглой пластины, закрывающей полость с жидкостью.....	84
§ 4. Задача Герца о плавающей пластинке.....	86
§ 5. Изгиб круглой пластины под сосредоточенной нагрузкой.....	91
§ 6. Круглая пластина под действием нецентральной сосредоточенной нагрузки.....	95
§ 7. Цилиндрический изгиб вертикальной пластинки, соприкасающейся с жидкостью ограниченного объема.....	100
§ 8. Устойчивость вертикальной пластины в жидкости.....	103
§ 9. Влияние сжимаемости среды на изгиб пластины.....	107
§ 10. Влияние сжимаемости среды на устойчивость пластины.....	111

ГЛАВА IV. ОТДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Гибкая пластина на поверхности жидкости под нагрузкой, распределенной по линии.....	115
§ 2. Цилиндрическая панель под действием нагрузки, распределенной по линии.....	120
§ 3. Цилиндрическая оболочка в жидкости под распределенной по линии нагрузкой.....	125
§ 4. Устойчивость пологой панели под слоем жидкости.....	131
§ 5. Устойчивость цилиндрической панели, нагруженной давлением сжимаемой жидкости.....	141
§ 6. Приложение. Жесткая цилиндрическая оболочка, находящаяся в жидкости или содержащая жидкость.....	148

ГЛАВА V. РАВНОВЕСИЕ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ. ЕМКОСТИ

§ 1. Длинная цилиндрическая оболочка, содержащая жидкость.....	154
§ 2. Объем жидкости в прямоугольной подушечной емкости.....	158
§ 3. Равновесие цилиндрической оболочки при полном гидростатическом давлении.....	161

§ 4. Расчет переборок, ограждающих отсеки с жидкостью ..	165
§ 5. Свободнолежащие емкости	168
§ 6. Вкладные судовые емкости	171
§ 7. Плавающие мягкие емкости	174
§ 8. Емкости для подъема груза	177

ГЛАВА VI. РАВНОВЕСИЕ ПЛЕНОК, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ.

ВЫТЕСНИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

§ 1. Плоская задача о равновесии пленки	183
§ 2. Равновесие сферической и полусферической пленки ..	187
§ 3. Равновесие цилиндрической пленки	192
§ 4. Конечные деформации мембраны	194

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	197
------------------	-----

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	199
-------------------------	-----

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена задачам, в которых существенную роль играет эффект взаимодействия между упругим телом и несжимаемой весомой жидкостью. При этом обе среды рассматриваются в состоянии покоя.

Формулировка статических задач гидроупругости базируется на гидростатике и статической теории упругости, на курсах сопротивления материалов, теории пластин и оболочек. Наибольший интерес представляет взаимодействие жидкости с тонкостенными конструктивными элементами, как стержень, мембрана, пластина, оболочка. В книге в названном порядке рассматривается равновесие различных упругих тонкостенных элементов под действием сил со стороны жидкости.

Во введении дается постановка статических задач взаимодействия, кратко излагаются необходимые для дальнейшего сведения из гидростатики. Указывается на некоторые примеры, в которых эффект взаимодействия двух сред приводит к качественно новым результатам.

В первой главе приведены характерные задачи, относящиеся к вертикально расположенному тонкому стержню и тонкостенной трубке. Определены возникающие осевое и боковое усилия под действием собственного веса и гидростатической силы. Рассматривается устойчивость упругого элемента.

Вторая глава посвящена изучению поведения упругой мембраны. Мембрана может служить дном полости, а также покрывать замкнутую полость с жидкостью. Рассматриваются случаи удлиненной в одном направлении и круглой полостей.

В третьей главе рассматриваются изгиб и устойчивость пластины, контактирующей с жидкостью, под действием различных сил. Во всех трех главах задачи формулируются и решаются в основном в линейном приближении.

Нелинейные задачи изгиба пластины и выпучивания пологих цилиндрических панелей под действием гидростатического давления даны в четвертой главе. В целях упрощения анализа взаимодействия привлекаются модели плоской деформации пластины и панели и соответствующего поведения жидкости.

Пятая и шестая главы посвящены рассмотрению равновесия мягкой оболочки и пленки в поле действия жидкости. Из обширного круга вопросов здесь приведены результаты только по двум задачам. Это относится к мягким емкостям для хранения и перевозки жидкостей и к вытеснительным устройствам. Эти задачи являются существенно нелинейными.

Использованная литература приводится с разбивкой по главам. Она не является полной.

Постановка и решение некоторых из приведенных задач известны давно. Другие задачи излагаются впервые. Выбор их определялся научными интересами автора и, естественно, осведомленностью в обширной литературе. Предпочтение отдавалось задачам, имеющим простые и обозримые решения. Поэтому некоторые задачи носят в основном модельный характер. На них наиболее просто можно продемонстрировать основное свойство гидроупругих систем, а именно, зависимость действующих на деформируемое тело сил от самих деформаций тела. Поэтому основная направленность книги связана с аналитическими решениями краевых задач. Результаты численного моделирования приводятся редко.

Разные главы и параграфы написаны в разном стиле. Задачи, допускающие относительно простое математическое описание, изложены достаточно подробно. Что касается громоздких в вычислительном отношении задач, то даются главным образом их формулировка и результаты, представляющие практический интерес. При этом обращается внимание на зависимости поведения системы, возникающих в ней сил от массовых характеристик сред, размеров и других входных параметров. Отмечаются особенности задачи. В случае необходимости подробности решения можно найти в оригинальных источниках, на которые делаются ссылки.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся вопросами прочности элементов конструкций, надежности функционирования отдельных узлов аппаратов, устройств и сооружений. Она может быть использована также для более углубленного изучения отдельных вопросов в курсах сопротивления материалов, гидростатики, теории пластин и оболочек.

Для автора ценной была как поддержка самой идеи подготовки подобной книги, так и правка ее английского варианта профессором Е. Дауэллом, деканом Дюкского университета США (Е. Н. Dowell, Duke University, USA). Доктор физико-математических наук М. С. Ганеева и профессор В. И. Усюкин как редакторы внесли множество предложений по улучшению изложения материала. Большую работу по оформлению рукописи проделала Л. Б. Газеева. Автор приносит им свою благодарность.

Работа выполнена в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи аэрогидроупругости могут быть разделены на динамические, стационарные и статические. В первых из них параметры обеих взаимодействующих сред претерпевают изменение по времени. В свою очередь здесь рассматриваются переходный процесс (например, реакция конструкции в жидкости на падение ударной волны), установившееся движение (колебания с постоянной амплитудой и периодом и т.д.). Изучение взаимодействия при установившемся движении жидкости и статической деформации упругого тела можно отнести к стационарным задачам. Такое широко известное гидроупругое явление как флаттер несущей тонкой поверхности (крыла, лопатки) в потоке жидкости и газа относится к первому, а дивергенция той же системы — к второму классу задач. И, наконец, подразумевается, что в статических задачах обе среды находятся в покое. Этот класс задач является наиболее простым.

Подавляющее большинство оригинальных исследований, обзоров и монографий посвящено динамическим задачам, что объясняется их большой прикладной значимостью и сложностью в анализе рассматриваемых процессов. Со времени появления первых крупных обобщающих изданий [1,2], ставших уже классическими, опубликовано несколько десятков монографий и обзоров по разным проблемам. В них затрагиваются также стационарные задачи. Краткий обзор и довольно полный список монографической литературы приводится в книге [3].

Что касается статических задач, то по ним нет каких-либо обобщающих изданий. Данная работа в некоторой мере восполняет этот пробел. Однако, она совершенно не претендует на полноту охвата проблемы.

Следует отметить, что отсутствие таких изданий не свидетельствует о неактуальности статических задач гидроупругости. Во-первых, анализ равновесия гидроупругой системы входит как составная часть общих расчетов конструкции. Во-вторых, статические рас-

четы имеют большое самостоятельное значение. Задолго до появления конструкций, в которых наиболее сильно проявляются гидроупругие эффекты (воздушные и водные транспортные средства, всевозможные реакторы и трубопроводные системы, чувствительные элементы приборов и т. д.), имелись объекты, в которых определяющим является статическое взаимодействие конструкции с жидкой и газообразной средой. Зарождение и применение некоторых из них теряется во мгле веков. Возможно, одними из первых были замкнутые оболочки, изготовленные из шкур и полых органов животных. Это — емкости для хранения жидкостей (бурдюки) и плавсредства (пузыри, надувные плоты). После развития ткачества — воздушные шары, надувные лодки и т. д.

Другие объекты, наоборот, вошли в нашу жизнь сравнительно недавно. Большую роль сыграло при этом появление современных синтетических тканей и пленок, обладающих большой прочностью. Это — надувная цилиндрическая оболочка (аэробалка), пневматические конструкции, воздухоопорные строительные конструкции (большепролетные купола спортивных и складских сооружений), судовые емкости для перевозки жидких грузов, вытеснительные устройства в аэрокосмической технике и многие другие объекты.

Другой причиной явилось развитие новых технологий. Например, морская добыча нефти связана с необходимостью сооружения и эксплуатации платформ, вертикальных бурильных и добывающих труб. Длинной многих сотен метров, эти трубы могут испытывать нежелательный продольный изгиб даже при наличии растяжения. При анализе их прочности и надежности учет жидкости внутри трубы и окружающей ее воды становится необходимым.

Общая постановка задачи взаимодействия включает в себя выбор модели движения или равновесия твердого деформируемого тела и жидкости (газа), а также формулировку условий на их контактной поверхности.

Для описания поведения деформируемого тела будем пользоваться уравнениями равновесия упругого стержня, мембраны, пластины, панели и оболочек в рамках гипотез, справедливых для случая

малой толщины по сравнению с их длиной или радиусом. Выбор уравнений и условий закрепления будет диктоваться физической постановкой задачи.

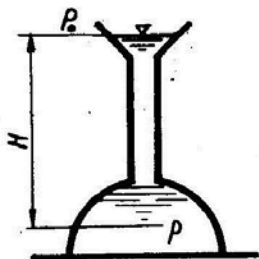


Рис. 0.1. Гидростатическое давление не зависит от формы сосуда.

Жидкость предполагается идеальной. Принимаются обычные положения гидростатики, которые в кратком виде приведены ниже.

Медленное изменение формы жидкости без изменения ее объема может происходить под действием сколь угодно малой силы. В поле тяжести жидкость принимает форму сосуда. Свободная поверхность ее перпендикулярна направлению силы тяжести. В сообщающихся сосудах однородная по плотности жидкость устанавливается на одном уровне.

Давление в жидкости не зависит от ориентации рассматриваемой площадки и передается одинаково по всем направлениям (закон Паскаля).

В поле тяжести давление в жидкости увеличивается с глубиной погружения благодаря весу самой жидкости. Если она является несжимаемой, то суммарное давление p (гидростатическое давление) складывается из давления p_0 на поверхности жидкости и веса столба (высотой H , рис. 0.1) жидкости удельной массой ρ , гравитационным ускорением g

$$p = p_0 + \rho g H \quad (0.1)$$

Сила $\rho g H S$ давления, действующего на дно площадью S емкости, в общем случае не совпадает с весом содержащейся в ней жидкости. Если высота H одинакова в емкостях разной формы (рис. 0.2), но с одинаковой площадью S дна, то, несмотря на различный вес, сила

давления на дно одинакова для всех емкостей и равна весу жидкости в цилиндрическом сосуде. Этот "гидростатический парадокс" объясняется тем, что сила давления жидкости на наклонные стенки имеет вертикальную составляющую, направленную вниз или вверх в зависимости от ориентации участка стенки.

В общем случае одинаковое во всем объеме давление p_0 возникает в результате воздействия на этот объем внешних сил. В примере из рис.0.3 оно равно $p_0 = P/S$. Однако не всегда это давление определяется так просто. Если в случае нагружения гибкой пластины со свободными скользящими кромками (без отрыва) по стенке сосуда (рис.0.4,а) оно равно той же величине P/S , то в случае закрепленных краев в стенке (рис.0.4,б) оно определяется только в результате решения задачи изгиба пластины.

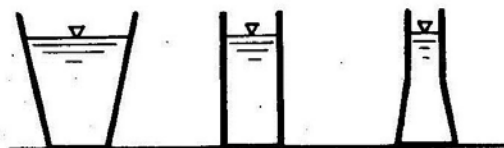


Рис.0.2. "Гидростатический парадокс" — независимость силы давления жидкости на днище сосуда от его формы.

По существу первый пример (рис.0.4,а) не относится к гидроупругости, т.к. задачи гидростатики и теории упругости здесь разделяются (если величина $\rho g H$ мала по сравнению с p_0). Это может быть справедливо при малых размерах сосуда по вертикали и в некоторых других случаях. По известным значениям P и p_0 определяются характеристики изгиба пластины. Второй пример приводит к связанной задаче. Здесь заранее можно сказать лишь о равномерности распределения давления p_0 по длине пластины. Отметим, что необходимость учета p_0 всегда возникает в случае замкнутых полостей, полностью заполненных жидкостью.

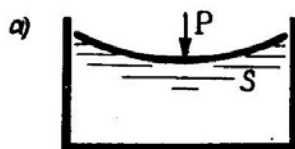
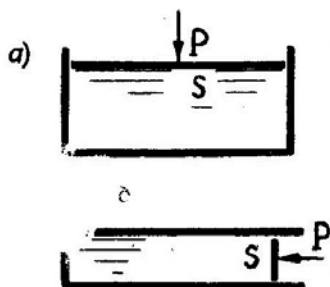


Рис. 0.3. Абсолютно жесткий поршень, свободно скользящий по стенкам сосуда.

Рис. 0.4. Свободно скользящая (а) и закрепленная по краям (b) гибкая пластинка.

На тело объемом V в жидкости действует выталкивающая сила P , направленная вертикально вверх и равная весу вытесненной им жидкости (закон Архимеда):

$$P = \rho g V \quad (0.2)$$

Она не зависит от глубины погружения тела. В качестве точки ее приложения принимается центр масс однородного тела (центр водоизмещения). Когда тело неоднородно, он не совпадает с центром масс его погруженной части.

Если при полном погружении тела выталкивающая сила превышает его вес, то тело лишь частично погружается в жидкость. Очевидно, в равновесии точка приложения выталкивающей силы и центр масс тела лежат на одной вертикали.

В силу допущения о несжимаемости жидкости перемещение w по нормали поверхности Γ тела A (рис. 0.5) в результате его деформации и перемещение h поверхности жидкости связаны соотношением

$$\int_{\Gamma} w d\Gamma = \int_{\Gamma_0} h d\Gamma_0 \quad (0.3)$$

Здесь уже принято во внимание кинематическое условие равенства перемещений по нормали упругого тела и жидкости. Должно выполняться также статическое условие равенства давлений на поверхности контакта сред.

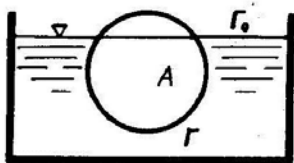


Рис. 0.5. Упругое тело A , частично погруженное в несжимаемую жидкость.

Если хотя бы один из размеров объема, занимаемого жидкостью, порядка 1 см, то одинаково важно учитывать силы тяжести и силы поверхностного натяжения. В случае больших размеров преобладающими являются гравитационные эффекты, в случае меньших — капиллярные. Эти же оценки имеют место для размеров твердого тела, контактирующего с жидкостью.

В книге не рассматриваются задачи, в которых необходимо учитывать силы поверхностного натяжения.

Далее будем пользоваться также понятием удельного веса $\gamma = \rho g$. В общем случае вводится в рассмотрение коэффициент перегрузки n и вектор гравитационного поля $\vec{g}$. Тогда $\vec{\gamma} = n\rho\vec{g}$.

Сказанным выше, соотношениями (0.1)–(0.3) почти полностью исчерпываются необходимые для дальнейшего сведения из гидростатики. Отдельные вопросы, относящиеся сюда, будут обсуждаться при постановке конкретных задач.

На первый взгляд может показаться, что гидростатические силы, действующие на упругий элемент, не должны приводить к каким-либо эффектам, качественно иным результатам, по сравнению со случаем заранее заданной, "мертвой" нагрузки. Однако, это не

всегда так.

Металлическая круглая пластина не может находиться на плаву на поверхности воды, тонет в ней. Однако при определенных значениях радиуса пластины и груза в центре, она будет оставаться на плаву. Ясно, это явление может быть описано только с точки зрения гидроупругости.

Неожиданным выглядит значение внутреннего давления в несжимаемой жидкости в задаче, показанной выше на рис.0.4, б. При некоторых условиях в случае круглой пластины и полости получается $p_0 = 3P/S$, т.е. давление в три раза больше, чем в задаче на рис.0.4, а. Следовательно, и на пластину действует снизу утроенное давление.

Длинная вертикальная пластина, разделяющая несжимаемую жидкость в замкнутом сосуде и подверженная сжатию по направлению короткой стороны, теряет устойчивость плоской формы с образованием двух полуволи. Как известно, в обычных условиях это происходит с образованием одной полуволны. Естественно, будут разными и соответствующие критические значения сжимающих нагрузок.

Перечень таких примеров можно продолжить. Более подробно

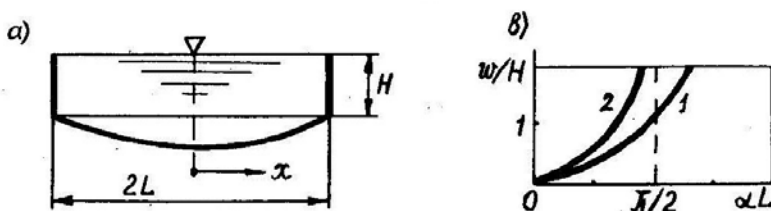


Рис.0.6. а) Мембрана под действием веса жидкости, б) Зависимость относительного отклонения мембраны от параметра $\alpha L = L\sqrt{\gamma/T_0}$.

рассмотрим следующий простой пример. Пусть днище длинного сосуда шириной $2L$ и высотой H представляет собой мембрану (рис. 0.6, а). Последняя натянута на стенках ($x = \pm L$) сосуда с начальным усилием T_0 . Сосуд заполнен до краев жидкостью с удельным весом γ . Как известно, уравнение для описания малого отклонения w мембраны из плоского состояния имеет вид $T_0 d^2w/dx^2 + p_* = 0$, где p_* — давление жидкости. Для w за положительное принято направление вниз.

За высоту столба жидкости над мембраной примем приближенно H . При этом давление будет заранее известно $p_* = \gamma H$. Собственным весом мембраны пренебрегаем по сравнению с γH .

Тогда уравнение

$$d^2w/dx^2 = -\alpha^2 H \quad (\alpha^2 = \gamma/T_0) \quad (0.4)$$

имеет решение

$$w = A + Bx - \alpha^2 H x^2 / 2$$

Удовлетворяя его условиям $w = 0$ ($x = \pm L$), находим

$$\frac{w}{H} = \frac{\alpha^2 L^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (0.5)$$

Если учесть точное значение столба жидкости $H + w(x)$, то $p_* = \gamma(H+w)$, и вместо (0.4) и (0.5) будем иметь

$$d^2w/dx^2 + \alpha^2 w = -\alpha^2 H, \quad (0.6)$$

$$\frac{w}{H} = \frac{\cos \alpha x}{\cos \alpha L} - 1 \quad (0.7)$$

При малых значениях αL по сравнению с единицей путем разложения функций $\cos \alpha x$ и $\cos \alpha L$ в степенной ряд из (0.7) можно получить (0.5). Таким образом, при малых значениях αL оба решения дают одинаковый результат. Относительное отклонение мембраны пропорционально удельному весу жидкости и квадрату ширины мембраны и обратно пропорционально ее натяжению ($\alpha^2 L^2 = \gamma L^2 / T_0$).

При увеличении αL решение (0.5) остается формально справедливым. В то время как по (0.7) решение неограниченно возрастает

при $\alpha L \rightarrow \pi/2$ (кривые 1 и 2 на рис. 0.6, b соответствуют решениям (0.5) и (0.7)). Когда $\alpha L > \pi/2$, отклонение w становится отрицательным, что качественно не соответствует физической картине явления. Для ее правильного описания должна быть изменена модель деформирования мембраны. Этот вопрос рассматривается в соответствующем разделе книги.

При $H = 0$ и конечном значении αL выражения (0.4), (0.5) дают $w = 0$. В этом решении нет отклонения мембраны от плоской формы и нет жидкости над мембраной. Но (0.6), (0.7) вместе с граничными условиями $w = 0$ ($x = \pm L$) вырождаются в задачу на собственные значения. Ненулевое решение для w (при $H = 0$) существует при $\cos \alpha L = 0$, т.е. при $\alpha L = n\pi/2$ ($n=1, 3, \dots$). Итак, при $\alpha L = \pi/2$ (или $\gamma L^2/T_0 = \pi^2/4$) возможно равновесное состояние мениска жидкости при $H = 0$ над мембраной и отклонение мембраны.

Таким образом, данный пример также показывает возможное количественное и качественное различие результатов в одной и той же задаче, сформулированной с учетом взаимодействия сред и без его учета.

Свойство сжимаемости жидкостей и газов оказывает значительное влияние на процесс их взаимодействия с упругими элементами, особенно, при сжатии среды в замкнутой полости. Если в объеме V_0 находится невесомая жидкость массой M_0 , плотностью $\rho_0 = M_0/V_0$ и давлением p_0 , то в результате деформации границ и притока (оттока) массы они становятся равными V , M , $\rho = M/V$ и p . Тогда

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\kappa \quad (0.8)$$

Если процесс взаимодействия происходит изотермически (при постоянной температуре за счет теплоотвода), то $\kappa = 1$. При адиабатическом процессе (без теплоотвода) — для газов $\kappa = 1.4$, для жидкостей $\kappa \approx 7$. Для жидкостей применяются также другие зависимости между параметрами.

ГЛАВА I

РАВНОВЕСИЕ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ И ТРУБКИ В ЖИДКОСТИ

§ 1. РАВНОВЕСИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ В ЖИДКОСТИ

Тонкий упругий стержень с шаровым наконечником покоится в жидкости в вертикальном положении. На поверхности жидкости имеется абсолютно жесткая плита, в отверстии которой стержень зажат верхним концом (рис. 1.1, а). Нас будут интересовать осевые усилия в стержне, когда он находится в строго вертикальном положении, в зависимости от размеров и удельных весов стержня γ_0 , шара γ_1 , а также удельного веса жидкости γ .

Предполагаем, что радиус R шара мал по сравнению с длиной L стержня, радиус поперечного сечения которого r . В дальнейшем шар будем считать абсолютно жестким.

Вес шара и участка $(L-x)$ стержня равен $(4/3)\pi R^3\gamma_1 + \pi r^2(L-x)\gamma_0$. В соответствии с (0.2) выталкивающая сила со стороны жидкости на шар, не сочлененный со стержнем по площадке ab (рис. 1.1, б), равна $(4/3)\pi R^3\gamma$. Чтобы исключить в системе давление по площадке ab , необходимо приложить такое же давление, но с обратным знаком, на сечение $a'b'$ стержня. Выталкивающей силой на стержень (без шара) будет $\pi r^2 L \gamma$. Следовательно, из условия равновесия осевое усилие N в сечении стержня с координатой x , отсчитываемой от зажатого конца, равно

$$N = \pi r^2 [\gamma L - \gamma_0 (L-x)] + \frac{4}{3} \pi R^3 (\gamma - \gamma_1) \quad (1.1)$$

Здесь за положительное усилие N принято сжатие. Значение опорной реакции получается из (1.1) при $x=0$.

Рассмотрим некоторые следствия из (1.1) в зависимости от удельных весов и размеров стержня и наконечника.

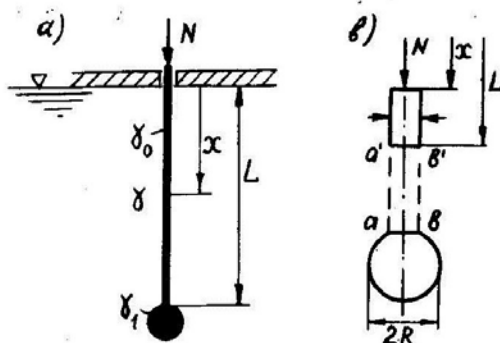


Рис. 1.1. Стержень с шаровым наконечником, опущенный в жидкость; γ_0 , γ_1 , γ — удельные веса материала стержня, шара и жидкости.

1. Неравенство $N(x=L) < 0$ или

$$\gamma \left(1 + \frac{4R^3}{3r^2L} \right) < \gamma_1 \frac{4R^3}{3r^2L} \quad (1.2)$$

дает условие, при выполнении которого стержень всюду растянут, причем максимальное растяжение реализуется у опоры ($x=0$). При $R^3/r^2L \gg 1$ это условие сводится к неравенству $\gamma < \gamma_1$.

2. Если параметры задачи удовлетворяют условию $N(x=0) > 0$ или

$$\gamma \left(1 + \frac{4R^3}{3r^2L} \right) > \gamma_0 + \gamma_1 \frac{4R^3}{3r^2L}, \quad (1.3)$$

то стержень всюду сжат. Максимальному сжатию подвергается сечение у наконечника ($x=L$). При $\gamma_0 = \gamma_1$ условие (1.3) сводится к очевидному неравенству $\gamma > \gamma_1$. То же самое можно утверждать, если $R^3/r^2L \ll 1$, а γ_1 не сильно превосходит γ_0 .

3. Случай растянутой верхней и сжатой нижней части стержня получаем, если общий вес стержня с наконечником больше веса вытесненной жидкости, но при этом вес шара меньше веса вытесненной им жидкости. Это осуществляется при $\gamma_1 < \gamma$, $\gamma_0 > \gamma$. Граница x_0 между этими зонами определяется приравнением нулю усилия в (1.1)

$$x_0 = L - L_*, \quad L_* = L \frac{\gamma}{\gamma_0} + \frac{4R^3(\gamma - \gamma_1)}{3r^2\gamma_0} \quad (0 < L_* < L) \quad (1.4)$$

В зависимости от геометрических размеров L , r , R также сильно меняется напряженное состояние.

Когда стержень сжат по всей длине (случай 2), для его удержания в жидкости нужно прикладывать усилие на его верхний конец (если принять, что стержень может перемещаться в отверстии плиты без трения). В случаях 1 и 3 этот стержень находится в равновесии (не тонет), если только удерживать его за верхний конец. В случае 3 верхняя часть его растянута, а нижняя — сжата.

Приведенный выше анализ упрощается в отсутствии шарового наконечника (или при $R \leq r$). В силу принятого допущения о малости r по сравнению с L (1.1) сводится к выражению

$$N = \pi r^2 [\gamma L - \gamma_0 (L - x)]$$

В соответствии с этим реализуются только второе и третье из указанных состояний. Либо имеется сжатие по всей длине ($\gamma > \gamma_0$), либо — частичное растяжение и сжатие ($\gamma < \gamma_0$). Усилие сжатия максимально в обоих случаях у нижнего конца, усилие растяжения — у опоры.

Определим порядок величины L_* для реальных плотностей веществ. Для алюминиевого стержня радиусом $r = 1.5 \cdot 10^{-3}$ м ($\gamma_0 = g\rho_0 = 2.7g$ кг/м²с²), пластикового наконечника с радиусом $R = 10^{-2}$ м ($\gamma_1 = g\rho_1 = 0.5g$ кг/м²с²) и воды ($\gamma = g\rho = 1.g$ кг/м²с²) имеем из (1.4) значение $L_* = (0.37L + 0.11)$ м. Нижняя часть стержня длиной L_* сжата, а верхняя часть длиной $x_0 = (0.63L - 0.11)$ м — растянута.

Если вместо воды взята ртуть с удельным весом $\gamma = 13.55g$ кг/м²с², то значение L_* получается равным $(5L + 2.86)$ м. Следовательно, независимо от длины L в стержне существует только усилие сжатия. Это следует также из указанного выше условия $\gamma > \gamma_0$. Заметим, что на размеры зон сжатия и растяжения значение g не влияет. Различные перегрузки приводят к соответствующим изменениям усилия в стержне.

В случаях полых шара и стержня (трубки) влияние плотности

жидкости усиливается по сравнению с рассмотренным выше. Предполагается, что во внутренней полости жидкость отсутствует (рис. 1.2, а).

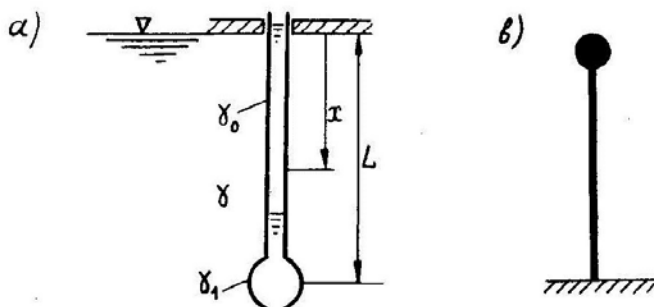


Рис. 1.2. а) Полый стержень и сферический наконечник в жидкости. б) Колонна под собственным весом.

Если толщина h стенок мала по сравнению с радиусами R и r ($R = R_0 + h$, $r = r_0 + h$, $h \ll R$, $h \ll r$), то вместо (1.1) имеем

$$N = \pi r^2 L \gamma - \pi (r^2 - r_0^2) (L-x) \gamma_0 + \frac{4}{3} \pi R^3 \gamma - \frac{4}{3} \pi (R^3 - R_0^3) \gamma_1 = \quad (1.5)$$

$$= \pi r [r L \gamma - 2h (L-x) \gamma_0] + \frac{4}{3} \pi R^2 (R \gamma - 3h \gamma_1)$$

Все сказанное выше может быть перенесено полностью или с небольшими изменениями на случай, когда система обращена вверх (рис. 1.2, б). Это несущая колонна, опора морского сооружения, резиновый шар, наполненный легким газом и удерживаемый на нити, и т.д.

Если принять, что стержень перемещается в отверстии плиты без трения и длина L больше глубины погружения H (рис. 1.3), то выражение для усилия вместо (1.1) будет иметь вид

$$N = \pi r^2 [\gamma H - \gamma_0 (H-x)] + \frac{4}{3} \pi R^3 (\gamma - \gamma_1) \quad (1.6)$$

Усилие N является только сжимающим.

Величина H определяется из условия равновесия всей системы

$$N = L \frac{\gamma_0}{\gamma} - \frac{4R^3(\gamma - \gamma_1)}{3r^2\gamma} \quad (N \leq L) \quad (1.7)$$

При $R \leq r$ и принятом допущении $r \ll L$ из (1.7) следует $N/L = \gamma_0/\gamma$. Глубина погружения стержня относится к его длине как удельный вес стержня к удельному весу жидкости:

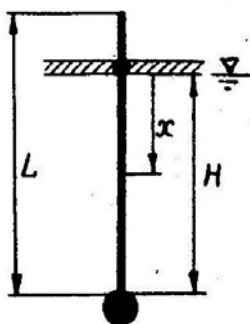


Рис. 1.3. Стержень, свободно скользящий в отверстии плиты.

Подставляя (1.7) в (1.6), получаем

$$N = \pi r^2 \left[\gamma_0 L \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} + \frac{x}{L} \right) - \frac{4R^3(\gamma - \gamma_1)}{3r^2} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \right] + \frac{4}{3} \pi R^3(\gamma - \gamma_1) \quad (1.8)$$

При $R \leq r$ можно принять

$$N = \pi r^2 \gamma_0 L \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma} + \frac{x}{L} \right)$$

Максимальное сжатие будет при $x=H$. Так как в рассматриваемом случае $H=L\gamma_0/\gamma$, оно равняется $N = \pi r^2 \gamma_0 L$. У верхнего конца стержня $x = H-L$ и $N = 0$.

Как известно, когда стержень растянут по всей длине, соответствующие деформации и перемещения определяются элементарно. Сложнее обстоит дело, если стержень сжат. Здесь при определенных условиях, накладываемых на параметры системы, могут иметь место другие формы равновесия, а именно, отклонение упругой линии от строго вертикального положения. Это влечет за собой появление изгибающих моментов. Для трубки, содержащей жидкость, такое состояние может возникать и при растяжении по всей длине. Этому вопросу посвящены следующие параграфы данной главы.

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ В ЖИДКОСТИ

Для того чтобы определить условия, при которых возможны отклоненные от вертикали равновесные формы сжатого стержня, примем ряд упрощающих допущений.

Радиус стержня r принимаем малым по сравнению с радиусом шара R , который в свою очередь мал по сравнению с длиной стержня L ($L \gg R \gg r$). В силу этого за L принимаем расстояние от центра шара до плиты (рис. 1.4) и не учитываем собственного веса стержня и подъемной силы на него со стороны жидкости. Иначе говоря, рассматривается случай параметров (1.3), причем принимается дополнительное ограничение $\gamma > \gamma_1$, $\Delta \ll 1$, где

$$\Delta = \frac{3}{4} \frac{L}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left| \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma - \gamma_1} \right| \quad (2.1)$$

Таким образом, стержень подвергается постоянному по длине сжатию концевой силой, равной разности подъемной силы наконечника и его веса.

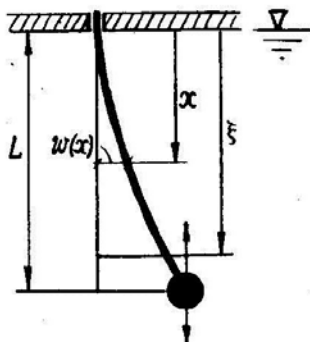


Рис. 1.4. Изогнутый стержень в жидкости.

Отклонение от вертикали будем считать малым. В силу этого принимаются обычные допущения при рассмотрении изгиба тонкого стержня. Глубина погружения наконечника не изменится в результате такого изгиба. Это приведет лишь к появлению некоторого малого угла между упругой линией при $x=L$ и силами веса и выталкивающими силами со стороны жидкости.

Относительно последних сил необходимо сделать следующее заме-

чение. При отклонении от вертикали и повороте шара в плоскости рисунка равнодействующая сила от давления со стороны жидкости образует некоторый угол с вертикальной линией. Этот угол зависит от соотношения постоянной и переменной составляющих гидростатического давления (p_0 и γx). При воздействии только p_0 он совпадает с углом поворота упругой линии dw/dx в точке $x=L$. Такая "следящая" сила в целом порождает непростую ситуацию в исследовании. При этом задача должна формулироваться в динамической постановке. Относящиеся сюда вопросы рассматриваются например, в монографии [7]. В данном случае необходимо учитывать еще боковые силы, действующие на стержень. К этому вопросу мы вернемся позже. В этом и следующем параграфах мы принимаем $p_0=0$. При этом равнодействующая $P = \frac{4}{3}\pi R^3(\gamma - \gamma_1)$ независимо от поворота осевой линии dw/dx ($x=L$) направлена по вертикали.

Таким образом, при указанных выше допущениях мы приходим к хорошо известной задаче Эйлера об устойчивости стержня. В опорном сечении прогиб и угол поворота равны нулю:

$$w = dw/dx = 0 \quad (x=0)$$

На другом конце ($x=L$) изгибающий момент равен нулю, а прогиб равен некоторой величине W . Этим условиям удовлетворяет выражение

$$w = W \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (2.2)$$

Применим энергетический метод решения. Как известно [21], энергия деформации изгиба выражается через изгибающий момент M формулой

$$U = \frac{1}{2EJ} \int_0^L M^2 dx, \quad (2.3)$$

где EJ — жесткость на изгиб. Изгибающий момент относительно точки с координатой x упругой линии от сосредоточенной концевой силы равен

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 (\gamma - \gamma_1) [w(L) - w(x)] \quad (2.4)$$

Работа A действующей силы производится на осевом перемещении $u(L)$. Оно при принятых выше допущениях выражается через прогиб формулой

$$u \approx \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

Поэтому будем иметь

$$A = \frac{2}{3} \pi R^3 (\gamma - \gamma_1) \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (2.5)$$

Значения параметров, при которых становится возможным отклоненное от вертикали положение стержня, определяются уравнением [21]

$$U = A \quad (2.6)$$

Подстановка (2.2) в (2.4) и (2.5), далее использование выражений (2.3) и (2.6) дает следующее критическое значение концевой силы

$$P = \frac{4}{3} \pi R^3 (\gamma - \gamma_1) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{EJ}{L^2} \quad (2.7)$$

Для стержня круглого поперечного сечения ($J = \pi r^4/4$) критическая разность удельных весов жидкости и материала наконечника равна

$$\gamma - \gamma_1 = \frac{3\pi}{16} \frac{EJ}{R^3 L^2} = \frac{3\pi^2}{64} \frac{E}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left(\frac{r}{L} \right)^2, \quad (2.8)$$

при превышении которой становится возможным отклоненное от вертикали равновесное положение системы.

В случае трубчатого сечения $J = (\pi/4)(r^4 - r_0^4)$. Если толщина стенки h мала настолько, что можно принять $h \ll r$, то указанное критическое значение равно

$$\gamma - \gamma_1 = \frac{3\pi^2}{16} \left(\frac{E}{R} \right) \left(\frac{h}{L} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^3 \quad (2.9)$$

Здесь предполагается, что во внутренней полости жидкость отсутствует. Заполнение этой полости жидкостью существенно меняет

задачу. Об этом будет сказано в дальнейшем.

Теперь рассмотрим другой предельный случай параметров $\Delta \gg 1$, когда можно не учитывать наличие наконечника. Если изменить знаки при γ и γ_0 , то получим обращенную систему (рис. 1.2, b). Полагаем $\gamma_0 \gg \gamma$. И поэтому не учитываем влияния среды. Это известная задача об устойчивости колонны под собственным весом [18, 19, 21, 22].

Решение может быть представлено рядом, где первый член дается функцией (2.2), следующий член равен $W_3(1 - \cos(3\pi x/2L))$ и т.д. Изгибающий момент относительно точки с координатой x упругой линии от элементарной силы $(\pi r^2 d\xi)\gamma_0$ равен

$$M = \pi r^2 \gamma_0 \int_x^L [w(\xi) - w(x)] d\xi \quad (2.10)$$

Работа сил равна

$$A = \pi r^2 \gamma_0 \int_0^L u(x) dx, \quad u(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{dw(\xi)}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (2.11)$$

Из (2.10), (2.11), (2.3), (2.6) с учетом сказанного о функции прогиба получаем критическое значение веса стержня

$$\pi r^2 L \gamma_0 = 7.84 EJ/L^2 \quad (2.12)$$

Здесь важно подчеркнуть весьма быструю сходимость ряда для w . При учете только первого члена [т.е. функции (2.2)] в (2.12) вместо коэффициента 7.84 получается 7.89. Точное значение этого коэффициента равно 7.83 [22]. Таким образом, приближенное значение критического параметра получается несколько завышенным по сравнению с точным. Это характерная особенность примененного здесь энергетического метода. Объясняется она тем, что задаваясь приближенной формой упругой линии, мы накладываем на систему лишние связи и тем самым увеличиваем ее жесткость.

Для стержня круглого поперечного сечения из (2.12) имеем критическое значение удельного веса

$$\gamma_0 = \frac{7.84}{\pi} \frac{EJ}{r^2 L^3} = 1.96 \frac{E}{L} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \quad (2.13)$$

В случае тонкостенной трубы ($h \ll r$)

$$\gamma_0 = 7.84 Erh/L^3 \quad (2.14)$$

После рассмотрения этих простейших случаев нагружения переходим к более сложным задачам устойчивости стержня в жидкости.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ В ЖИДКОСТИ

Устойчивость вертикального стержня в жидкости при разных условиях его закрепления рассмотрим на основе уравнения продольного изгиба. Исходя из него определим также некоторые общие свойства в задаче устойчивости стержня. Исходим из обычных предположений теории изгиба тонких балок: поперечное сечение остается плоским и не претерпевает изменения его форма. Изменением длины осевой линии также пренебрегаем.

На рис. 1.5 приведен элемент деформированного тонкого стержня с указанием сжимающих сил N , собственного веса $F\gamma_0 dx$ и равнодействующей qdx сил со стороны жидкости. Для определения последней закон Архимеда в виде (0.2) не годится, так как он полу-

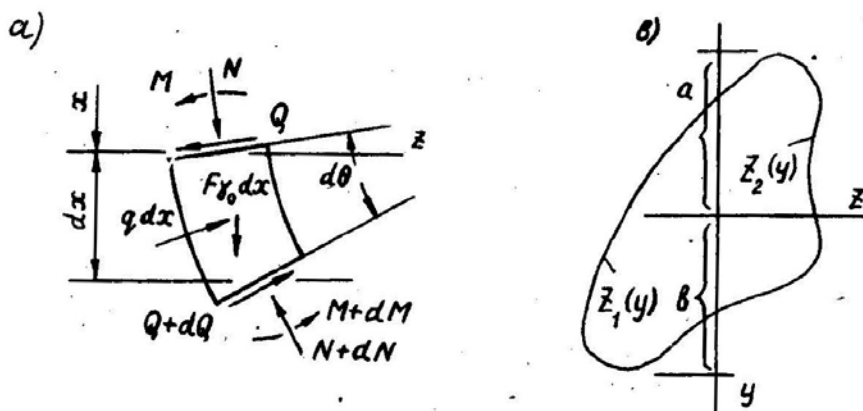


Рис. 1.5. а) Элемент изогнутого стержня длиной dx . б) Поперечное сечение стержня произвольной формы.

чается путем сложения гидростатического давления на всей погруженной поверхности тела. Как результат такой процедуры выталкивающая сила жидкости не зависит от формы тела, глубины его погружения, равномерного давления p_0 . Деформация тела при условии сохранения его объема также не приводит к изменению выталкивающей силы.

Однако изгиб стержня порождает боковую силу q на него (на оба поперечных сечения элемента гидростатические силы не действуют). Это объясняется появлением при изгибе разности между площадями выпуклой и вогнутой сторон боковой поверхности стержня, а также изменением гидростатического давления при повороте элемента. Представляется, что эти изменения малы, так как мы рассматриваем малые деформации и повороты. Однако учет их необходим в данной задаче [12, 15].

Поместим начало осевой координаты x на верхнем конце стержня. Изгиб происходит в плоскости xz , поворот сечения стержня — вокруг оси y (начало координат y, z совпадает с центром тяжести сечения). Для определенности примем, что стержень опирается нижним концом, а верхний конец может находиться в разных условиях. Пусть осевое сжатие равно $N = P + F\gamma_0 x$, где P — вертикальная сила, приложенная на верхнем конце стержня с поперечным сечением площади F . Из рассмотрения равновесия элемента на рис. 1.5 получаем уравнение

$$-\frac{dQ}{dx} + \frac{d}{dx} \left(N \frac{dw}{dx} \right) - q = 0,$$

которое с учетом уравнений $Q = dM/dx$, $M = -EJd^2w/dx^2$ можно представить в виде

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} \left[(P + F\gamma_0 x) \frac{dw}{dx} \right] = q \quad (3.1)$$

Если обозначить через $Z_1(y)$ и $Z_2(y)$ координаты боковых линий в поперечном сечении стержня, то

$$q = \int_a^b \left\{ p_0 + \gamma \left[x - Z_1(y) \frac{dw}{dx} \right] \right\} \left[1 - Z_1(y) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] dy - \\ - \int_a^b \left\{ p_0 + \gamma \left[x - Z_2(y) \frac{dw}{dx} \right] \right\} \left[1 - Z_2(y) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] dy$$

Принимая во внимание интегралы

$$\int_a^b [Z_2(y) - Z_1(y)] dy = F, \quad \int_a^b [Z_2^2 - Z_1^2] dy = 0$$

получаем

$$q = F(p_0 + \gamma x) \frac{d^2 w}{dx^2} + F\gamma \frac{dw}{dx} = F \frac{d}{dx} \left[(p_0 + \gamma x) \frac{dw}{dx} \right] \quad (3.2)$$

Таким образом, распределенная боковая сила q на стержень со стороны жидкости зависит от кривизны и угла наклона упругой линии. Отметим, что стержень до отклонения от вертикали испытывает только сжатие под действием концевой силы и собственного веса, а жидкость не оказывает никакого влияния.

С учетом (3.2) уравнение продольного изгиба может быть представлено в виде

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} \left\{ \left[(P + F\gamma_0 x) - F(p_0 + \gamma x) \right] \frac{dw}{dx} \right\} = 0 \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) можно вывести следующее утверждение для рассматриваемой задачи устойчивости стержня. Для изгиба стержня, находящегося под гидростатическим давлением, имеют место те же закономерности, что для стержня без воздействия жидкости, если представить концевую вертикальную сжимающую силу в виде

$$P_0 = P - Fp_0, \quad (3.4)$$

а за собственный удельный вес стержня принять

$$\gamma_0 = \gamma_0 - \gamma \quad (3.5)$$

В соответствии с (3.4) и (3.5) постоянная часть гидростатического

давления изменяет критическое значение концевой нагрузки P , а переменная часть — критическое значение собственного веса стержня единичной длины $\gamma_0 F$. Они увеличиваются, поскольку жидкость действует на боковую поверхность стержня и тем самым приводит к его стабилизации.

Для трубки с содержащейся внутри жидкостью эти критические значения уменьшаются, так как при этом в (3.2) необходимо изменить знак q . Это соответствует изменению знаков на противоположные перед p_0 и γ в (3.3)–(3.5). Поведение трубки будет рассматриваться в последних параграфах этой главы. В следующих двух параграфах сосредоточим внимание на поставленной выше задаче.

§ 4. ДВА ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯ НАГРУЖЕНИЯ

Вернемся к задаче об устойчивости стойки под собственным весом, рассмотренной в конце § 2. Из (3.5) следует, что наличие окружающей жидкости глубиной L приводит к замене в (2.12)–(2.14) удельного веса γ_0 на $\gamma_0 - \gamma$. Например, (2.12) будет иметь вид

$$\pi r^2 L (\gamma_0 - \gamma) = 7.84 EJ/L^2 \quad (4.1)$$

При $\gamma_0 = \gamma$ стойка всегда устойчива.

Может показаться, что эта задача равносильна задаче об устойчивости стержня, вертикально опущенного в жидкость и защемленного на уровне ее свободной поверхности (рис. 1.3), стоит лишь поменять знаки при γ_0 и γ . Следует однако иметь в виду, что в этом случае имеется еще концевая следящая сила, равная $FL\gamma$. Значительно отличаются сжимающие усилия и в их неотклоненном состоянии (§ 1).

Формулы типа (4.1) находят многочисленное применение. Например, с их помощью можно оценить устойчивую длину вертикального положения кабеля в воде, когда его верхний конец не поддерживается [9]. Несмотря на относительно малую изгибную жесткость и удельный вес, превышающий удельный вес воды ($\gamma_0 > \gamma$), существует длина $L = 1.25 \sqrt[3]{Er^2/(\gamma_0 - \gamma)}$, при которой и меньшей ее нижняя часть кабеля не обрушивается на дно. Этой формулой определяется, какая

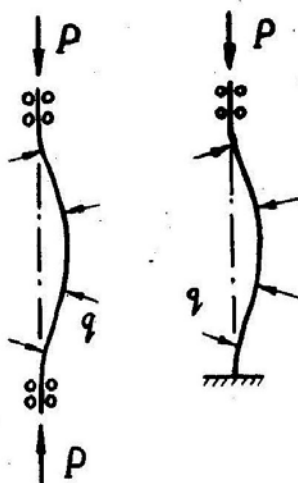


Рис. 1.6. Концы стержня могут перемещаться в осевом направлении; поворот их не допускается.

часть кабеля может находиться на плаву в вертикальном положении.

При этом определенное поддерживающее влияние на кабель оказывает давление $p_0 = \gamma H$, где H — глубина верхнего конца от поверхности воды. Последнее обстоятельство, конечно, не учтено в (4.1).

Рассмотрим еще один частный случай — действие осевой силы P и постоянной части p_0 гидростатического давления на стержень, концы которого могут свободно скользить в опорах в продольном направлении (рис. 1.6). При этом собственным весом стержня пренебрегаем.

Имеют место условия $w = dw/dx = 0$ ($x=0, L$) и уравнение (3.3)

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + (P - Fp_0) \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (4.2)$$

Решение имеет вид

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x \quad \text{при} \quad \alpha^2 = (P - Fp_0)/(EJ) > 0$$

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x} \quad \text{при} \quad \alpha^2 = (Fp_0 - P)/(EJ) > 0$$

Удовлетворение указанным условиям закрепления дает в первом случае уравнение

$$2(1 - \cos \alpha L) - \alpha L \sin \alpha L = 0$$

при $C_k \neq 0$. Низший ненулевой корень его равен $\alpha L = 2\pi$. Следовательно, имеет место потеря устойчивости стержня при

$$(P - Fp_0)_* = 4\pi^2 EJ/L^2 \quad (4.3)$$

Отметим, что во втором случае при всех αL коэффициенты C_k равны нулю. Следовательно в рассматриваемой задаче нет потери устойчивости при $Fp_0 > P$.

Представляет интерес вопрос о поведении стержня при всестороннем давлении p_0 , т.е. когда концевые силы порождаются давлением жидкости $P = Fp_0$. В силу специального устройства опор сила P не меняет направления при изгибе.

Эта задача в разных предположениях и постановках рассматривалась во многих работах, например, в [13, 14, 17]. В [13] принимается, что на упругую бесконечную полосу ($-\infty \leq x \leq \infty$, $-h/2 \leq y \leq h/2$) действует равномерное давление p_0 вдоль ее границ $y = \pm h/2$. Кроме того, полоса сжата в продольном направлении x тем же давлением p_0 . С использованием уравнений плоской

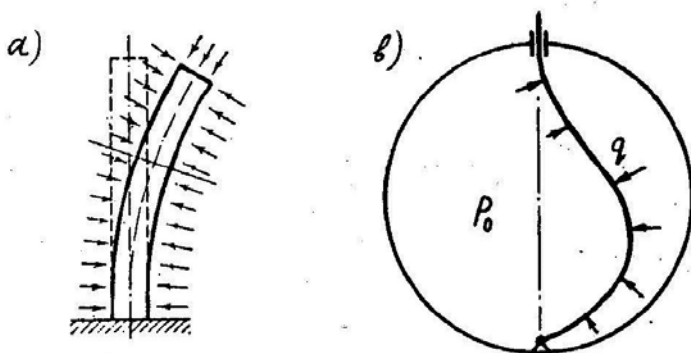


Рис. 1.7: а) Стержень под равномерным давлением. б) Поведение гибкой проволоки в емкости высокого давления.

теории упругости впервые было найдено, что полоса всегда устойчива. Имеются также выводы противоположного характера [14].

Однако эти эффекты выходят за рамки элементарной теории изгиба (4.2). В рассматриваемом случае $P = Fp_0$ уравнение (4.2) имеет решение

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3,$$

которое при удовлетворении условиям закрепления стержня дает $C_k = 0$. Стержень под всесторонним равномерным давлением всегда устойчив.

Это утверждение справедливо и для консольного стержня, когда можно не учитывать его собственного веса (рис. 1.7, а). "В подтверждение сказанного можно обратиться к нашим повседневным наблюдениям. Ведь не мешает же атмосферное давление сохранять прямолинейную форму тонкой соломинке при любой ее длине и жесткости" [8].

В заключение снова подчеркнем некоторые особенности боковых сил (3.2). В отличие от выталкивающей силы, представляющей собой интеграл по поверхности тела от переменной части гидростатического давления, в (3.2) входит полное давление $p_0 + \gamma x$. Следовательно, q зависит от глубины погружения объекта в жидкость и от средней части давления p_0 . Так как в разного рода технических устройствах p_0 может намного превосходить переменную часть гидростатического давления, то влияние p_0 на боковую силу q в целом следует учитывать.

Рассмотрим, например, поведение совершенно гибкой проволоки в емкости высокого давления [8]. Один конец этой проволоки закреплен, а другой пропущен через отверстие в стенке емкости (рис. 1.7, б). Допускаем, что проволока смещается в отверстии без трения. Изогнутая проволока будет выталкиваться силами q до тех пор, пока она не станет прямой. Проволока с конечной изгибной жесткостью, очевидно, не будет полностью выпрямляться. Появятся в ней изгибающие моменты и перерезывающие силы.

§ 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЗАКРЕПЛЕНИЯ. ШАХТНЫЙ СТВОЛ

Вертикальный стержень закреплен нижним концом, а верхний конец его может находиться в разных условиях. Предполагается, что жидкость оказывает только боковое давление и не создает осевых сил, т.е. не воздействует на концевые сечения стержня. Уровень жидкости совпадает с верхним концом стержня.

Такая схема может быть принята, например, для расчета шахтных труб [15]. В противоположность обычной практике они могут не находиться в непосредственном контакте с горной породой. В условиях наносных слоев шахтная труба по всей своей длине (до 500 м) окружена жидкой битумной массой, заполняющей пространство между наружной стенкой и горной породой. Труба опирается нижним концом на кольцевой бетонный фундамент, причем установленная на нем толстая свинцовая плита обеспечивает желательный шарнирный эффект. В других случаях требуется бетонировать нижний конец на значительной длине, что равносильно заземлению. Верхний конец может быть подвижным в горизонтальном направлении или такое перемещение исключается плитой, построенной вокруг трубы и жестко закрепленной в горных породах. В обоих этих случаях имеется свобода перемещения в осевом направлении, так что вес трубы воспринимается нижней опорой. Такая же схема реализуется в практике морской добычи нефти и т.д.

Итак, уравнение (3.3) в данном случае принимает вид

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + t \left(\xi \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{dw}{d\xi} \right) = 0, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad t = \frac{FL^3(\gamma_0 - \gamma)}{EJ} \quad (5.1)$$

Начало координаты ξ совпадает с верхним концом стержня. Решение в [15] разыскивается в рядах

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k \quad (5.2)$$

Подстановка (5.2) в (5.1) дает рекуррентную формулу

$$(k+2)(k+3)(k+4)C_{k+4} + t(k+1)C_{k+1} = 0,$$

откуда все константы могут быть выражены через C_0 , C_1 , C_2 , C_3 . Окончательно, решение имеет вид

$$w = C_0 + C_1 \xi \left(1 + \sum_{\nu=1} K_1^0(\nu) t^\nu \xi^{3\nu} \right) + \\ + C_2 \xi^2 \left(1 + \sum_{\nu=1} K_2^0(\nu) t^\nu \xi^{3\nu} \right) + C_3 \xi^3 \left(1 + \sum_{\nu=1} K_3^0(\nu) t^\nu \xi^{3\nu} \right) \quad (5.3)$$

Во входящих сюда обозначениях K_k^m нижние индексы соответствуют индексам констант, а верхние — порядку производной для w . Их значения

$$K_1^0(\nu) = \frac{(-1)^\nu}{(3\nu+1)!} \prod_{n=0}^{\nu-1} (1+3n), \quad K_2^0(\nu) = \frac{(-1)^\nu \cdot 2!}{(3\nu+2)!} \prod_{n=0}^{\nu-1} (2+3n), \\ K_3^0(\nu) = \frac{(-1)^\nu \cdot 3!}{(3\nu+3)!} \prod_{n=0}^{\nu-1} (3+3n),$$

табулированы [15]. При возрастании ν происходит их быстрое убывание. Например, $K_1^0(1)=-0.042$, $K_1^0(2)=0.079 \cdot 10^{-2}$, $K_2^0(1)=-0.033$, $K_2^0(2)=0.049 \cdot 10^{-2}$, $K_3^0(1)=-0.025$, $K_3^0(2)=0.030 \cdot 10^{-2}$. Все $K_k^0(\nu)$ при $\nu=3, 4, \dots$ убывают на два десятичных порядка.

Первые три производных от (5.3), необходимые для определения констант, равны

$$\frac{dw}{d\xi} = C_1 \left(1 + \sum_{\nu=1} K_1^1(\nu) t^\nu \xi^{3\nu} \right) + \\ + 2C_2 \xi \left(1 + \sum_{\nu=1} K_2^1(\nu) t^\nu \xi^{3\nu} \right) + 3C_3 \xi^2 \left(1 + \sum_{\nu=1} K_3^1(\nu) t^\nu \xi^{3\nu} \right), \\ \frac{d^2 w}{d\xi^2} = C_1 \sum_{\nu=1} K_1^2(\nu) t^\nu \xi^{3\nu-1} + \\ + 2C_2 \left(1 + \sum_{\nu=1} K_2^2(\nu) t^\nu \xi^{3\nu} \right) + 6C_3 \xi \left(1 + \sum_{\nu=1} K_3^2(\nu) t^\nu \xi^{3\nu} \right), \\ \frac{d^3 w}{d\xi^3} = C_1 \sum_{\nu=1} K_1^3(\nu) t^\nu \xi^{3\nu-2} + \\ + 2C_2 \sum_{\nu=1} K_2^3(\nu) t^\nu \xi^{3\nu-1} + 6C_3 \left(1 + \sum_{\nu=1} K_3^3(\nu) t^\nu \xi^{3\nu} \right) \quad (5.4)$$

С использованием (5.3), (5.4) рассмотрим разные условия закрепления концов стойки.

а) В предыдущем параграфе было определено критическое значение параметра (4.1) для случая верхнего свободного и нижнего заземленного концов. Удовлетворяя выражения (5.3), (5.4) условиям

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{d^3 w}{d\xi^3} = 0 \quad (\xi=0), \quad w = \frac{dw}{d\xi} = 0 \quad (\xi=1),$$

находим $C_0 = C_2 = C_3 = 0$ и при $C_1 \neq 0$ уравнение

$$1 + \sum_{\nu=1} K_1^1(\nu) t^\nu = 0$$

Отсюда наименьшее критическое значение t равно

$$t_* = 7.84, \quad (5.5)$$

что совпадает с (4.1) и (2.12)

б) Оба конца шарнирно закреплены: $w = d^2 w / d\xi^2 = 0 \quad (\xi=0,1)$.

Критическое значение равно

$$t_* = 18.58 \quad (5.6)$$

с) Верхний конец закреплен шарнирно, нижний — заземлен. Из условий $w = d^2 w / d\xi^2 = 0 \quad (\xi=0)$, $w = dw/d\xi = 0 \quad (\xi=1)$ и из (5.3), (5.4) имеем

$$t_* = 52.50 \quad (5.7)$$

д) Верхний конец заземлен, а нижний — шарнирно оперт: $w = dw/d\xi = 0 \quad (\xi=0)$, $w = d^2 w / d\xi^2 = 0 \quad (\xi=1)$. Критическое значение параметра нагрузки

$$t_* = 30.01 \quad (5.8)$$

Как видно, взаимная замена условий в случаях с) и д) приводит к значительным отличиям в критических значениях параметра нагрузки (5.7) и (5.8).

е) Оба конца заземлены. Критический параметр равен

$$t_* = 74.62 \quad (5.9)$$

§ 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБКИ С ЖИДКОСТЬЮ. ВЫПУЧИВАНИЕ РАСТЯНУТОЙ ТРУБКИ

Рассмотрим ту же задачу, что в § 3, и соответствующее уравнение (3.1). Отличие состоит в том, что жидкость с удельным весом γ_1 и средним давлением p_1 заполняет трубку с площадью сечения канала F_1 . Наружная поверхность не контактирует с жидкостью. Теперь в (3.1) F необходимо заменить на площадь поперечного сечения трубки F_0 . В случае круглой трубки $F_0 = \pi(r^2 - r_1^2)$ или при малой толщине h стенки $F_0 = 2\pi r h$. Так же как в § 3, примем начало оси x на верхнем конце трубки.

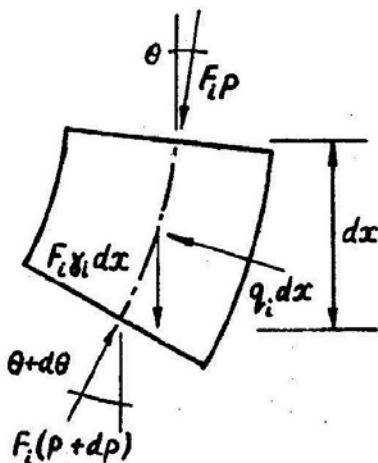


Рис. 1.8. Элемент жидкости внутри трубы длиной dx .

Боковые распределенные силы q создаются воздействием жидкости на внутренние стенки трубки и равны $q = -q_1$, где $q_1 dx$ — боковое воздействие стенки на элемент жидкости длиной dx (рис. 1.8). Проекция сил на недеформированные оси x и z дадут

$$\gamma_1 F_1 dx + p F_1 \cos \theta - (p+dp) F_1 \cos(\theta+d\theta) - q_1 dx \sin\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = 0,$$

$$p F_1 \sin \theta - (p+dp) F_1 \sin(\theta+d\theta) + q_1 dx \cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = 0,$$

С учетом $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta \approx dw/dx$ имеем отсюда

$$\frac{dp}{dx} = \gamma_1, \quad q_1 = F_1 \frac{d}{dx} \left(p \frac{dw}{dx} \right) \quad (6.1)$$

Из первого уравнения (6.1) $p = p_1 + \gamma_1 x$, а из второго

$$q = -q_1 = -F_1 \frac{d}{dx} \left[(p_1 + \gamma_1 x) \frac{dw}{dx} \right] \quad (6.2)$$

Поэтому уравнение (3.1) для случая трубки приобретает вид

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} \left\{ \left[(P + F_0 \gamma_0 x) + F_1 (p_1 + \gamma_1 x) \right] \frac{dw}{dx} \right\} = 0 \quad (6.3)$$

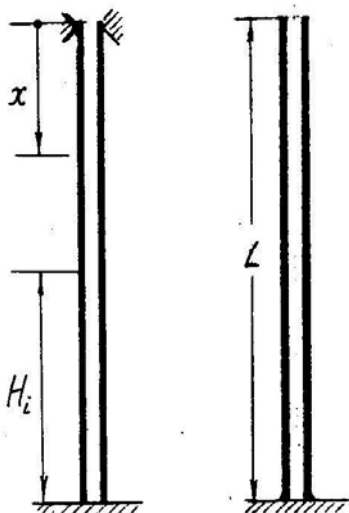


Рис. 1.9. Трубки с жидкостью.

Если жидкость заполняет трубку лишь до высоты $H_1 < L$ (рис. 1.9), то в (6.3) член $p_1 + \gamma_1 x$ необходимо брать в виде $p_1 + \gamma_1 (x - H_1)$ и только на участке $L - H_1 \leq x \leq L$, полагая $p_1 + \gamma_1 x = 0$ при $0 \leq x < L - H_1$. Такое же утверждение справедливо в отношении члена $(p_0 + \gamma_0 x)$ в (3.3).

Если в трубке с обоими закрытыми концами верхнюю часть занимает легкая среда (газ) под давлением p_1 , то вместо $p_1 + \gamma_1 x$ необходимо брать p_1 на участке $0 \leq x \leq L - H_1$ и $p_1 + \gamma_1 (x - H_1)$ на участке $L - H_1 \leq x < L$. Очевидно, при этом усилие $P + F_0 \gamma_0 x$ по-прежнему берется на всей длине L . Высота H_1 может быть и выше L ,

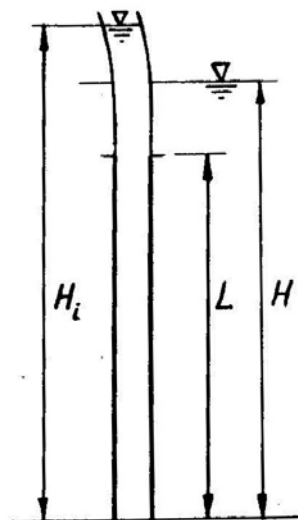


Рис. 1.10. Подвод жидкости в трубу с помощью гибкого шланга. Разные уровни жидкостей в трубе и вне трубы.

например, в случае подвода жидкости с помощью гибкого шланга (рис. 1.10). Тогда давление $\gamma(H_1 - L)$ включается в состав среднего давления p_1 .

Как видно из (6.3), для изгиба трубки, содержащей жидкость, имеют место те же закономерности, что без жидкости, если концевую вертикальную сжимающую силу представить в виде

$$P_e = P + F_1 p_1, \quad (6.4)$$

а собственный удельный вес стержня γ_0 заменить на

$$\gamma_e = \gamma_0 + (F_1/F_0)\gamma_1 \quad (6.5)$$

Отсюда следует, что в противоположность (3.4), (3.5) внутреннее гидростатическое давление приводит к уменьшению критических значений концевой силы и собственного веса трубки.

Рассмотрим более подробно воздействие на трубку только концевой силы и постоянного внутреннего давления, пренебрегая собственными весами трубки и жидкости [8].

Пусть тонкостенная трубка с внутренним радиусом r_1 и толщиной стенки h соединяет две емкости с газом под давлением p_1 (рис. 1.11, а). Если один из концов трубки может свободно скользить в опоре, то $P=0$. Не испытывает осевого сжатия и трубка, представленная на рис. 1.11, б. При этом уравнение (6.3) имеет вид

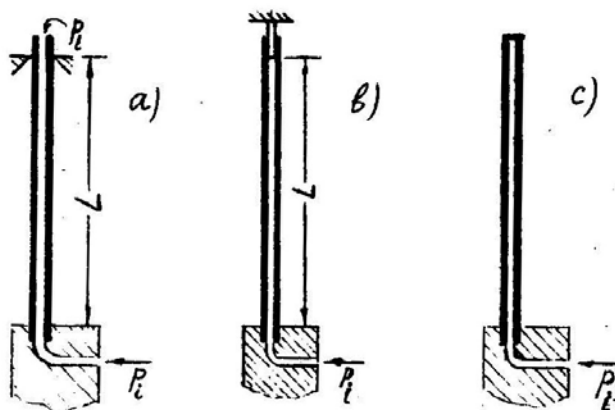


Рис. 1.11. Трубки с различными условиями на одном из концов. Внутреннее давление оказывает различное воздействие на трубки.

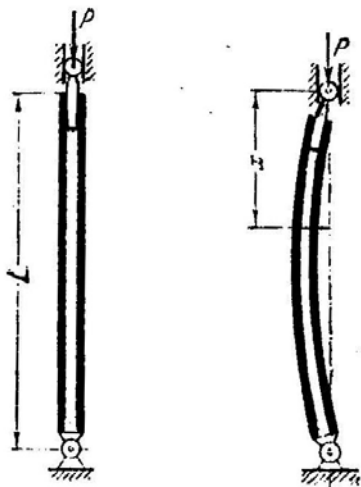


Рис. 1.12. Потеря устойчивости трубки в отсутствии осевого сжатия ее стенки.

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{p_1}{Ehr_1} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

В случае защемленных краев критическое значение внутреннего давления равно $p_{1*} = 4\pi^2 E h r_1 / L^2$. При превышении внутренним давле-

нием этого значения возможно выпучивание трубки, как при осевом сжатии. Для схемы на рис. 1.12, рассмотренной в книге [8], справедлив тот же результат, если $p_1 = \pi^2 E h r_1 / L^2$, а концевая сила равна $P = \pi^3 E h r_1^3 / L^2$.

Возможно выпучивание растянутой трубки (силой $-P$). Для этого нужно

$$(-P + F_1 p_1) \geq 4\pi^2 E J / L^2 \quad (6.6)$$

Если растягивающее усилие $-P$ создается за счет внутреннего давления p_1 , действующего на кольцевую диафрагму или ступеньку (рис. 1.13, а) радиусом отверстия r_h на скользящем конце трубки, то $P = \pi(r_1^2 - r_h^2)p_1$.

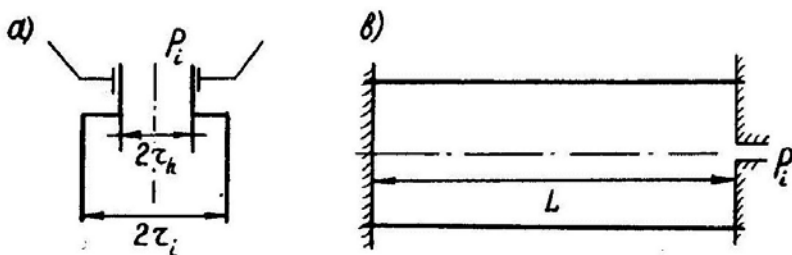


Рис. 1.13. а) Концевое устройство трубки со ступенькой, допускающее свободное скольжение, б) Трубка, защемленная по концам в неподвижных стенках.

Тогда из (6.6) получаем условие выпучивания

$$p_1 \geq \frac{4\pi^2 E h r_1^3}{L^2 r_h^2} \quad (6.7)$$

Если ступенька отсутствует ($r_h = r_1$), то из (6.7) получаем указанное выше значение критического давления. Если диафрагма полностью закрывает скользящий конец трубы ($r_h = 0$), то такая труба устойчива при любом значении внутреннего давления. Этот же результат справедлив для схемы, показанный на рис. 1.11, с. Здесь уместно провести сравнение с вопросом об устойчивости стержня под всесторонним внешним давлением (§ 5).

Теперь несколько видоизменим задачу. Пусть трубка прикреплена концами к абсолютно жестким стенкам, расстояние между кото-

рыми не изменяется (рис. 1.13, б). Может ли она выпучиться при действии внутреннего давления p_1 ? Ввиду радиальной раздачи возникает осевая растягивающая сила $-P = -2\pi r_1 N_x$, где N_x — усилие на, продольную полоску единичной ширины стенки. Пренебрегаем изгибным краевым эффектом стенки около концевых сечений.

Воспользуемся законом Гука

$$N_x = K(\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta), \quad N_\theta = K(\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x)$$

Ввиду отсутствия осевой деформации ($\epsilon'_x = 0$) имеем $N_x = K\nu \epsilon_\theta = \nu N_\theta$, где из условия равновесия кольца $N_\theta = r_1 p_1$. Поэтому $-P = -2\pi \nu r_1^2 p_1$, и в соответствии с (6.6)

$$p_1 \geq \frac{4\pi^2 E h r_1}{L^2 (1-2\nu)} \quad (6.8)$$

Таким образом, выпучивание возможно. С увеличением коэффициента Пуассона материала критическое внутреннее давление возрастает. Прямолинейная форма трубки из несжимаемого материала ($\nu = 1/2$) устойчива по отношению к внутреннему постоянному давлению.

Следует проверить, не приводит ли давление, определяемое по (6.8), к большим кольцевым напряжениям и разрыву трубки. Допускаемое значение давления по этому критерию определяется формулой $p_1 = \sigma_b h / r_1$, где σ_b — предел прочности. С учетом (6.8) находим

$$\left(\frac{r_1}{L}\right)^2 = \frac{1-2\nu}{4\pi^2} \left(\frac{\sigma_b}{E}\right)$$

Для сталей $\sigma_b/E \sim 10^{-2} - 10^{-3}$, $\nu \approx 0.3$. Следовательно, по этой формуле $r_1/L \approx 0.003 - 0.01$. Таким образом, в этой задаче для труб с малым отношением диаметра к длине прежде наступает выпучивание упругой линии, чем их разрыв.

Теперь рассмотрим устойчивость трубы с жидкостью под их собственным весом ($P = p_1 = 0$). Нижний конец трубы зашечлен, верхний свободен, $H_1 = L$. Из (6.3) имеем

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + (F_0 \gamma_0 x + F_1 \gamma_1 x) \frac{d^2 w}{dx^2} + (F_0 \gamma_0 + F_1 \gamma_1) \frac{dw}{dx} = 0$$

Как видно, здесь в создании боковых сил играет роль не только кривизна, но и угол отклонения упругой линии от вертикали.

По аналогии с (4.1) критическое значение параметров можно представить в виде

$$F_0 \gamma_0 + F_1 \gamma_1 = 7.84 EJ/L^3 \quad (6.9)$$

В случае круглой трубы

$$\gamma_0 + \frac{r_1}{2h} \gamma_1 = 3.92 \frac{Er_1^2}{L^3}$$

§ 7. УСТОЙЧИВОСТЬ БУРИЛЬНОЙ И ДОБЫВАЮЩЕЙ НЕФТЯНОЙ КОЛОННЫ

Большое количество исследований посвящено изучению устойчивости морских буровых и добывающих нефтяных труб, гидравлических колонн, трубчатых стоек морских нефтяных платформ и других сооружений [1-6, 10, 11, 16]. Учитываются разные уровни и плотности окружающей воды и внутренней жидкости (глинистый раствор, нефть и т.д.).

Как было установлено в предыдущих параграфах, наружное давление способствует стабилизации вертикально стоящих труб, а внутреннее давление приводит к уменьшению критических значений параметров. Одновременный учет этих факторов считается важным для рассматриваемых сооружений. Ниже, следуя работам [1-6], приведем решение подобных задач.

В отличие от предыдущих параграфов, здесь удобнее взять начало координаты x у нижнего основания трубы, закрепленного на дне. За положительное усилие $N(x)$ принимается растяжение. Подъемная сила P , создаваемая поддерживающими буйами, платформой, судном и т.д., считается положительной. Она приложена к верхнему концу трубы.

Таким образом, эта задача относится к третьему типу исходного состояния, когда верхняя часть трубы растянута, а нижняя может быть сжатой (§ 1). Граница этих зон определяется формулой типа (1.4). Однако, как было показано в предыдущем параграфе, может иметь место выпучивание трубы, растянутой даже по всей длине.

Кроме того, верхний конец соединен со шлангом, подающим жид-

кость в трубу. Жесткостью шланга пренебрегаем по сравнению с жесткостью трубы.

Уровни H и H_1 окружающей воды и жидкости в трубе могут находиться выше верхнего конца трубы (рис. 1.10). Поэтому давление в окружающей воде на уровне верхнего среза трубы равно $\gamma(H-L)$, а во внутренней жидкости $\gamma_1(H_1-L)$. Предполагается, что жидкость не оказывает давления на кольцевой торец трубы. Заметим, что учет скорости движения жидкости в трубе дает дополнительные эффекты [12]. Однако здесь эта скорость считается малой и не принимается во внимание. Не учитывается также крутящий момент и вращение трубы в случае буровой колонны.

Уравнение нейтрального равновесия трубы можно получить по аналогии с уравнениями (3.3) и (6.3) с учетом сказанного выше

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} \left\{ \left[-P - F\gamma(H-L) + F_1\gamma_1(H_1-L) + \right. \right. \quad (7.1) \\ \left. \left. + F_0\gamma_0(L-x) - F\gamma(L-x) + F_1\gamma_1(L-x) \right] \frac{dw}{dx} \right\} = 0$$

Введем следующие обозначения

$$\xi = x/H, \quad \beta = (F_0\gamma_0 - F\gamma + F_1\gamma_1)L^3/(EJ),$$

$$\tau = (N(0) + F\gamma H - F_1\gamma_1 H_1)L^3/(EJ), \quad N(0) = P - F_0\gamma_0 L,$$

где $N(0)$ — действительное усилие растяжения трубы у основания ($x=0$), β и τ — безразмерные эффективные вес единичной длины и усилие растяжения у основания. Уравнение (7.1) принимает вид

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} - \frac{d}{d\xi} \left[(\tau + \beta\xi) \frac{dw}{d\xi} \right] = 0 \quad (7.2)$$

Приведем решение его в случае условий шарнирного закрепления обоих концов

$$w = d^2 w / d\xi^2 = 0, \quad (x = 0, L) \quad (7.3)$$

В работах [1-6] были применены два метода для решения поставленной задачи с целью охватить области значений β , τ , представляющих практический интерес. Это примененный в § 5 метод степен-

ных рядов и решение в замкнутой форме.

В последнем случае имеем

$$w(\xi) = \beta^{-1/3} [C_1 W_1(z) + C_2 W_2(z) + C_3 W_3(z) + C_4], \quad (7.4)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, а функции

$$W_1(z) = \int_z^{\infty} Ai(\zeta) d\zeta, \quad W_2(z) = \int_z^{\infty} Bi(\zeta) d\zeta, \quad (7.5)$$

$$W_3(z) = - \int_z^{\infty} Ai(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} Bi(\eta) d\eta d\zeta + \int_z^{\infty} Bi(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} Ai(\eta) d\eta d\zeta$$

$$z = \beta^{1/3} \xi + \tau \beta^{-2/3}$$

$Ai(z), Bi(z)$ — функции Эйри первого и второго рода.

Решение (7.4), (7.5) при удовлетворении условиям (7.3) позволяет определить критическое значение безразмерного эффективного растяжения τ_* в зависимости от β . Вычисления связаны с необходимостью оперировать значениями функций Эйри, когда $\xi = 0$ и $\xi = 1$ и $z_0 = \tau \beta^{-2/3}$ и $z_1 = \beta^{1/3} + \tau \beta^{-2/3}$. Однако при больших значениях z_0 и z_1 функция $Ai(z)$ сильно убывает, а $Bi(z)$ — возрастает, а именно

$$Ai(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$Bi(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right),$$

Поэтому решение уравнения (7.2) разыскивалось также в рядах (5.2). Четыре постоянные определяются из условий (7.3). Это решение позволяет провести численные расчеты при больших значениях аргумента. Следовательно, охватывается расчетами вся область изменения параметров τ и β .

Критические значения τ_* в зависимости от β приведены на рис. 1.14. Кривая обозначена знаком (Т). Выпучивание может появиться, если $\tau \geq \tau_*$. Зная τ_* , можно определить эффективное усилие растяжения у нижнего основания. Однако, удобнее для практики значение подъемной силы, которая должна быть приложена к верхнему концу трубы (P). Она должна быть достаточно большой, чтобы предот-

вратить выпучивание трубы. В безразмерном виде эта сила выражается в виде

$$\delta = PL^3/(EJ) = \tau + \beta \quad (7.6)$$

Критические значения δ_* , при достижении которых может появиться выпучивание, также приведены на рис. 1.14 (кривая (D)). Для устойчивости необходимо $\delta \geq \delta_*$.

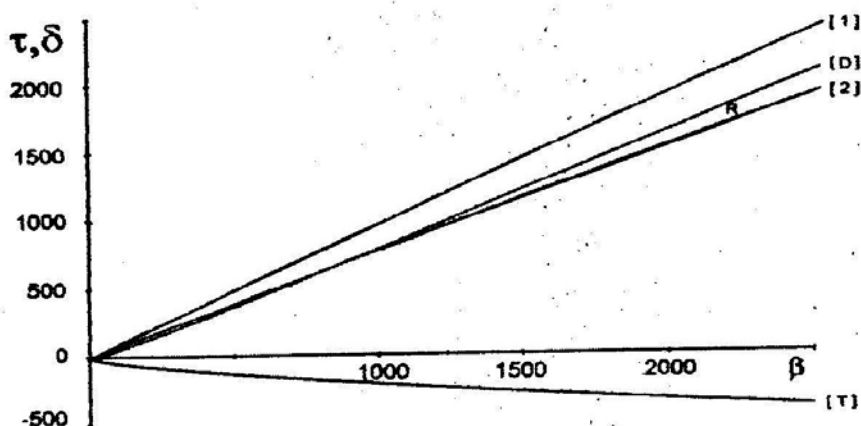


Рис. 1.14. Зависимости критических параметров от безразмерного эффективного веса единичной длины трубы.

Обычно применяются два подхода для построения этих зависимостей. Первый из них состоит в том, что прикладываемая к верхнему концу сила должна быть равна сумме весов всей колонны и бурильного раствора внутри трубы за вычетом веса окружающей воды, вытесненной колонной. Если есть поддерживающие буи, то их подъемная сила также вычитается. В безразмерном виде первый подход означает

$$\delta \geq \beta \quad (7.7)$$

Это дает в плоскости δ - β область, где имеется устойчивость (кривая (1)). Однако, этот критерий может привести к неоправданно высоким значениям для подъемной силы.

Второй подход исходит из требования, чтобы по всей длине трубы имело место растяжение. Критерий приводит к неравенству

$$\delta \geq \eta \beta, \quad \eta = \frac{(F_0 \gamma_0 - F_1 \gamma_1)}{F_0 \gamma_0 + F_1 \gamma_1 - F \gamma} \quad (7.8)$$

Кривая (2) на рис.1.14 дана для значения $\eta = 0.8$. Вторым подходом может дать в плоскости δ - β области как устойчивости, так и неустойчивости. Его применение связано с необходимостью назначения некоторого коэффициента безопасности. Узкая область R между линиями (D) и (2) показывает параметры, когда растянутая по всей длине труба может испытывать выпучивание под действием гидростатического давления внутренней жидкости.

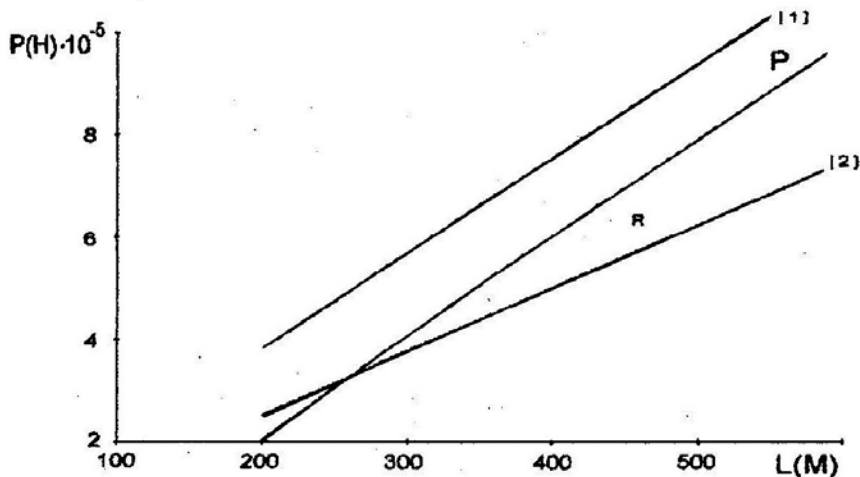


Рис. 1.15. Зависимость требуемой подъемной растягивающей силы на верхнем конце трубы от ее длины. Превышение подъемной силы указанных значений обеспечивает устойчивость трубы. Концы трубы имеют шарнирное закрепление.

На рис.1.15 показаны требуемые значения подъемной силы на верхнем конце трубы в зависимости от ее длины. Использованы все указанные выше три критерия.

Принятые при этом параметры равны [4] $D_1 = 2r_1 = 0.476$ м, $h = 0.016$ м, $\gamma_0 = 7.85g$ кг/м²с², $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\gamma_1 = 1.5\gamma$. Из

(7.8) получаем $\eta = 0.663$. Кроме того, была принята плавучесть буюв, равная 0.3 от веса воды, вытесненной трубой.

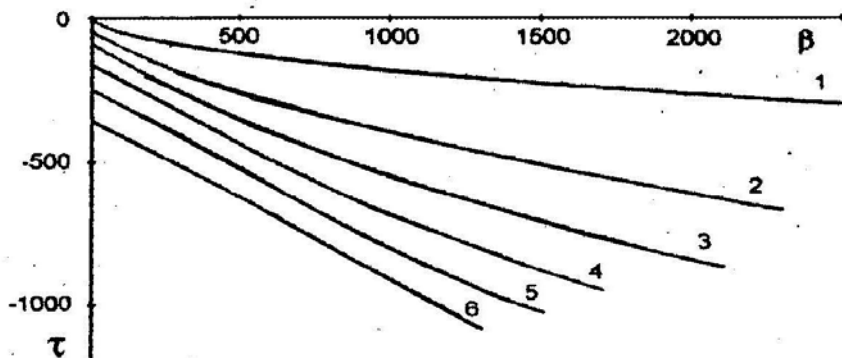


Рис. 1.16. Зависимость безразмерного эффективного усилия растяжения у основания трубы от эффективного веса единичной длины. Приведены критические значения для первых шести форм выпучивания. Концы трубы имеют неподвижное шарнирное закрепление.

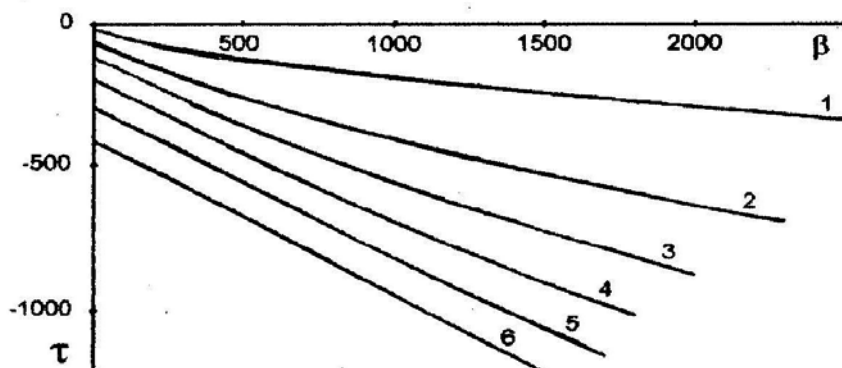


Рис. 1.17. То же, что на рис. 1.16, но для случая нижнего защемленного и верхнего шарнирно закрепленного концов.

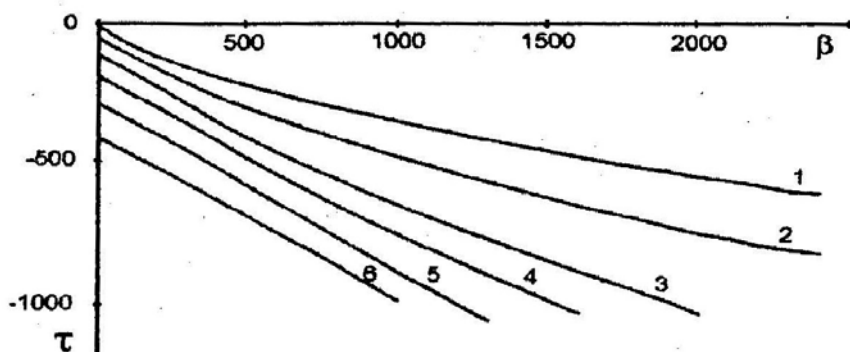


Рис. 1.18. То же, что на рис. 1.16, но для случая нижнего шарнирно закрепленного и верхнего защемленного концов.

Как видно из рисунка, первый подход приводит к высоким значениям необходимой подъемной силы, приложенной к верхнему концу трубы. Второй подход допускает появление выпучивания растянутой трубы. Это возможно при длине $L \geq 260\text{м}$.

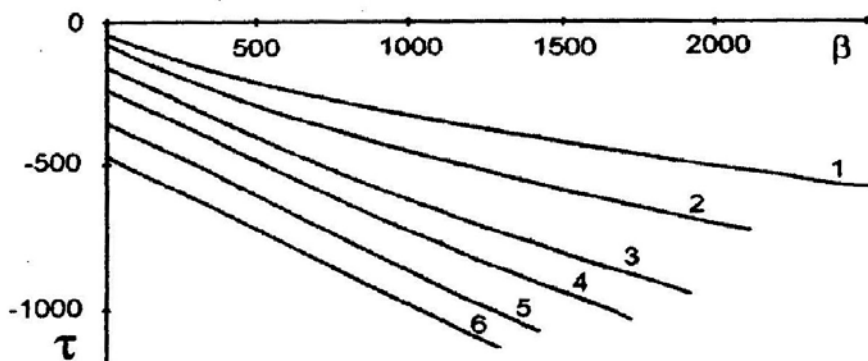


Рис. 1.19. То же, что на рис. 1.16, но для случая обоих защемленных концов.

В заключение параграфа приведем на рис.1.16 результаты, относящиеся к первым шести формам потери устойчивости в случае обоих шарнирно закрепленных концов [1,3]. На рис.1.17 даны аналогичные результаты для случая нижнего защемленного и верхнего шарнирно закрепленного концов трубы, а на рис.1.18 наоборот, для случая нижнего шарнирно закрепленного и верхнего защемленного концов. На рис.1.19 представлены результаты для трубы с обоими защемленными концами.

§ 8. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРУБ, ЗАКРЕПЛЕННЫХ НА ПОДВИЖНЫХ ОПОРАХ

В действительности в рассмотренной в предыдущем параграфе задаче имеет место более сложное закрепление концов вертикальной трубы. Для моделирования горизонтальной подвижности плавсредств, к которым крепится верхний конец трубы, рассмотрены случаи подвижного шарнирного закрепления и подвижного защемления [2,5]. Эти перемещения предполагаются малыми по сравнению с длиной трубы.

В более общем виде условия закрепления имеют вид

$$EJ \frac{d^3 w(0)}{dx^3} - N(0) \frac{dw(0)}{dx} + C_B w(0) = 0, \quad (8.1)$$

$$EJ \frac{d^2 w(0)}{dx^2} + r_B \frac{dw(0)}{dx} = 0$$

для нижнего конца ($x=0$) и

$$EJ \frac{d^3 w(L)}{dx^3} - N(L) \frac{dw(L)}{dx} + C_T w(L) = 0, \quad (8.2)$$

$$EJ \frac{d^2 w(L)}{dx^2} - r_T \frac{dw(L)}{dx} = 0$$

для верхнего конца ($x=L$). Здесь C_B , C_T — коэффициенты упругого сопротивления движению в горизонтальном направлении нижнего и верхнего концов (линейные пружины), r_B , r_T — соответствующие коэффициенты сопротивления повороту сечений, N — действительное осевое усилие в трубе.

Условия неподвижного закрепления получаются из (8.1), (8.2) при $C_B = C_T = \infty$. Защемлению соответствуют коэффициенты $r_B = r_T = \infty$, а условию отсутствия моментов — $r_B = r_T = 0$. Верхний конец свободно перемещается, если $C_T = 0$, $r_T = 0$.

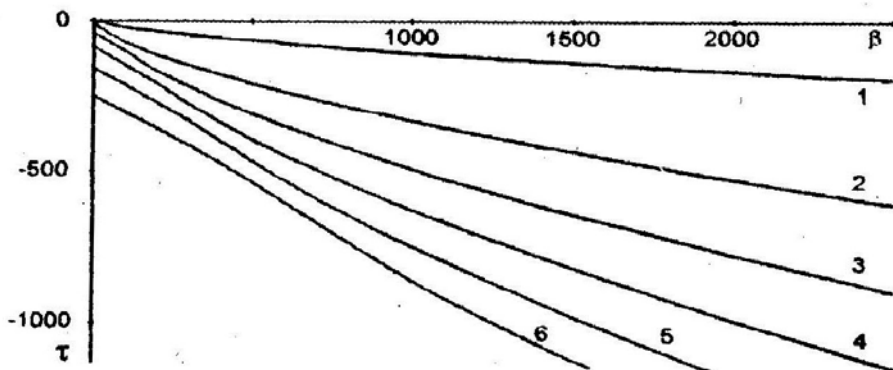


Рис. 1.20. То же, что на рис. 1.16, но для случая нижнего неподвижного шарнирно закрепленного и верхнего подвижного (в горизонтальном направлении) концов.

Для решения задачи применяются оба метода, указанные в предыдущем параграфе. Таким образом, охватывается широкая область изменения безразмерных параметров τ , β .

На рис. 1.20 приведены критические значения безразмерного усилия на нижнем основании трубы τ_c в зависимости от безразмерного эффективного веса β . Основание трубы шарнирно закреплено, а на верхнем конце имеется шарнир, подвижный в горизонтальном направлении ($C_B = \infty$, $r_B = 0$, $C_T = 0$, $r_T = 0$). Цифрами отмечены данные для первых шести форм потери устойчивости. Необходимость иметь значения $\tau_c(\beta)$ по высшим формам диктуется тем, что малые начальные отклонения трубы длиной в несколько сот метров могут приводить к развитию отклонений упругой линии от вертикали не только по первой форме.

На рис. 1.21 приводится зависимость $\tau_c(\beta)$ для первых шести форм выпучивания в случае неподвижного шарнирного опирания основания и подвижного защемления верхнего конца. Движение допускает-

ся по горизонтали. В условиях (8.1), (8.2) принимаются $C_B = \infty$, $C_T = 0$, $r_B = 0$, $r_T = \infty$.

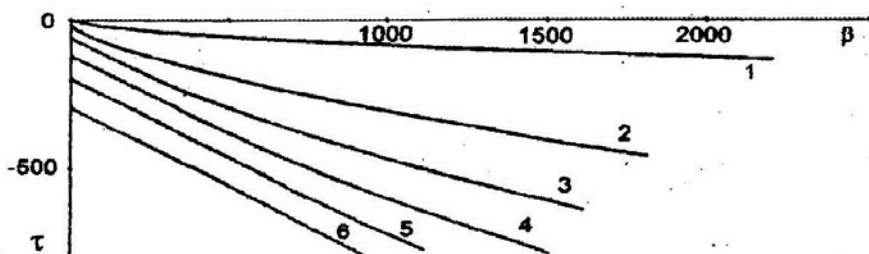


Рис. 1.21. То же, что на рис. 1.16, но для случая нижнего неподвижного шарнирного закрепления и верхнего подвижного (в горизонтальном направлении) защемления концов.

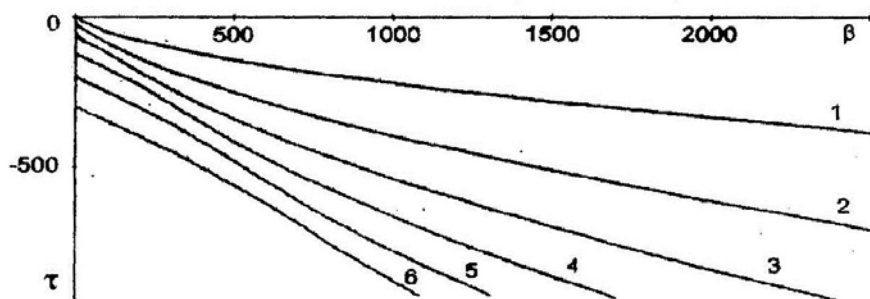


Рис. 1.22. То же, что на рис. 1.16, но для случая нижнего неподвижного защемления и верхнего подвижного (в горизонтальном направлении) шарнирного закрепления концов.

На рис. 1.22 даны аналогичные зависимости для случая неподвижного защемления основания и подвижного шарнирного закрепления верхнего конца трубы.

Наконец, рис. 1.23 иллюстрирует области выпучивания для случая неподвижного защемления основания и подвижного защемления верхнего конца.

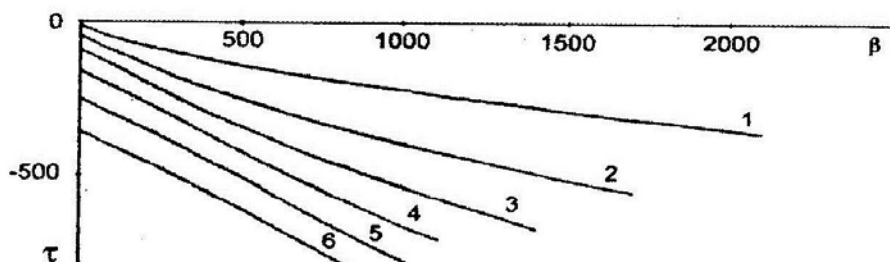


Рис. 1.23. То же, что на рис. 1.16, но для случая нижнего неподвижного защемления и верхнего подвижного (в горизонтальном направлении) защемления концов.

Для длинных тяжелых труб более важными являются условия крепления у основания, где либо имеется сжатие, либо наименьшее по длине растяжение. Области устойчивости при больших β мало зависят от условий на верхнем конце. Для шарнирного закрепления основания асимптотическое поведение критического значения имеет вид

$$\tau_* = -1.02 \beta^{2/3},$$

а для защемления основания

$$\tau_* = -2.34 \beta^{2/3}$$

ГЛАВА II

РАВНОВЕСИЕ МЕМБРАНЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

§ 1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ МЕМБРАНЫ ПОД ТЯЖЕСТЬЮ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим плоскую задачу о равновесии мембраны, представляющей собой днище некоторой полости с вертикальными абсолютно жесткими стенками и шириной $2L$ (рис. 2.1, а). В данном предположении вместо объема жидкости может рассматриваться площадь S вертикального сечения этого объема. Глубина жидкости в полости с недеформированным плоским днищем составляет $H_0 = S/2L$, следовательно, давление на него в соответствии с (0.1) равно γH_0 , где γ — удельный вес жидкости (давление на ее поверхности принято равным нулю).

Мембрана в отсутствии отклонения от горизонтали натянута усилием T_0 на стенках емкости ($x = \pm L$). Оно связано с удлинением мембраны 2Δ линейной зависимостью $T_0 = Eh\Delta/L$, где E , h модуль упругости и толщина мембраны. Отклонение ее $w(x)$ под действием веса жидкости и самой мембраны считается малым по сравнению с ее длиной. Очевидно, оно будет симметричным относительно вертикальной средней линии $x = 0$ площади S . Давление на мембрану и ее отклонение от горизонтального положения примем положительными в направлении вниз.

Дифференциальное уравнение равновесия мембраны при малых перемещениях w имеет вид

$$T_0 \frac{d^2 w}{dx^2} + p_* = 0, \quad (1.1)$$

где давление на деформированную мембрану равно

$$p_* = \gamma [H + w(x)] + \gamma_0 h \quad (1.2)$$

Здесь H — высота уровня жидкости от краев мембраны (рис. 2.1), γ_0 — удельный вес материала мембраны. Рассматривается лишь случай $H \geq 0$, что означает, что свободная поверхность жидкости не опускается ниже уровня крепления к стенкам прогнутой мембраны.

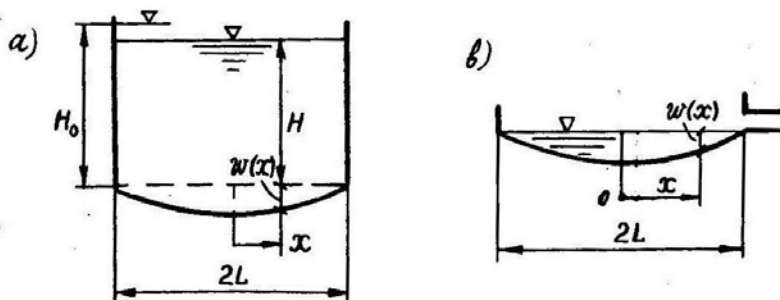


Рис. 2.1. а) Заданный объем жидкости в полости с деформированным дном (высота H_0 известна, H определяется из решения задачи), б) Случай известной высоты $H = 0$ (вырождение задачи).

Из условия несжимаемости жидкости (0.3) следует

$$2 L H_0 = 2 L H + \int_{-L}^L w \, dx \quad (1.3)$$

Запишем уравнения (1.1), (1.2) в виде

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = -\alpha^2 H - \alpha_0^2 h, \quad \alpha^2 = \frac{\gamma}{T_0}, \quad \alpha_0^2 = \frac{\gamma_0}{T_0}, \quad (1.4)$$

Величины H и H_0 не зависят от x . Поэтому общее решение уравнения (1.4)

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - H - (\alpha_0/\alpha)^2 h$$

Граничные условия для мембраны

$$w = 0 \quad (x = \pm L) \quad (1.5)$$

Удовлетворяя условиям (1.5), получаем

$$w = \left(H + \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} h \right) \left(\frac{\cos \alpha x}{\cos \alpha L} - 1 \right) \quad (1.6)$$

Решение справедливо, если $\cos \alpha L > 0$. При значениях αL , малых по сравнению с единицей,

$$w = \frac{L^2}{2} \left(H \alpha^2 + h \alpha_0^2 \right) \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) = \frac{L^2}{2T_0} (H\gamma + h\gamma_0) \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (1.7)$$

Рассмотрим два случая для величин H_0 и H .

1. При заданном значении H_0 , как, например, указано в начале параграфа ($H_0 = S/2L$), неизвестна величина H . Тогда последняя находится из уравнения (1.3)

$$H = H_0 \frac{\alpha L \cos \alpha L}{\sin \alpha L} - h \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha L \cos \alpha L}{\sin \alpha L} \right) \quad (1.8)$$

Отклонение мембраны определяется подстановкой в (1.6) выражения для H из (1.8)

$$w = \left(H_0 + h \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} \right) \frac{\alpha L}{\sin \alpha L} (\cos \alpha x - \cos \alpha L) \quad (1.9)$$

При значениях αL , малых по сравнению с единицей, справедливо

$$H = H_0 - \frac{2}{3} \frac{h\gamma_0}{T_0} L^2, \quad w = \frac{L^2}{2T_0} \left(H_0\gamma + h\gamma_0 \right) \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (1.10)$$

Поскольку $H \geq 0$, то на значение αL должно быть наложено ограничение. Например, в случае, когда можно пренебречь весом мембраны γ_0 и по сравнению с весом столба жидкости γH_0 , это значение должно находиться в пределах $0 < \alpha L \leq \pi/2$ или $0 < \gamma \leq (\pi/2L)^2 T_0$, ибо в (1.6), (1.8) необходимо $\cos \alpha L \geq 0$.

Случаю $H = 0$ (рис. 2.1, б) при указанном выше допущении относительно весов соответствует значение $\alpha L = \pi/2$, так как по физическому смыслу $H_0 > 0$. При этом отклонение от невозмущенной поверхности мембраны

$$w = \frac{\pi}{2} H_0 \cos \frac{\pi x}{2L}$$

Хотя величина H_0 задается, но в данном предельном случае нельзя определить ее значение, соответствующее $H = 0$. Следовательно, неизвестно и амплитудное значение отклонения w .

Как было показано во введении, это объясняется тем, что при $H = 0$, $h = 0$ система (1.4), (1.5) вырождается в задачу о собственных значениях $w_{xx} + \alpha^2 w = 0$, $w = 0$ ($x = \pm L$). А именно, низшим собственным значением ее является $\alpha L = \pi/2$, а собственной функцией — $\cos(\pi x/2L)$.

Однако, если не пренебрегать весом самой мембраны, то при $H = 0$ из (1.8) следует

$$H_0 = h \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \alpha L}{\alpha L \cos \alpha L} - 1 \right)$$

Так как высота столба жидкости H_0 является положительной и конечной величиной, то $\tan \alpha L > \alpha L$, т.е. должно быть $\alpha L < \pi/2$. При этом из (1.9)

$$w = h \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\cos \alpha x}{\cos \alpha L} - 1 \right)$$

Эта функция является вполне определенной.

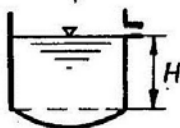


Рис. 2.2. Заданная высота уровня жидкости H (H_0 определяется из решения задачи).

2. Глубина H может быть задана в задаче, если, например, имеется отверстие в боковой стенке полости (рис. 2.2) или полость по схеме рис. 2.1, а всегда заполняется до верхней кромки. В последнем случае H равна высоте боковых стенок полости. При этом отклонение мембраны определяется выражением (1.6), а объем содержащейся в полости жидкости — по формуле

$$H_0 = H \frac{\sin \alpha L}{\alpha L \cos \alpha L} + h \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} \left(\frac{\sin \alpha L}{\alpha L \cos \alpha L} - 1 \right) \quad (1.11)$$

$$S = 2LH_0$$

Отметим также особенность решения (1.6), (1.11), когда в задаче не учитывается вес самой мембраны ($h\gamma_0 \rightarrow 0$). Такая задача была рассмотрена в [6]. Если в (1.6) положить $H = 0$, то $w = 0$ при всех значениях αL , за исключением $\alpha L = (1+k)\pi/2$ ($k = 0, 2, 4, \dots$). Последние αL являются, как уже указывалось выше, собственными значениями однородной задачи. Так как $w > 0$, $H_0 > 0$, то физический смысл имеет только значение при $k = 0$. В (1.6), (1.11) при определении w и H_0 появляется неопределенность типа $0/0$.

В [6] было указано, что этот недостаток решения является следствием линейности уравнений, и было дано решение нелинейной задачи. В следующем параграфе излагается эта задача, где не учитывается собственный вес мембраны.

§ 2. НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ МЕМБРАНЫ ПОД СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

Вместо (1.1) привлекаем к рассмотрению систему геометрически нелинейных уравнений равновесия мембраны, где необходимо учитывать также перемещение u по оси x ,

$$E h \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) \frac{dw}{dx} \right] + p_* = 0 \quad (2.1)$$

$$E h \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) = 0$$

Выражение для p_* дано в (1.2), где следует положить $h\gamma_0 = 0$.

Граничные условия

$$\begin{aligned} w &= 0 & \text{при } x &= \pm L; \\ u &= -\Delta & \text{при } x &= -L; & u &= \Delta & \text{при } x &= L, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где, как и в § 1, 2Δ — удлинение мембраны в результате предварительного натяжения усилием T_0 ($\Delta = T_0 L / E h$).

Интегрирование второго уравнения (2.1) дает

$$\frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = \frac{T_*}{Eh}, \quad (2.3)$$

где константа T_* представляет собой полное натяжение мембраны $T_* = T_0 + T$, T — усилие, возникающее при отклонении мембраны от горизонтали (вследствие давления жидкости).

С учетом (2.3) первому уравнению (2.1) можно придать вид (1.4)

$$d^2 w / dx^2 + \alpha_*^2 w = -\alpha_*^2 H, \quad \alpha_*^2 = \gamma / T. \quad (2.4)$$

Поэтому его решение приводится к тому же виду (1.6), что в линейной задаче (при использовании условия (2.2) относительно w),

$$w = H \left(\frac{\cos \alpha_* x}{\cos \alpha_* L} - 1 \right), \quad \alpha_* = \sqrt{\frac{\gamma}{T_0 + T}} \quad (2.5)$$

однако здесь параметр α_* и дополнительное усилие T неизвестны.

Проинтегрировав (2.3) в пределах от 0 до x , получаем (в силу симметрии задачи $u(0)=0$)

$$u(x) = \frac{T_* x}{E h} - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (2.6)$$

Используя условие (2.2) относительно u , находим из (2.6)

$$\Delta = \frac{T_* L}{E h} - \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

Подставляя сюда функцию (2.5) и производя интегрирование, получаем связь между H и α_* :

$$H = \sqrt{\frac{2\gamma L}{E h \alpha_*^3} \left(1 - \Delta \frac{E h \alpha_*^2}{\gamma L} \right)} \cdot \frac{2 \cos \alpha_* L}{\sqrt{2 \alpha_* L - \sin 2 \alpha_* L}} \quad (2.7)$$

В силу принятого допущения $H \geq 0$ перед корнем в (2.7) берется только положительный знак.

Выражения (2.5), (2.6), (2.7) представляют собой решение нелинейной задачи (2.1), (2.2). По заданным значениям γ , E , L , h , Δ , H из (2.7) находятся $\alpha_* L$ и по (2.5) и (2.6) компоненты перемещения мембраны. Если задается высота H_0 , то необходимо еще привлечь соотношение (1.8)

$$H \operatorname{tg} \alpha_* L = H_0 \alpha_* L$$

Рассмотрим случай малой высоты жидкости H . Так как в (2.7) при $H=0$ следует $\cos \alpha_* L = 0$, $\alpha_* L = \pi/2$ (другие корни $\alpha_* L$ не соответствуют физической картине), то при малом значении H примем $\alpha_* L = \pi/2 - \epsilon$, где $\epsilon^2 \ll 1$. Тогда учитывая, что $\cos(\pi/2 - \epsilon) \approx \epsilon$, $\sin(\pi/2 - \epsilon) \approx 2\epsilon$, находим из (2.7) связь при малых H в первом приближении

$$\epsilon \approx \frac{\pi^2 H}{4L} \left[\gamma_* \left(1 - \frac{\pi^2 \Delta}{\gamma_* L} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma_* = \frac{4L^2 \gamma}{E h} \quad (2.8)$$

Тогда из (2.5) и (2.7) получаем приближенно

$$\frac{w}{2L} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi \gamma_*}{\pi - 10\epsilon} \left[1 - \frac{\pi^2 \Delta}{\gamma_* L} \left(1 - \frac{4\epsilon}{\pi} \right) \right]} \left[\cos \frac{\pi x}{2L} - \epsilon \left(1 - \frac{x}{L} \sin \frac{\pi x}{2L} \right) \right] \quad (2.9)$$

Из (2.9) и (2.8) определяем прогиб мембраны. Таким образом, он зависит от высоты уровня жидкости H нелинейно (через ϵ). Дополнительное натяжение мембраны равно

$$T = \frac{4L^2 \gamma}{\pi^2 (1 - 4\epsilon/\pi)} - T_0 \quad (2.10)$$

При $H=0$ ($\epsilon=0$) из (2.9) имеем конечное выражение, подробно исследованное в [6],

$$\frac{w}{2L} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\gamma_* \left(1 - \frac{\pi^2 \Delta}{\gamma_* L} \right)} \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (2.11)$$

Так как $\Delta \geq 0$, то при $\gamma_* = \pi^2 \Delta / L$ имеется точка бифуркации. Учитывая обозначения Δ и γ_* , имеем $\gamma = (\pi/2L)^2 T_0$. Это согласуется с первым собственным значением, полученным в линейном решении в предыдущем параграфе. Действительно, при малых значениях прогибов, что достигается при $\pi^2 \Delta / (\gamma_* L) \rightarrow 1$, справедливо линейное решение.

Отметим, что согласно (2.11) в отсутствие предварительного натяжения ($\Delta=0$, $T_0=0$) при любом значении $\gamma_* > 0$ существует ненулевое реш. (отклонение мембраны). Однако, если имеется предварительное натяжение ($\Delta > 0$), то ненулевое решение существует лишь при $\gamma_* > \pi^2 \Delta / L$.

§ 3. КРУГЛАЯ МЕМБРАНА ПОД ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

Примем, что сосуд является круговым цилиндрическим, дно которого представляет собой мембрану (рис. 2.1). Вместо размера $2L$ будет теперь $2R$, а вместо x радиальная координата r . Другие обозначения остаются без изменения. Соответствующая линейная задача в предположении, что высота H известна, была рассмотрена в [1,2]. Здесь учтем также зависимость H от объема Q_0 жидкости [$H_0 = Q_0 / (\pi R^2)$]. Очевидно, задача является осесимметричной.

Вместо (1.3), (1.4) запишем

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} w + \alpha^2 w = -\alpha^2 H - \alpha_0^2 h, \quad (3.1)$$

$$H = H_0 - \frac{2}{R^2} \int_0^R w r dr, \quad \alpha^2 = \frac{\gamma}{T_0}, \quad \alpha_0^2 = \frac{\gamma_0}{T_0}$$

Условия закрепления на стенке $w=0$ ($r=R$).

Общее решение неоднородного уравнения (3.1) имеет вид

$$w = A J_0(\alpha r) + B N_0(\alpha r) - H - (\alpha_0 / \alpha)^2 h,$$

где J_0 , N_0 — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка.

Удовлетворяя условиям конечности решения в центре $r=0$ ($B=0$) и закрепления при $r=R$, находим вместо (1.6)

$$w = \left(H + \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} h \right) \left(\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right) \quad (3.2)$$

Относительно поведения данного решения в зависимости от H , H_0 можно сказать то же самое, что и в § 1. Из (3.1) и (3.2) устанавливается следующая связь между ними

$$H_0 = H - \left(H + \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} h \right) \left[1 - \frac{2}{\alpha R} \frac{J_1(\alpha R)}{J_0(\alpha R)} \right] \quad (3.3)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка.

При малых αR , полагая $J_0(\alpha R) \approx 1 - \frac{1}{4}(\alpha R)^2$, $J_1(\alpha R) \approx \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{16}(\alpha R)^3$, находим

$$H_0 = H + \frac{(\alpha R)^2}{8} \left(H + \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} h \right)$$

Решение (3.2) справедливо при $\alpha R < 2.4$. Так же, как и в § 1, линейное решение при значении аргумента $\alpha R = 2.405$, являющегося первым корнем уравнения $J_0(\alpha R) = 0$, вырождается. Как видно из § 2, для получения конечного решения нужно учитывать нелинейные члены в уравнениях равновесия мембраны.

Таким образом, при заданных значениях удельного веса жидкости и предварительного натяжения мембраны решением (3.2) можно пользоваться лишь при $R < 2.4 \sqrt{T_0/\gamma}$.

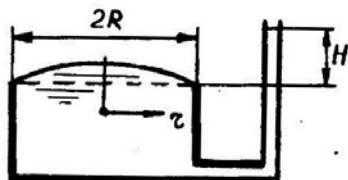


Рис. 2.3. Крышка резервуара в виде круглой мембраны.

Рассмотрим теперь деформирование мембраны, закрывающей цилиндрический сосуд, в котором давление поддерживается разностью H уровней жидкости в сообщающихся сосудах (рис. 2.3). В этом случае (положительное направление w — вверх)

$$p_0 = \gamma [H - w(x)] - \gamma_0 h, \quad (3.4)$$

поэтому получаем следующее уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{r} w - \alpha^2 w = -\alpha^2 H + \alpha_0^2 h \quad (3.5)$$

Его общее решение

$$w = A I_0(\alpha r) + B K_0(\alpha r) + H - (\alpha_0/\alpha)^2 h,$$

где I_0 , K_0 — Бесселевы функции от мнимого аргумента нулевого порядка. Из тех же условий, что и выше, $B = 0$ и

$$w = \left(H - \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} h \right) \left(1 - \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha R)} \right) \quad (3.6)$$

Функция I_0 является положительной, возрастающей вместе с аргументом. Поэтому в этой задаче, в отличие от предыдущей, нет вырождения ни при каких значениях аргумента αR .

Если за H_0 принять высоту добавляемой в трубку жидкости объемом Q_0 в состоянии $w=0$ и одинаковых уровнях жидкости в резервуаре и в трубке, то

$$H_0 = \frac{Q_0}{s_0}, \quad H = H_0 - \frac{2\pi}{s_0} \int_0^R w r dr$$

Здесь s_0 — площадь поперечного сечения трубки.

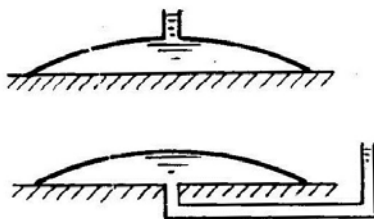


Рис. 2.4. Примеры емкостей, содержащих жидкости или газы.

Очевидно, приведенные результаты могут быть использованы и для расчета цилиндрических емкостей, показанных на рис. 2.4. Имеется большое разнообразие воздухоопорных и пневматических строительных конструкций [7], при анализе которых также необходимы оценки, подобные приведенным в этом параграфе.

§ 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕМБРАНЫ С НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ В ЗАМКНУТОМ СОСУДЕ

В предыдущих параграфах этой главы рассматривались случаи взаимодействия, когда жидкость в сосуде имеет свободную границу. Постановка задачи несколько меняется, если несжимаемая жидкость полностью заполняет замкнутый сосуд [3,5].

Предположим, что невесомая мембрана покрывает жидкость в замкнутом объеме и сверху подвергается нагружению давлением p_e (рис. 2.5, а), значение которого задано. Мембрана натянута усилием T_0 и закреплена на стенках $x=\pm L$. Будем рассматривать малое перемещение ее под действием симметричного нагружения $p_e = P_e \cos(\pi x/2L)$. Таким образом, будет решаться линейная задача в плоской постановке. Давление и перемещение считаются положительными в направлении вниз.

Общее давление на мембрану будет равно

$$p_e = p_e - (p_0 + \gamma w) \quad (4.1)$$

где p_0 — постоянная часть давления в жидкости, которая в предыдущих параграфах принималась равной нулю. Теперь ее предстоит определить наряду с перемещением мембраны w . Из (1.1) и (4.1) получаем уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \alpha^2 w = - \frac{p_e - p_0}{T_0}, \quad \alpha^2 = \frac{\gamma}{T_0}, \quad (4.2)$$

решение которого с учетом указанного выше распределения давления p_e имеет вид

$$w = A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x - \frac{p_0}{T_0 \alpha^2} + \frac{P_e}{T_0 (\alpha^2 + \pi^2/4L^2)} \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (4.3)$$

После удовлетворения условиям закрепления $w = 0$ ($x = \pm L$) имеем

$$w = \frac{p_0}{T_0 \alpha^2} \left(\frac{\cosh \alpha x}{\cosh \alpha L} - 1 \right) + \frac{P_e}{T_0 (\alpha^2 + \pi^2/4L^2)} \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (4.4)$$

Давление p_0 определяется из условия несжимаемости

$$\int_{-L}^L w \, dx = 0 \quad (4.5)$$

Подставляя сюда выражение (4.4), находим

$$p_0 = \frac{2P_e (\alpha L)^3}{\pi(\alpha L - t\alpha L) [(\alpha L)^2 + (\pi/2)^2]} \quad (4.6)$$

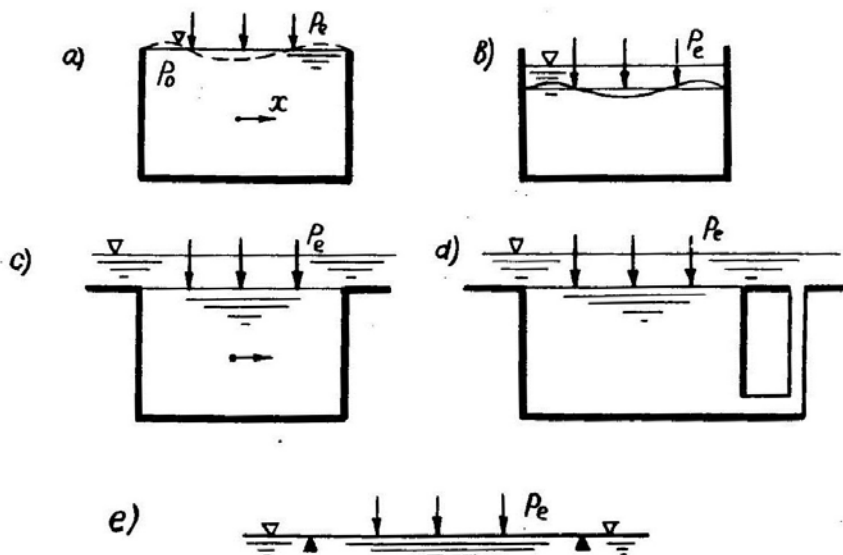


Рис. 2.5. Примеры замкнутых полостей с жидкостью.

Выражения (4.4), (4.6) представляют собой решение поставленной линейной задачи. При произвольном симметричном распределении давления p_e оно может быть представлено в виде ряда по косинусам. Соответственно изменятся выражения (4.4), (4.6).

Исключив p_0 в (4.4), получаем

$$w = \frac{P_e L^2}{T_0 [(\alpha L)^2 + (\pi/2)^2]} \left[\frac{2\alpha L}{\pi(\alpha L - t\alpha L)} \left(\frac{\cosh \alpha x}{\cosh \alpha L} - 1 \right) + \cos \frac{\pi x}{2L} \right]$$

Как видно, относительный прогиб (w/L) зависит от безразмерных параметров $P_e L/T_0$ и $\alpha L = L \sqrt{\gamma/T_0}$.

Представляет интерес сравнение постоянного по объему жидкости давления (4.6) с его значением при замене мембраны абсолютно жестким поршнем, скользящим без трения по стенкам полости (при том же внешнем воздействии). Очевидно, оно равно

$$p_0 = \frac{P_0}{2L} \int_{-L}^L \cos \frac{\pi x}{2L} dx = \frac{2}{\pi} P_0. \quad (4.7)$$

Значение $\alpha L \ll 1$ соответствует большому натяжению T_0 мембраны при ее малой ширине L . При этом из (4.6) $(\pi/2P_0)p_0 = 12/\pi^2 = 1.216$, что несколько выше, чем по (4.7). Таким образом, при одинаковом нагружении жесткого поршня и мембраны давление в жидкости под ними отличается более чем на 21 %. При $\alpha L \ll 1$ безразмерный прогиб равен

$$\frac{\pi^2 T_0}{4P_0 L^2} w = \cos \frac{\pi x}{2L} - \frac{3}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (4.8)$$

В центре происходит отклонение вниз на величину $(1-3/\pi)$, в точках $x/L = \pm 0.74$ — максимальное отклонение вверх. С возрастанием значений αL функция $(\pi/2P_0)p_0$ плавно уменьшается до 1.210 при $\alpha L = 1.0$ и далее также плавно возрастает. Например, $(\pi/2P_0)p_0 = 1.379$ при $\alpha L = 1.4$, т.е. увеличение давления под мембраной составляет ~ 40 % (по сравнению со случаем жесткого поршня). Когда $\alpha L \gg 1$, из (4.6) получаем значение p_0 , совпадающее с (4.7).

Рассмотрим ещё некоторые видоизменения задачи. Как показано на рис. 2.5, б, над мембраной имеется слой жидкости того же удельного веса, что под мембраной в полости. В остальном постановка задачи такая же, что выше. Тогда в выражении для общего давления (4.1) будет отсутствовать член $-\gamma w$, так как на поверхности мембраны от верхнего слоя жидкости возникает давление $\gamma(H+w)$, где H — высота уровня верхнего слоя жидкости, измеренная от краев мембраны (давление на свободную поверхность принято равным нулю). Условие несжимаемости для нижней жидкости обуславливает равенство $H = H_0$ согласно уравнению (1.3). Таким образом, общее давление на мембрану будет $p_* = p_0 + \gamma H - p_0$.

Тогда вместо (4.2), (4.4) и (4.6) будем иметь

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{p_0 + \gamma H - p_0}{T_0}$$

$$w = - \frac{(p_0 - \gamma H) L^2}{2 T_0} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{4 P_0 L^2}{\pi^2 T_0} \cos \frac{\pi x}{2 L} \quad (4.9)$$

$$p_0 = \frac{24}{\pi^3} P_0 + \gamma H$$

Выражение для w совпадает с (4.8), если в (4.9) исключить p_0 . Однако само значение p_0 здесь зависит также от γH . Решение (4.9) будет справедливо и в случае, когда верхний слой жидкости простирается неограниченно (рис. 2.5, с). Это проистекает из того, что в уравнении для мембраны член $-\gamma w$ будет отсутствовать, а условие несжимаемости для замкнутого объема сохраняется в том же виде (4.5).

Если полость под мембраной соединена с верхним слоем жидкости (рис. 2.5, d), то условие (4.5) не ставится. Полость под мембраной не является замкнутой. В данном случае интеграл в (4.5) позволяет вычислить объем вытесненной из нижней полости жидкости. Постоянная часть гидростатического давления равна $p_0 = \gamma H$. Поэтому в рассматриваемом случае

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{p_0}{T_0} \quad (4.10)$$

Принимая в (4.10) прежнее распределение $p_0(x)$ и удовлетворяя условиям закрепления, получаем

$$w = \frac{4 P_0 L^2}{\pi^2 T_0} \cos \frac{\pi x}{2 L} \quad (4.11)$$

Таким образом, в данном случае распределение прогиба w по ширине мембраны повторяет форму задания внешней нагрузки.

Для сравнения с полученными решениями рассмотрим также линейную задачу об отклонении мембраны, натянутой на опорах и соприкасающейся с поверхностью неограниченной жидкости

(рис. 2.5, е). Внешнее нагружение примем таким же, что выше. Давление на мембрану будет равно $p_* = p_0 - \gamma w$, а $p_0 = 0$. Ввиду неограниченности жидкости условие (4.5) не имеет места. Поэтому здесь справедливы уравнения (4.2) и (4.4) при $p_0 = 0$. Как видно из (4.4), в этом случае прогиб мембраны зависит также от плотности жидкости ($\alpha^2 = \gamma/T_0$).

§ 5. УСТОЙЧИВОСТЬ МЕМБРАНЫ МЕЖДУ ЖИДКОСТЯМИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ

Как следует из (4.9), при $P_0 = 0$ постоянная часть давления под мембраной равна $p_0 = \gamma H$, прогиб ее w отсутствует. Рассмотрим эту задачу более подробно в предположении разных удельных весов жидкостей в нижней (γ_1) и верхней (γ_2) полостях. Кроме того, давление извне отсутствует ($p_0 = 0$), нижняя полость является замкнутой (рис. 2.6, а). Ограничимся линейной задачей.

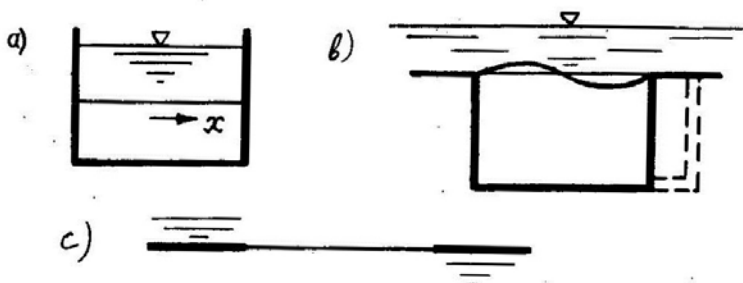


Рис. 2.6. Примеры задач об устойчивости мембраны между жидкостями с разными удельными весами.

Давление на мембрану при ее отклонении на величину $w(x)$ равно

$$p_* = -(p_0 + \gamma_1 w) + \gamma_2 (H + w) \quad (5.1)$$

Учитывая, что в данном случае $P_0 = 0$ в соответствии с (4.9) $p_0 = \gamma H = \gamma_2 H$, из (5.1) получаем $p_* = (\gamma_2 - \gamma_1)w$. При этом вместо (4.2) имеем уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0, \quad \alpha^2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{T_0} \quad (5.2)$$

Рассмотрим случай более тяжелой жидкости в верхнем слое ($\gamma_2 > \gamma_1$, $\alpha^2 > 0$). Из решения уравнения (5.2)

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x \quad (5.3)$$

в соответствии с условием замкнутости полости с несжимаемой жидкостью (4.5) имеем

$$B \sin \alpha L = 0 \quad (5.4)$$

Граничные условия $w = 0$ ($x = \pm L$) дают

$$A \sin \alpha L + B \cos \alpha L = 0$$

$$A \sin \alpha L - B \cos \alpha L = 0$$

или

$$B \cos \alpha L = 0, \quad A \sin \alpha L = 0 \quad (5.5)$$

Первое уравнение (5.5) и уравнение (5.4) могут иметь место одновременно, если только $B = 0$. Тогда, полагая $A \neq 0$, из второго уравнения (5.5) имеем $\sin \alpha L = 0$, откуда $\alpha L = 0, \pi, 2\pi, \dots$. Рассмотрим первый ненулевой корень $\alpha L = \pi$. Решение (5.3) принимает вид

$$w = A \sin(\pi x/L)$$

Следовательно, при достижении значения, равного

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \pi^2 T_0 / L^2, \quad (5.6)$$

может произойти отклонение мембраны из натянутого плоского состояния равновесия с образованием двух полуволн по ширине (с узлом при $x = 0$).

Если нижняя жидкость является более тяжелой ($\gamma_1 > \gamma_2$), то решение уравнения (5.2) имеет вид

$$w = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}, \quad \alpha^2 = (\gamma_1 - \gamma_2) / T_0$$

Из условия (4.5) следует

$$(A + B)(e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}) = 0$$

Так как значение $\alpha = 0$ ($\gamma_1 = \gamma_2$) не рассматривается, то $A = -B$. С учетом этого из условий закрепления получаем

$$A(e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}) = 0$$

или $A = -B = 0$. Следовательно, нет отклоненных от плоского состояний равновесия мембраны при $\gamma_1 > \gamma_2$. Так как решение (4.7), справедливое для $\gamma_1 = \gamma_2$, при $P_0 = 0$ дает $w = 0$, то можно записать также $\gamma_1 \geq \gamma_2$.

Приведенные результаты справедливы также для случая, когда нижняя полость замкнута, а верхний слой жидкости простирается неограниченно (рис. 2.6, б).

На схеме, показанной на рис. 2.6, в, жидкости с удельными весами γ_1 и γ_2 простираются неограниченно по обе стороны от горизонтального жесткого экрана, часть которого представляет собой натянутую мембрану шириной $2L$. Ввиду неограниченной протяженности областей, занятых жидкостью, условие (4.5) не ставится. Малое отклонение мембраны описывается уравнением (5.2). Условия на краях мембраны ($w = 0$ при $x = \pm L$) дают уравнения (5.5).

В отличие от задач на рис. 2.6, а и на рис. 2.6, б здесь при рассмотрении уравнений (5.5) могут быть два варианта параметров:

1) $A \neq 0$, $B = 0$, следовательно, $\sin \alpha L = 0$, откуда $\alpha L = 0, \pi, 2\pi, \dots$. Для корня $\alpha L = \pi$ имеем

$$w = A \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{\pi^2 T_0}{L^2}, \quad (5.7)$$

что совпадает с полученным выше решением.

2) $A = 0$, $B \neq 0$, следовательно, $\cos \alpha L = 0$, откуда $\alpha L = \pi/2, 3\pi/2, \dots$. Для первого корня имеем

$$w = B \cos \frac{\pi x}{L}, \quad \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{\pi^2 T_0}{4L^2} \quad (5.8)$$

В первом случае отклонение мембраны от натянутого плоского состояния может происходить с образованием двух полуволн. Во втором случае это отклонение может происходить с образованием одной полуволны, если значение разности $\gamma_2 - \gamma_1$ достигает $(\pi/2L)^2 T_0$. Оно в 4 раза меньше, чем в первом случае. Поэтому при постепенном увеличении значения $\gamma_2 - \gamma_1$ реализуется последний вариант поведения мембраны.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТКЛОНЕНИЙ МЕМБРАНЫ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ

В предыдущем параграфе были определены критические параметры (5.6), (5.7), (5.8) и соответствующие формы отклонений мембраны от плоского состояния. Однако остались неизвестными амплитуды этих отклонений. Для их определения необходимо привлечь нелинейные соотношения. Воспользуемся системой нелинейных уравнений (2.1).

Для того, чтобы одновременно несколько разнообразить постановку задачи, допустим отсутствие предварительного натяжения мембраны. Поскольку $T_0 = 0$, то согласно (5.6) при любом положительном значении разности удельных весов верхней (γ_2) и нижней (γ_1) жидкостей плоская форма мембраны неустойчива. Изложим результаты работы [3].

При $\Delta = 0$, $T_0 = 0$ и $T_* = T$ уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{T}{Eh} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (6.1)$$

В такой постановке подразумевается, что мембрана испытывает натяжение только в результате ее отклонения от плоской формы.

Первое уравнение (2.1) или уравнение (2.4) в соответствии с (5.1) запишется

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha_*^2 w = 0, \quad \alpha_*^2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{T} \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1) и (6.2) имеют решение

$$w = A \sin \alpha_* x + B \cos \alpha_* x, \\ u = \beta_* x + C - \frac{\alpha_*^2}{2} \int \left(A \cos \alpha_* x - B \sin \alpha_* x \right)^2 dx, \quad (6.3) \\ \beta_* = T/(Eh)$$

Условие несжимаемости жидкости в нижней замкнутой полости (4.5) дает

$$B \sin \alpha_* L = 0 \quad (6.4)$$

Граничные условия $u = w = 0$ ($x = \pm L$) дают

$$B \cos \alpha_* L = 0,$$

$$A \sin \alpha_* L = 0, \quad (6.5)$$

$$4C - AB\alpha_* \cos \alpha_* L = 0,$$

$$8\beta_* L - 2\alpha_*^2 L(A^2 + B^2) + \alpha_* (A^2 - B^2) \sin 2\alpha_* L = 0$$

Уравнение (6.4) и первое уравнение (6.5) могут иметь место одновременно, если только $B = 0$. Тогда, полагая $A \neq 0$, из второго уравнения (6.5) находим $\sin \alpha_* L = 0$, откуда $\alpha_* L = n\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Следовательно, усилие натяжения мембраны равно

$$T_n = \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 (\gamma_2 - \gamma_1) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.6)$$

Из третьего уравнения (6.5) следует $C = 0$, а из последнего -

$$A^2 = \frac{4T^2}{Eh(\gamma_2 - \gamma_1)} \quad (6.7)$$

С учетом (6.6), (6.7) выражение для нормального перемещения можно представить в виде

$$w_n = \pm \frac{2L^2}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{Eh}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.8)$$

Здесь знаки $\pm$ указывают на равную возможность отклоняться по несимметричной форме с поднятием правой или левой половин мембраны.

Плоская форма мембраны и поверхности раздела жидкостей всегда неустойчива при $\gamma_1 < \gamma_2$ и устойчива при $\gamma_1 \geq \gamma_2$. Этот результат справедлив в отсутствие предварительного натяжения мембраны ($T_0 = 0$). Для исчезающе тонкой мембраны эти результаты очевидны. В книге [4] указывается, что тонкий слой ртути, находящейся на поверхности воды, стекает вниз по многим мелким струйкам. Имеет место неустойчивость Рэлея-Тейлора.

Из (6.8) следует, что плоская форма мембраны неустойчива при любом числе полуволн n . Причем с увеличением n амплитуды отклонений и усилие натяжения (6.6) быстро убывают. Из

энергетических соображений можно заключить, что неустойчивость системы тем сильнее, чем больше n .

Однако, должен быть верхний предел числу n . При его больших значениях, как бы малой не была толщина h , заметное влияние начнет оказывать изгибная жесткость мембраны. Так как при больших числах n соответствующие отклонения незначительны, приближенно можно принять уравнение

$$Dd^4w/dx^4 + (\gamma_2 - \gamma_1)w = 0$$

Подставляя сюда решение в виде $w = W \sin(n\pi x/L)$, получаем верхнее значение числа полуволин

$$n_+ \approx \frac{2L}{\pi} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{D} \right)^{1/4} \quad (6.9)$$

Если $\gamma_2 - \gamma_1 = 0.6 \cdot 10^{-4} \text{ кГ/см}^3$, $E = 90 \text{ кГ/см}^2$, $h = 0.01 \text{ см}$, $L = 5 \text{ см}$, то верхний предел для n по формуле (6.9) равен $n_+ \approx 5$.

Был проведен эксперимент в стеклянном прямоугольном удлиненном сосуде [3]. Жидкостью под мембраной служила вода ($\gamma_1 = 10^{-3} \text{ кГ/см}^3$), на поверхности которой слегка натягивалась и зажималась к краям сосуда тонкая резина толщиной $h = 0.01 \text{ см}$. Затем вдоль стенки тонкой струйкой наливался силикатный клей с удельным весом $\gamma_2 \approx 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ кГ/см}^3$. Имело место отклонение по двум полуволнам. Это состояние является устойчивым. Если произвольно отклонить мембрану и отпустить, то она, поколебавшись, занимает прежнее положение с двумя полуволнами. При сильном принудительном отклонении может образоваться синусоида в противофазе, что означает реализацию отклонения с противоположным знаком в формуле (6.8). В данном эксперименте устойчивых отклоненных состояний по многим волнам не наблюдалось. Когда вместо клея наливалась вода ($\gamma_2 = \gamma_1$), плоская форма мембраны являлась устойчивым состоянием.

Изложенное в этом параграфе относилось к схеме на рис. 2.6, а. При этом использовалось условие несжимаемости жидкости (4.5) в нижней замкнутой полости. Если эта полость заполнена газом, то условие (4.5) не привлекается.

Положим, что в плоском состоянии мембраны давление газа под

ней равно $p_0 = \gamma_2 H$ и оно поддерживается постоянным и при отклонении мембраны от плоского состояния. К той же задаче приходим и в случае на рис. 2.6, с.

Итак, теперь уравнение (6.4) не имеет места. Тогда, полагая в (6.5) $B = 0$, $A \neq 0$, $\sin \alpha_* L = 0$, приходим к рассмотренному выше решению (6.6), (6.8). Если положить $A = 0$, $B \neq 0$, $\cos \alpha_* L = 0$, то $\alpha_* L = n\pi/2$, где $n = 1, 3, \dots$. Из последних двух уравнений (6.5) находим $C = 0$, $B^2 = 4\beta_*/\alpha_*$. С учетом обозначений для β_* и α_* получаем следующее значение усилия натяжения мембраны

$$T_n = \left(\frac{2L}{n\pi} \right)^2 (\gamma_2 - \gamma_1) \quad (n = 1, 3, \dots) \quad (6.10)$$

и выражение для ее отклонения

$$w_n = \pm \frac{4L^2}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{Eh}} \sin \frac{n\pi x}{2L} \quad (n = 1, 3, \dots) \quad (6.11)$$

Сравнение (6.10) и (6.11) с (6.6) и (6.8) показывает, что отклонение по первой симметричной форме ($n=1$) в два раза больше, чем по первой несимметричной форме ($n=1$), а усилие натяжения — в четыре раза.

§ 7. НЕЛИНЕЙНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ МЕМБРАНЫ ПОД СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

До сих пор в этой главе рассматривалось равновесие растяжимой мембраны. Однако многие материалы имеют большую жесткость на растяжение. При изучении их поведения под действием преобладающих поперечных сил может быть принято допущение о нерастяжимости. Такие задачи подробно будут рассмотрены в главах V и VI.

В данном параграфе приводится решение задачи о равновесии бесконечно протяженной нерастяжимой мембраны (пленки), покоящейся

на поверхности жидкости, при действии на нее сил, распределенных по линии $x' = 0$ (рис. 2.7). Интенсивность их равна $2P'$. Предполагается, что пленка натянута по оси x' на бесконечности равномерным усилием T' . Собственный вес ее не учитывается.

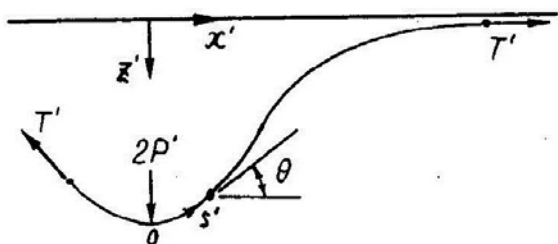


Рис. 2.7. Протяженная нерастяжимая невесомая пластина на поверхности жидкости под действием сил $2P'$ и T' .

В § 2 данной главы для решения задачи о равновесии растяжимой мембраны привлекалась система нелинейных уравнений. В отличие от этой постановки теперь будет рассматриваться произвольно большое отклонение нерастяжимой бесконечно длинной пленки. В главе IV будет поставлена та же задача для гибкой пластины. Поэтому уравнение изгиба получим с учетом изгибной жесткости. Ввиду двумерности задачи взаимодействия рассматривается балка-полоска под сосредоточенной силой $2P'$. При этом мы следуем работе [8].

Принимается, что местная кривизна пропорциональна местному изгибающему моменту $M = D d\theta/ds'$, где θ — угол поворота элемента, s' — лагранжева координатная линия (с началом $s' = 0$ под силой $2P'$), D , M — изгибная жесткость и изгибающий момент. Начало декартовых координат x' , z' лежит на недеформированной поверхности пластины.

Давление со стороны жидкости равно $p = \gamma z'$. Кроме того, имеем

$$\frac{dx'}{ds'} = \cos\theta, \quad \frac{dz'}{ds'} = -\sin\theta, \quad (7.1)$$

$$x'(0) = 0, \quad z'(0) = w'_0, \quad z'(\infty) = 0$$

Условие равенства нулю суммы моментов дает

$$D \frac{d^2 \theta}{ds'^2} = \left[\gamma \int_0^{s'} z' \cos \theta \, ds' - P' \right] \cos \theta + \left[T' - \frac{\gamma}{2} (z')^2 \right] \sin \theta \quad (7.2)$$

В дальнейшем в этом параграфе принимаем $D = 0$. Относя линейные размеры к $(T'/\gamma)^{1/2}$, получим из (7.1) и (7.2)

$$(u - \alpha) \cos \theta + \left[1 - \frac{1}{2} z^2 \right] \sin \theta = 0, \quad \alpha = P'/T' \quad (7.3)$$

$$\frac{du}{ds} = z \cos \theta, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{ds} = -\sin \theta \quad (7.4)$$

Здесь введена дополнительная функция u .

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(0) = x(0) = 0, \quad z(0) = w_0, \\ u(\infty) = \alpha, \quad \theta(\infty) = z(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Нелинейная задача (7.3)–(7.5) интересна тем, что может быть найдено ее точное аналитическое решение. При заданных значениях α необходимо определить θ , u , x , z , w .

Дифференцирование (7.3) по s дает

$$(u - \alpha) \frac{d\theta}{ds} = z \sin \theta \quad (7.6)$$

С учетом соотношения

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{du} \frac{du}{ds} = \frac{d\theta}{du} z \cos \theta$$

путем интегрирования (7.6) находим $u = \alpha + C \sin \theta$, где C — константа интегрирования. Тогда из (7.3) следует

$$\frac{1}{2} z^2 = 1 + C \cos \theta$$

Из условий на бесконечности (7.5) константа $C = -1$. Поэтому

$$\frac{d\theta}{ds} = -z = -\sqrt{2-2\cos\theta} = -2 \sin \frac{\theta}{2} \quad (7.7)$$

Дальнейшее интегрирование дает уравнение

$$s = -\ln \frac{\operatorname{tg}(\theta/4)}{\operatorname{tg}(\theta_0/4)}, \quad (7.8)$$

где θ_0 — значение θ при $s = 0$. Из уравнения $u = \alpha - \sin \theta$ имеем $\theta_0 = \arcsin \alpha$.

Форма отклонения мембраны в параметрической форме определяется интегрированием уравнений (7.4), (7.7), (7.8)

$$x = - \ln \frac{\operatorname{tg}(\theta/4)}{\operatorname{tg}(\theta_0/4)} - 2 \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos \frac{\theta_0}{2} \quad (7.9)$$

$$z = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

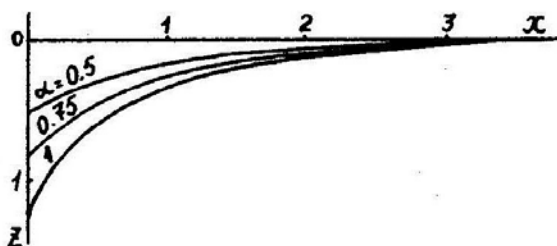


Рис. 2.8. Формы больших отклонений протяженной нерастяжимой пленки на поверхности жидкости.

На рис. 2.8 показано изменение отклонения по координате x при трех значениях параметра α .

Соотношение между параметром нагрузки α и отклонением мембраны под сосредоточенной силой имеет вид

$$w_0 = 2 \sin(\theta_0/2) = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (7.10)$$

Как видно отсюда, α может быть не более единицы. Следовательно, должно быть $P' \leq T'$.

Наибольшее значение перемещения мембраны под нагрузкой $2P'$ достигается при $\alpha = 1$. Тогда $w_0 = \sqrt{2}$, а размерное значение $w'_0 = w_0 \sqrt{T'/\gamma} = w_0 \sqrt{P'/\gamma}$ или $w'_0 = \sqrt{2P'/\gamma}$. Пленка и груз весом $2P'$ "тонут", если $\alpha > 1$ ($P' > T'$).

Перемещение мембраны в горизонтальном направлении на большом удалении от начала координат равно

$$s - (x)_{x \rightarrow \infty} = 2 - 2 \cos \frac{\theta_0}{2} = 2 - \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

ГЛАВА III

РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

§ 1. ИЗГИБ ЛЕГКОГО БРУСА, ПОКОЯЩЕГОСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ

Брус с удельным весом γ_0 плавает (покоится) на неограниченно простирающейся поверхности жидкости с удельным весом γ . Для этого, очевидно, должно быть $\gamma_0 < \gamma$. Глубину погружения H нижней поверхности бруса размерами L , b , h определяем из условия равновесия выталкивающей силы и веса

$$\bar{H} = h\gamma_0 / \gamma \quad (1.1)$$

В этом состоянии не происходит изгиба.

Если в середине бруса действует сила P (рис.3.1), то возникает его изгиб. Необходимо определить предельное значение P , при котором жидкость не достигает верхней поверхности бруса, а также возникающие при этом напряжения и упругие перемещения. Последние отсчитываем от равновесного состояния с погружением на глубину H . Перемещение w положительно в направлении вниз. Решение задачи изложим, следуя книге [2].

В уравнении изгиба бруса

$$E J d^4 w / dx^4 = q$$

распределенная нагрузка q складывается теперь только из вытесняющей силы со стороны жидкости ($-\gamma b w$), так как собственный вес элемента бруса уже учтен при определении глубины погружения (1.1). Уравнение можно привести к виду

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \beta^4 w = 0, \quad 4\beta^4 = \frac{\gamma b}{E J} \quad (1.2)$$

В качестве его решения могут быть использованы функции Крылова. Таблица этих функций и их производных следующая [2]:

n	$y_n(\beta x)$	$y'_n(\beta x)$	$y''_n(\beta x)$	$y'''_n(\beta x)$	$y''''_n(\beta x)$
1	$ch\beta x \cos\beta x$	$-4\beta y_4$	$-4\beta^2 y_3$	$-4\beta^3 y_2$	$-4\beta^4 y_1$
2	$\frac{1}{2}(ch\beta x \sin\beta x + sh\beta x \cos\beta x)$	βy_1	$-4\beta^2 y_4$	$-4\beta^3 y_3$	$-4\beta^4 y_2$
3	$\frac{1}{2} sh\beta x \sin\beta x$	βy_2	$\beta^2 y_1$	$-4\beta^3 y_4$	$-4\beta^4 y_3$
4	$\frac{1}{4}(ch\beta x \sin\beta x - sh\beta x \cos\beta x)$	βy_3	$\beta^2 y_2$	$\beta^3 y_1$	$-4\beta^4 y_4$

Если через w_0 , w'_0 , M_0 , Q_0 обозначить перемещение, угол поворота, изгибающий момент, поперечную силу при $x = 0$, то по методу начальных параметров решение (1.2) может быть представлено в виде

$$w = w_0 y_1(\beta x) + \frac{w'_0}{\beta} y_2(\beta x) + \frac{M_0}{EJ\beta^2} y_3(\beta x) + \frac{Q_0}{EJ\beta^3} y_4(\beta x) \quad (1.3)$$

На рис.3.1 начало координат взято у левого конца бруса. Здесь $M_0 = 0$, $Q_0 = 0$. Величины w_0 , w'_0 определяем из условий симметрии

$$w' = 0, \quad Q = P/2 \quad (x = L/2) \quad (1.4)$$

Так как согласно (1.3) и приведенной таблице

$$w' = -4w_0 \beta y_4(\beta x) + w'_0 y_1(\beta x),$$

$$w'''' = -4w_0 \beta^3 y_2(\beta x) - 4w'_0 \beta^2 y_3(\beta x),$$

то, удовлетворяя условиям (1.4), находим входящие в (1.3) перемещения и угол поворота в точке $x = 0$

$$w_0 = \frac{P}{8 EJ\beta^3} y_1\left(\frac{\beta L}{2}\right), \quad w'_0 = \frac{P}{2 EJ\beta^2} y_4\left(\frac{\beta L}{2}\right),$$

$$y = y_2 \left(\frac{\beta L}{2} \right) y_1 \left(\frac{\beta L}{2} \right) + 4y_3 \left(\frac{\beta L}{2} \right) y_4 \left(\frac{\beta L}{2} \right)$$

Подставляя эти значения в (1.3), находим выражение для прогиба под действием силы P от равновесного положения, характеризуемого равномерным погружением на глубину H в соответствии с (1.1),

$$w = \frac{P}{8 EJ \beta^3 y} \left[y_1 \left(\frac{\beta L}{2} \right) y_1(\beta x) + y_4 \left(\frac{\beta L}{2} \right) y_2(\beta x) \right] \quad (1.5)$$

Данное решение справедливо, пока верхняя поверхность бруса будет выступать из воды, т.е. при $H + w < h$. Из (1.5) обычным образом определяются изгибающие моменты и напряжения.

В [2] приняты следующие данные: $\gamma_0 = 0.6 \text{ Г/см}^3$, $\gamma = 1 \text{ Г/см}^3$, $E = 10^5 \text{ кГ/см}^2$, $L = 10^3 \text{ см}$, $b = 20 \text{ см}$, $h = 10 \text{ см}$, $P = 50 \text{ кГ}$.

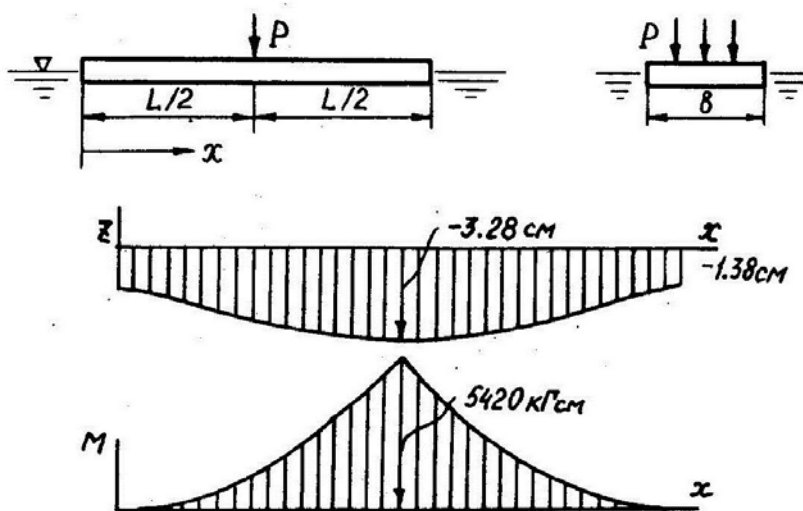


Рис. 3.1. Брус на поверхности жидкости под действием силы P .

Рис. 3.2. Эпюры прогиба и изгибающего момента, возникающих под действием силы P .

Глубина равномерного погружения без изгиба $H = 6$ см. Коэффициент $\beta = 2.34 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$, $\beta L/2 = 1.17$. Пользуясь приведенной выше таблицей для функций Y_n , находим

$$Y_1(1.17) = 0.69, \quad Y_2(1.17) = 1.10,$$

$$Y_3(1.17) = 0.67, \quad Y_4(1.17) = 0.26$$

На рис. 3.2 приведено распределение перемещения w по длине бруса. Видно, что происходит общее перемещение его на величину 1.38 см (сверх погружения на величину $H = 6$ см за счет собственного веса). Кроме того, сила P вызывает собственно изгиб с максимальным прогибом в центре $(3.28 - 1.38)$ см = 1.9 см. На этом рисунке приведена также эпюра изгибающего момента.

§ 2. ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ТЯЖЕСТЬЮ ЖИДКОСТИ

Ставится та же задача, что в § 3 предыдущей главы (рис. 2.1). Единственное отличие состоит в том, что вместо мембраны в качестве днища предполагается круглая пластина толщиной h , с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν . Собственным весом ее пренебрегаем по сравнению с нагрузкой со стороны жидкости. Считаем известным уровень H жидкости в деформированном состоянии пластины. В таком предположении задача рассматривалась в [1].

Уравнение осесимметричного изгиба пластины имеет вид

$$D \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) = \gamma(w + H) \quad (2.1)$$

Вводя обозначение отношения удельного веса жидкости к цилиндрической жесткости пластины

$$\beta^4 = \frac{\gamma}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.2)$$

и разыскивая решение уравнения (2.1) в классе цилиндрических

функций, находим

$$w = C_1 J_0(\beta r) + C_2 I_0(\beta r) + C_3 N_0(\beta r) + C_4 K_0(\beta r) - H \quad (2.3)$$

Здесь $J_0(z)$, $N_0(z)$, $I_0(z)$, $K_0(z)$ — стандартные обозначения функций Бесселя нулевого порядка от действительного и мнимого аргумента.

Для сплошной пластины (без центрального отверстия) постоянные $C_3 = C_4 = 0$. Примем два вида условий крепления дна к стенкам. Край зажат, так что прогиб и угол поворота равны нулю

$$w = dw/dr = 0 \quad (r = R) \quad (2.4)$$

и свободно оперт (прогиб и изгибающий момент равны нулю)

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0 \quad (r = R) \quad (2.5)$$

Удовлетворяя решение (2.3) условиям (2.4), находим следующее выражение для прогиба

$$w = \frac{H}{\Delta(\beta R)} [I_1(\beta R)J_0(\beta r) - J_1(\beta R)I_0(\beta r) - \Delta(\beta R)], \quad (2.6)$$

$$\Delta(\beta R) = J_0(\beta R)I_1(\beta R) - J_1(\beta R)I_0(\beta R),$$

где J_1 , I_1 — функции Бесселя первого порядка.

Зная w , по обычным формулам можно находить значения всех напряжений в пластине. Приведенные выводы справедливы лишь в том случае, если определитель $\Delta > 0$. Как известно из § 1, 2 главы II, это ограничение связано с линейностью задачи. Из уравнения $\Delta(\beta R) = 0$ получаем "критическую" величину $\beta R = 3.19$. С учетом обозначения (2.2), находим также значение радиуса

$$R = 3.19/\beta = 3.19 (D/\gamma)^{1/4},$$

до которого решение (2.6) справедливо.

Металлическая пластина с параметрами $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0.3$, $h = 2 \text{ см}$ имеет жесткость на изгиб $D = 1.46 \cdot 10^6 \text{ кг.см}$. Удельный вес воды $\gamma = 10^{-3} \text{ кг/см}^3$. Поэтому $\beta^{-1} = 195.6 \text{ см}$, а "критический"

радиус равен 624 см. Пусть значение радиуса пластины R равно как раз 195.6 см. Тогда из (2.6)

$$\frac{w}{H} = 0.5711 J_0\left(\frac{r}{R}\right) + 0.4447 I_0\left(\frac{r}{R}\right) - 1$$

По этой формуле при $r = R$ прогиб $w = 0$, в центре пластины ($r = 0$) $w = 0.0158 H$.

Если в правой части уравнения (2.1) опустить член γw , т.е. пренебречь добавочной нагрузкой, зависящей от прогиба, то

$$\frac{w}{H} = \frac{\gamma R^4}{64 D} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \quad (2.7)$$

Прогиб в центре, вычисленный по (2.7) с использованием приведенных выше числовых данных, составляет $w(r = 0) = 0.0156 H$.

Небольшая разница между точным и приближенным значениями прогиба объясняется большой жесткостью пластины и относительно малым радиусом в данном примере. Разница в значениях изгибающих моментов и напряжений получается больше.

В случае свободно опертой кромки из (2.3) и (2.5) имеем следующие константы

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{H(1-\nu)}{\beta R \Delta} I_0(\beta R) + \frac{H}{\Delta} I_0(\beta R), \\ C_2 &= -\frac{H(1-\nu)}{\beta R \Delta} J_1(\beta R) + \frac{H}{\Delta} J_0(\beta R), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\Delta = \frac{1-\nu}{\beta R} \left[J_0(\beta R) I_1(\beta R) - I_0(\beta R) J_1(\beta R) \right] + 2 J_0(\beta R) I_0(\beta R)$$

Подставляя их в (2.3), находим выражение для прогиба. Из условия $\Delta(\beta R) = 0$ получаем $\beta R = 1.57$. Это значение в два раза меньше, чем для рассмотренного выше случая защемленной кромки.

При приведенных выше числовых данных "критическое" значение радиуса пластины получается равным $R = 307$ см. Выражение для прогиба

$$\frac{w}{H} = 0.6993 J_0\left(\frac{r}{R}\right) + 0.3672 I_0\left(\frac{r}{R}\right) - 1$$

По этой формуле прогиб в центре равен $w = 0.0612 H$.

При пренебрежении добавочной нагрузкой γw вместо (2.7) получается следующее приближенное выражение

$$\frac{w}{H} = \frac{\gamma R^4}{64 D} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (2.9)$$

По (2.9) прогиб в центре пластины равен $w = 0.0637 H$.

§ 3. ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАКРЫВАЮЩЕЙ ПОЛОСТЬ С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим ту же задачу, что в § 3 главы II, о равновесии упругой крышки цилиндрического сосуда, в который накачана жидкость (рис. 2.3). Только теперь вместо мембраны крышкой служит круглая пластина [1].

В правой части уравнения (2.1) нагрузочный член будет равен $\gamma(H-w)$. Здесь для w за положительное принимается направление вверх. Решение этого уравнения для случая сплошной пластины имеет вид

$$w = \bar{C}_1 J_0(\beta r \sqrt{i}) + \bar{C}_2 J_0(\beta r \sqrt{-i}) + H \quad (3.1)$$

Цилиндрические функции от комплексного аргумента можно представить в виде

$$J_n(z \sqrt{\pm i}) = u_n(z) \pm i v_n(z)$$

Вместо $u_n(z)$, $v_n(z)$ применяются также функции $\text{ber}_n(z)$ и $\text{bei}_n(z)$. Мы будем пользоваться в дальнейшем обоими обозначениями. Производные функций u_n и v_n равны

$$u_0'(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 - v_1), \quad v_0'(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (u_1 + v_1),$$

$$u_0''(z) = v_0 + \frac{1}{\sqrt{2} z} (u_1 - v_1), \dots$$

Тогда вместо (3.1) можно записать

$$w = C_1 u_0(\beta R) + C_2 v_0(\beta R) + H, \quad (3.2)$$

где C_1, C_2 — новые постоянные.

Если удовлетворить условиям (2.4) для заземленной кромки, то

$$C_1 \Delta = -H [u_1(\beta R) + v_1(\beta R)],$$

$$C_2 \Delta = H [u_1(\beta R) - v_1(\beta R)], \quad (3.3)$$

$$\Delta = u_0(\beta R)[u_1(\beta R) - v_1(\beta R)] - v_0(\beta R)[u_1(\beta R) + v_1(\beta R)]$$

Итак, выражения (3.2) и (3.3) представляют собой решение поставленной задачи. Примечательно, что в отличие от предыдущего параграфа уравнение $\Delta(\beta R) = 0$ не имеет действительных корней. Поэтому полученное решение справедливо при любых значениях параметра βR . В частности, не существует критического значения радиуса пластины.

При числовых данных из предыдущего параграфа выражение для прогиба (вернее, подъема, так как $w > 0$ в направлении вверх) приводится к виду

$$\frac{w}{H} = 1 - 0.9846 u_0\left(\frac{r}{R}\right) + 0.1235 v_0\left(\frac{r}{R}\right)$$

В центре пластины $w = 0.0154 H$.

В случае свободно опертых краев из (2.5) и (3.1) находим

$$C_1 \Delta = H \left\{ u_0(\beta R) - \frac{1-\nu}{\beta R \sqrt{2}} [u_1(\beta R) + v_1(\beta R)] \right\},$$

$$C_2 \Delta = H \left\{ v_0(\beta R) + \frac{1-\nu}{\beta R \sqrt{2}} [u_1(\beta R) - v_1(\beta R)] \right\}, \quad (3.4)$$

$$\Delta = - [u_0(\beta R)]^2 - [v_0(\beta R)]^2 + \\ + \frac{1-\nu}{\beta R \sqrt{2}} \left\{ u_0(\beta R) [u_1(\beta R) + v_1(\beta R)] - v_0(\beta R) [u_1(\beta R) - v_1(\beta R)] \right\}$$

И в данном решении уравнение $\Delta(\beta R) = 0$ не имеет действительных корней. Следовательно, решение (3.2), (3.4) справедливо при любых значениях βR . Ограничение может быть связано с необходимостью учета нелинейностей.

При числовых данных из § 2 по (3.2) и (3.4) имеем следующее выражение прогиба (подъема)

$$\frac{w}{H} = 1 - 0.9388 u_0\left(\frac{r}{R}\right) + 0.3038 v_0\left(\frac{r}{R}\right)$$

В центре пластины $w = 0.0612 H$.

§ 4. ЗАДАЧА ГЕРЦА О ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНКЕ

В одной из работ немецкого физика Герца [3] рассматривается равновесие плавающей на поверхности жидкости круглой пластинки и груза весом P в центре. В работе Динника [1] эта задача решается с применением цилиндрических функций, что позволило упростить все выкладки. Следуя [1], приведем это решение.

Воспользуемся уравнением (2.1), где нужно принять распределенную нагрузку $\gamma_0 h$ вместо γH . Здесь γ_0 , h — удельный вес и толщина пластинки. Кроме того, по площадке с малым радиусом r_0 в центре пластины действует сила $P\delta(r_0 - r)$, где функция $\delta = 1$ для $r < r_0$ и $\delta = 0$ для $r > r_0$. Итак, уравнение осесимметричного изгиба круглой пластины имеет вид

$$D \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) = \gamma_0 h - \gamma w + P \delta(r_0 - r) \quad (4.1)$$

Перемещение w положительно в направлении вниз.

Решение однородного уравнения, соответствующего (4.1), можно представить в виде

$$w = C_1 u_0(\beta r) + C_2 v_0(\beta r) + C_3 f_0(\beta r) + C_4 g_0(\beta r), \quad (4.2)$$

$$\beta = (\gamma/D)^{1/4},$$

где функции u_0 , v_0 введены в предыдущем параграфе. Аналогично вводятся функции f_0 , g_0 :

$$H_n(z \sqrt{\pm i}) = f_n(z) \pm i g_n(z), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где H_n функции Ханкеля, которые обращаются в нуль при $z \rightarrow \infty$. Значения всех функций u_0 , v_0 , f_0 , g_0 даются в математических справочниках (применяются также функции $her_n z$ и $hei_n z$).

Рассмотрим сначала решение задачи без учета собственного веса пластины $\gamma_0 h$. Можно показать [1], что при действии сосредоточенной в центре силы P постоянные в (4.2) равны

$$C_3 = P/(4\beta^2 D), \quad C_4 = 0, \quad (4.3)$$

а C_1 , C_2 определяются из условий на внешнем контуре $r = R$.

В случае бесконечно большого радиуса R необходимо положить $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, так как функции u_0 , v_0 не обращаются в нуль при $r \rightarrow \infty$. Поэтому согласно (4.2), (4.3) прогиб протяженной пластины будет равен

$$w = \frac{P}{4\beta^2 D} f_0(\beta r) \quad (4.4)$$

Для вычисления прогиба для разных βr можно пользоваться таблицами в справочниках. При больших значениях аргумента ($\beta r > 6$)

имеют место асимптотические формулы. При возрастании аргумента функция $f_0(\beta r)$ имеет убывающий периодический характер. Ее первые корни равны 3.92, 8.33 и т.д. Дальнейшие корни могут быть выражены приближенно

$$(\beta r)_n = \pi \sqrt{2} (n - 1/8), \quad n = 3, 4, \dots$$

Волны имеют вид концентрических окружностей вокруг точки приложения нагрузки. По удалении от нее, когда $n \gg 1/\beta$, расстояние между соседними волнами равно $\pi \sqrt{2} / \beta = \pi(4D/\gamma)^{1/4}$. Амплитуда убывает весьма быстро. Под нагрузкой ($r=0$) происходит наибольшее понижение. Функция $f_0(0) = 1/2$ и $w(0) = P/(8\beta^2 D)$. При удалении от центра по радиусу пластина поднимается. Когда $\beta r = 3.92$, прогиб достигает нулевого значения. Далее положение пластины становится выше среднего уровня жидкости. Затем происходит постепенное понижение и при $\beta r = 8.33$ прогиб $w = 0$ и т.д.

Для ледяного покрова при данных $E = 27600 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 1/4$, $h = 1 \text{ см}$, $\gamma = 10^{-3} \text{ кг/см}^3$ прогиб под нагрузкой равен $w(0) = 0.08 P \text{ см/кг}$. Если $h = 10 \text{ см}$, то $w(0) = 0.0025 P \text{ см/кг}$.

В случае плавающей на поверхности жидкости пластины конечного радиуса R необходимо назначить условия на краю. Считаем, что этот край свободен, т.е. изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0 \quad (r = R) \quad (4.5)$$

Когда не учитывается собственный вес пластины, постоянные C_3, C_4 в (4.2) по-прежнему определяются по (4.3). Постоянные C_1, C_2 определяются из (4.5)

$$C_1 \Delta = \frac{P}{4\beta D} \left[\frac{(1-\nu)\sqrt{2}}{\beta R} \left(f_1 u_1 + g_1 v_1 \right) + g_0 \left(u_1 - v_1 \right) - u_0 \left(f_1 + g_1 \right) \right],$$

$$C_2 \Delta = - \frac{P}{4BD} \left[\frac{(1-\nu)\sqrt{2}}{\beta R} \left(u_1 g_1 - v_1 f_1 \right) + v_0 \left(f_1 + g_1 \right) - g_0 \left(u_1 + v_1 \right) \right], \quad (4.6)$$

$$\Delta = - \frac{(1-\nu)\sqrt{2}}{\beta R} \left(u_1^2 + v_1^2 \right) + u_0 \left(u_1 + v_1 \right) - v_0 \left(u_1 - v_1 \right)$$

Здесь все функции u_0 , v_0 , g_0 , u_1 , v_1 , f_1 , g_1 берутся для аргумента $\beta r = \beta R$.

При относительно малом (по сравнению с половиной длины волны прогиба) значении радиуса R прогиб w на контуре положителен. Так как нами принято за положительное значение w направление вниз, то в этом случае край опускается ниже невозмущенного уровня жидкости.

Примем следующий критерий: если край ниже уровня жидкости, то пластина не может находиться на плаву, для обеспечения плавучести прогиб w должен быть отрицательным при $r = R$.

С учетом (4.2), (4.3), (4.6) это условие дает следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\nu)\sqrt{2}}{\beta R} \left[f_0 \left(u_1^2 + v_1^2 \right) - u_0 \left(f_1 u_1 + g_1 v_1 \right) - v_0 \left(f_1 v_1 - g_1 u_1 \right) \right] + \\ & + \left(f_1 + g_1 \right) \left(u_0^2 + v_0^2 \right) + \left(u_1 + v_1 \right) \left(f_0 u_0 + g_0 v_0 \right) + \left(u_1 - v_1 \right) \left(u_0 g_0 - v_0 f_0 \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь снова все функции u_n , v_n , f_n , g_n имеют аргумент βR .

Найдено [1], что первый корень этого уравнения равен $\beta R = 2.64$ (заметим, что для случая неограниченной пластины первый корень уравнения $f_0(\beta R) = 0$ из (4.4) равен 3.92). Второй корень $\beta R = 7.12$. Следующие определяются формулой

$$(\beta R)_n = \pi \sqrt{2} (n - 3/8) \quad n = 3, 4, \dots$$

Следовательно, если радиус пластины меньше $2.64/\beta = 2.64(D/\gamma)^{1/4}$, то она вместе с грузом веса P не имеет равновесного положения на поверхности жидкости. Такое равновесие достигается, если $R \geq 2.64/\beta$.

Анализ усложняется, если учитывать первый член в правой части (4.1). Учет соответствующего частного решения дает

$$w = C_1 u_0(\beta r) + C_2 v_0(\beta r) + \frac{P}{4\beta^2 D} f_0(\beta r) + \frac{\gamma_0 h}{\gamma} \quad (4.8)$$

При определении постоянных C_1 , C_2 по (4.5) отсутствует влияние последнего члена в (4.8), так как он не зависит от r . Поэтому выражения (4.6) справедливы и в этом случае. Имеет место общее погружение пластины на величину $\gamma_0 h/\gamma$ по сравнению со случаем невесомой пластины.

Приравнявая (4.8) нулю, получаем уравнение, аналогичное (4.7) для случая невесомой пластины. По (4.7) наименьшее значение βR , когда возможно равновесие пластины на поверхности жидкости, не зависело от P . Теперь оно зависит как от P , так и от $\gamma_0 h$.

Рассмотрим пример с данными $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0.3$, $h = 0.1 \text{ см}$, $\gamma = 10^{-3} \text{ кг/см}^3$, $\gamma_0 = 7.8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$. Если пренебречь собственным весом $\gamma_0 h$, то наименьший радиус плавающей пластинки не зависит от P и равен 54.3 см.

При учете собственного веса $\gamma_0 h$ решение зависит еще от P . Например, при $P = 100 \text{ кг}$ этот радиус равен $R = 272 \text{ см}$. При $P = 10 \text{ кг}$ уравнение не имеет действительных положительных корней. Следовательно, пластина с грузом 10 кг не может находиться на плаву. То же самое имеет место при меньших значениях P .

Таким образом, круглая пластина определенного радиуса с грузом в центре находится на плаву, а без груза или с недостаточным грузом тонет. Это обстоятельство объясняется большим опусканием центральной части по сравнению с периферией пластины и соответствующим вытеснением жидкости под ней.

§ 5. ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Круглая тонкая пластина покрывает полость с жидкостью. Имеется также слой жидкости над пластиной. Под действием сосредоточенной силы P , приложенной в центре пластины, происходит ее осесимметричный изгиб. Будет рассмотрен также случай давления штоком (рис. 3.3). Силу этого воздействия обозначим через $q(r)$.

Как было показано в главе II, в присутствии слоя жидкости с верхней и нижней сторон мембраны или пластины в выражении давления на них не участвует член γw . Он появляется, если имеется разность плотностей в слоях сверху и снизу мембраны. Будем предполагать, что круглая пластина закреплена как по внешнему контуру ($r = a$), так и по внутреннему контуру ($r = b$).

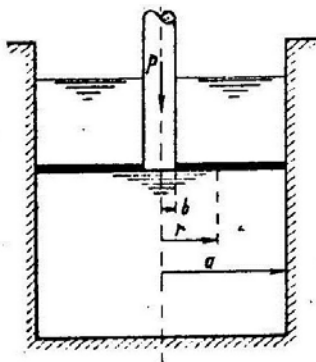


Рис. 3.3. Пластина, закрывающая полость с жидкостью, под действием центральной силы.

За положительные принимаем перемещение и давление, направленные вниз. Уравнение осесимметричного изгиба пластины

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 w = q(r) - p_0 \quad (5.1)$$

Так же как в главе II, для определения давления p_0 привлекается условие несжимаемости в замкнутой полости

$$\int_0^a w r dr = 0 \quad (5.2)$$

При радиусе b , малом по сравнению с внешним радиусом, a , можно свести воздействие силы $q(r)$ к сосредоточенной нагрузке P . Такая задача рассматривалась в работе [7]. В этом случае общее

решение уравнения (5.1) имеет вид

$$w = C_1 + C_2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) + C_3 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + C_4 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{P_0 r^4}{64D} \quad (5.3)$$

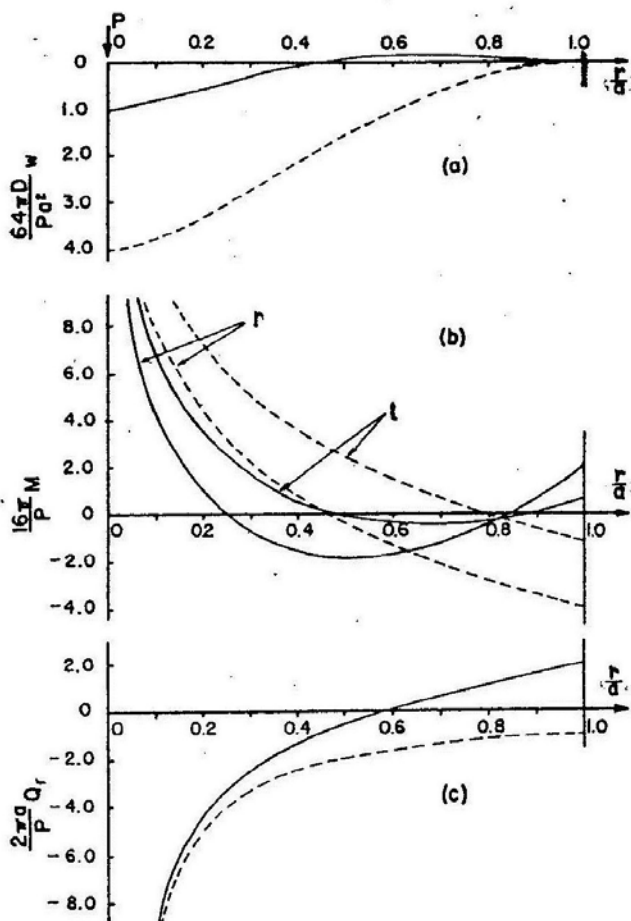


Рис.3.4. Изменение прогиба (а), изгибающих моментов (б) и перерезывающей силы (с) по радиусу круглой пластины (r — радиальный, t — тангенциальный изгибающие моменты; сплошные линии относятся к случаю замкнутой полости, а штриховые линии — к случаю незамкнутой полости).

В соответствии с граничными условиями защемления и условием (5.2) получаем из (5.3)

$$w = \frac{P a^2}{64\pi D} \left[1 + 2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + 8 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right] \quad (5.4)$$

Если не предполагать замкнутость нижней полости и положить $p_0 = 0$, то не нужно пользоваться условием (5.2). Тогда вместо (5.4) решение уравнения (5.1) имеет вид

$$w = \frac{P a^2}{64\pi D} \left[4 - 4 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 8 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right] \quad (5.5)$$

Этот результат справедлив также для случая отсутствия жидкости.

На рис. 3.4, а приведены результаты по выражениям (5.4) (сплошная линия) и (5.5) (штриховая линия). Различными являются как характер изменения прогиба по радиусу, так и величина прогибов. Прогиб в центре пластины, покрывающей незамкнутую полость, в 4 раза больше, чем при применении условия (5.2).

Изгибающие моменты и перерезывающая сила, вычисленные по (5.4), равны

$$\begin{aligned} M_r &= - \frac{P}{16\pi} \left[(7+3\nu) - 3(3+\nu) \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 4(1+\nu) \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right], \\ M_\theta &= - \frac{P}{16\pi} \left[(3+7\nu) - 3(1+3\nu) \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 4(1+\nu) \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right], \\ Q_r &= \frac{P}{2\pi a} \left[3 \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{a}{r} \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Для коэффициента Пуассона $\nu=0.3$ на рис. 3.4, б и рис. 3.4, в сплошными линиями приведены зависимости (5.6). Аналогичные результаты для случая (5.5) приведены штриховыми линиями.

Значение давления p_0 в замкнутой полости равно

$$p_0 = 3P/(\pi a^2), \quad (5.7)$$

что в 3 раза больше, чем в случае воздействия силы P на ту же пластину, но свободно скользящую по стенке емкости (этот результат приведен во введении).

Теперь рассмотрим задачу при конечном значении радиуса b штока (рис. 3.3). Граничные условия имеют вид

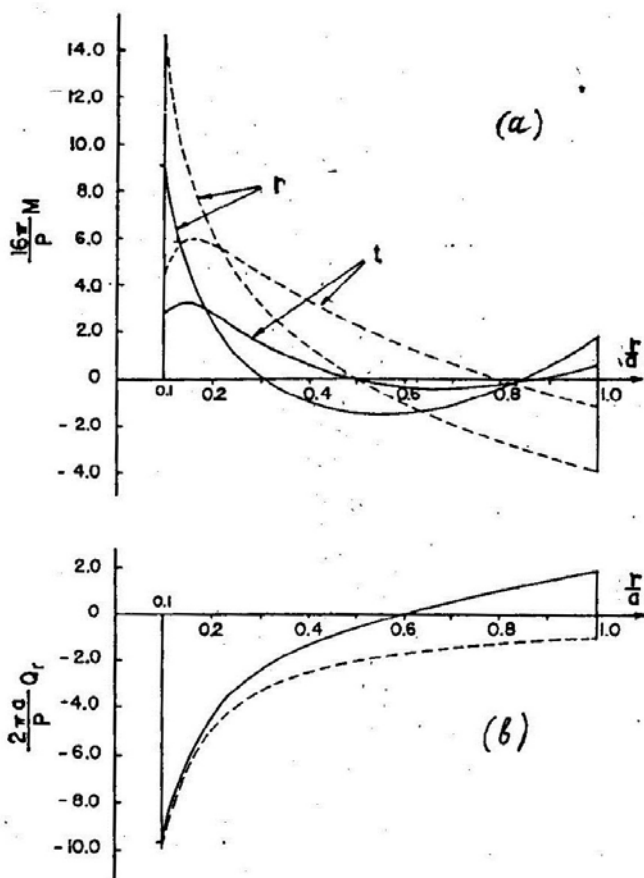


Рис. 3.5. Изменение изгибающих моментов (а) и перерезывающей силы (б) по радиусу круглой пластины (r — радиальный, t — тангенциальный изгибающие моменты; сплошные линии относятся к случаю замкнутой полости, а штриховые линии — к случаю незамкнутой полости).

$$\frac{dw}{dr} = 0, \quad D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = - \frac{bp_0}{2} + \frac{P}{2\pi b}, \quad (r = b) \quad (5.8)$$

а в уравнении (5.1) принимается $q = 0$.

Условие (5.2) преобразуется к виду

$$2 \int_b^a w r dr + b^2 w(b) = 0 \quad (5.9)$$

На рис. 3.5 показано изменение по радиусу изгибающих моментов M_r и M_θ , а также перерезывающей силы при $b/a = 0.1$ и $\nu = 0.3$ (сплошные линии). Штриховыми линиями показаны результаты для случая отсутствия жидкости.

Давление в жидкости, заключенной в полости, равно

$$p_0 = \frac{3P}{\pi a^2} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \ln \left(\frac{b}{a}\right)}{\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^3} \quad (5.10)$$

При $b/a \rightarrow 0$ получаем из (5.10) выражение (5.7).

§ 6. КРУГЛАЯ ПЛАСТИНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕЦЕНТРАЛЬНОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

Если в задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе, сосредоточенная нагрузка P приложена на расстоянии ρ от центра пластины (рис. 3.6), то вместо (5.2) применяется следующее условие несжимаемости жидкости в замкнутой полости

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a w r dr d\theta = 0 \quad (6.1)$$

Решение соответствующего уравнения изгиба при удовлетворении (6.1) и условиям защемления края имеет вид [6.8]

$$w = \frac{P a^2}{16\pi D} \left\{ \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - \frac{\left(\frac{\rho}{a}\right) \left[1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - 2 \left(\frac{r}{\rho}\right) \cos\theta\right]^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 2 \left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{\rho}{a}\right) \cos\theta\right]^{1/2}} - 2 \left(\frac{r}{\rho}\right) \cos\theta \right] \cdot \ln \right. \quad (6.2)$$

$$+ \left[1 - \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] - \frac{3}{4} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^2 \left[1 - \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \right]^2 \right\}$$

Давление p_0 в замкнутой полости, возникающее от воздействия силы P на пластину, равно [8]

$$p_0 = \frac{3P}{\pi a^2} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (6.3)$$

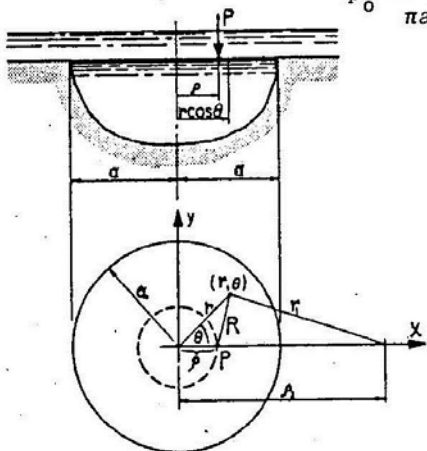


Рис. 3.6. Изгиб круглой пластины, закрывающей полость с жидкостью, под действием нецентрально приложенной силы.

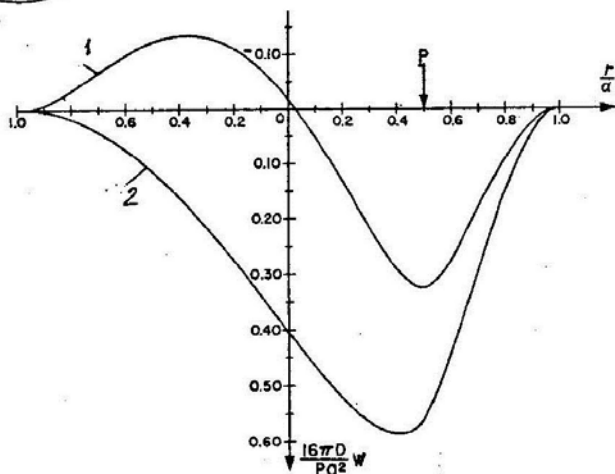


Рис. 3.7. Эпюры прогиба круглой пластины под действием нецентрально приложенной силы (1- для случая замкнутой полости, 2- для случая незамкнутой полости).

Для случая центрального приложения силы ($\rho=0$) решения (6.2) и (6.3) сводятся к выражениям (5.4) и (5.7). На рис. 3.7 линией 1 показано изменение прогиба вдоль диаметра $\theta=0$, $\theta=\pi$ при $\rho/a=1/2$. Здесь же линией 2 показано изменение прогиба для случая, когда полость под пластиной не является замкнутой. Более подробно об этом было сказано в предыдущем параграфе.

В отсутствие верхнего слоя жидкости в уравнении изгиба пластины появляется член γw , как это подробно обсуждалось в главе II. В этом случае решение может быть записано [8]

$$w = - \frac{P}{2\pi\beta^2 D} \left\{ kei(\beta R) + E + \left[\Phi_0(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r) \cos(n\theta) \right] \right\}, \quad (6.4)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= A_0 ber(\beta r) + B_0 bei(\beta r) \\ \Phi_n &= A_n ber_n(\beta r) + B_n bei_n(\beta r) \\ E &= 2\pi p_0 / (\beta^2 P), \\ R &= (r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos\theta)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Входящие сюда цилиндрические функции kei , ber , bei , ber_n , bei_n приводятся в математических справочниках.

Удовлетворение условиям защемления края пластины и уравнению (6.1) дает следующие значения констант

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\Delta_0} \begin{vmatrix} \lambda_0 & bei(\beta a) & 1 \\ \gamma_0 & bei'(\beta a) & 0 \\ \kappa_0 & -ber'(\beta a) & \beta a/2 \end{vmatrix}, \\ B_0 &= \frac{1}{\Delta_0} \begin{vmatrix} ber(\beta a) & \lambda_0 & 1 \\ ber'(\beta a) & \gamma_0 & 0 \\ bei'(\beta a) & \kappa_0 & \beta a/2 \end{vmatrix}, \\ A_n &= \frac{\lambda_n bei_n'(\beta r) - \gamma_n bei_n(\beta r)}{ber_n(\beta r) bei_n'(\beta r) - ber_n'(\beta r) bei_n(\beta r)}, \\ B_n &= \frac{\gamma_n ber_n(\beta r) - \lambda_n ber_n'(\beta r)}{ber_n(\beta r) bei_n'(\beta r) - ber_n'(\beta r) bei_n(\beta r)} \end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначена производная по r . Входящие величины следующие

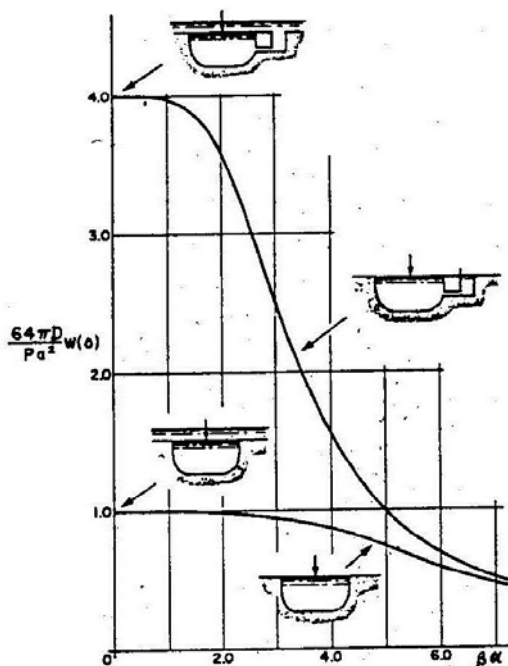


Рис. 3.8. Изменение прогиба в центре круглой пластины в зависимости от удельного веса жидкости.

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \text{ber}(\beta a) & \text{bei}(\beta a) & 1 \\ \text{ber}'(\beta a) & \text{bei}'(\beta a) & 0 \\ \text{bei}'(\beta a) & -\text{ber}'(\beta a) & \beta a/2 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_n = -[\text{kei}_n(\beta a)\text{ber}_n(\beta \rho) + \text{ker}_n(\beta a)\text{kei}_n(\beta a)],$$

$$\gamma_n = -[\text{kei}'_n(\beta a)\text{ber}_n(\beta \rho) + \text{ker}'_n(\beta a)\text{bei}_n(\beta a)],$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{\beta a} - [\text{kei}'(\beta a)\text{bei}(\beta \rho) + \text{ker}'(\beta a)\text{ber}(\beta a)],$$

Условие (6.1) влияет только на константы A_0 и B_0 , в то время как константы A_n , B_n остаются неизменными и в случае незамкнутой полости. Выражение для давления p_0 в полости имеет вид [8]

$$p_0 = \frac{P\beta^2}{2\pi\Delta_0} \begin{vmatrix} \text{ber}(\beta a) & \text{bei}(\beta a) & \lambda_0 \\ \text{ber}'(\beta a) & \text{bei}'(\beta a) & \gamma_0 \\ \text{bei}'(\beta a) & -\text{ber}'(\beta a) & \kappa_0 \end{vmatrix} \quad (6.6)$$

Зависимость безразмерного прогиба в центре круглой пластины от параметра βa при $\rho=0$ показана на рис. 3.8. При этом численные значения D и a неизменны, изменяется только значение γ . Даны результаты как для замкнутой, так и незамкнутой полостей. Значениям прогиба при $\beta a=0$ соответствует наличие верхнего слоя жидкости.

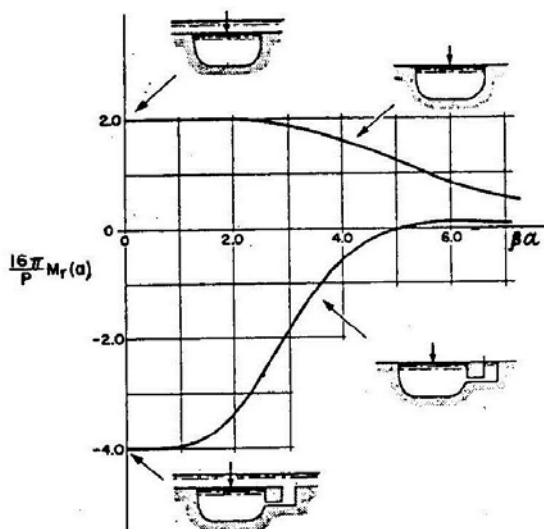


Рис. 3.9. Изменение радиального изгибающего момента на защемленной кромке круглой пластины.

Можно заключить из графика, что влияние подъемной силы в уравнении изгиба незначительно в пределах $0 \leq \beta a \leq 2.0$ для случая замкнутой полости и в пределах $0 \leq \beta a \leq 1.0$ — для случая незамкнутой полости. В указанных пределах можно не учитывать влияния подъемной силы жидкости. С увеличением плотности жидкости прогибы падают, причем более стремительно для случая незамкнутой полости. При $\beta a > 6.0$ кривые сближаются. Таким образом, для тяжелой жидкости удовлетворение условию ее несжимаемости не оказывает заметного влияния на решение. Как видно из рис. 3.9, эти же оценки справедливы для изгибающего момента M_r при $r = a$.

§ 7. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ЖИДКОСТЬЮ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА

Рассмотрим линейную задачу об изгибе вертикальной пластинки или балки-стенки, на которую действует гидростатическое давление (рис. 3.10). Предполагаем, что в недеформированном состоянии пластина является плоской, при этом высота жидкости H_0 совпадает с длиной пластины L . Края ее имеют шарнирное закрепление. В изогнутом состоянии пластинки высота жидкости равна H . Следовательно, в зависимости от величины прогиба пластины меняется нагрузка на нее со стороны жидкости. В дальнейшем предполагаем, что на поверхность жидкости действует давление p_0 , равное давлению на внешнюю сторону пластины. При этом на пластину действует давление, обусловленное только высотой столба жидкости.

Итак, условие несжимаемости имеет вид

$$\int_0^H w \, dx = (L-H)l, \quad (7.1)$$

где l — ширина емкости, занятой жидкостью в недеформированном положении пластины.

В уравнении изгиба пластины

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = \gamma(H-x), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7.2)$$

правая часть записана для $x < H$; она равна нулю при $x \geq H$.

Граничные условия

$$w = d^2 w / dx^2 = 0 \quad (x = 0, L) \quad (7.3)$$

Приближенное решение задачи разыскиваем в виде, удовлетворяющем условиям (7.3),

$$w = W_1 \sin \frac{\pi x}{L} + W_2 \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (7.4)$$

Подстановка (7.4) в (7.1) дает

$$\left(1 - \cos \frac{\pi H}{L}\right) W_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi H}{L}\right) W_2 = \pi l \left(1 - \frac{H}{L}\right)$$

Отсюда необходимо определить H через амплитуды прогиба W_1 , W_2 .

Рассмотрим случай, когда опускание уровня жидкости не является сильным, т.е. H незначительно отличается от L . Следовательно, величина

$$\tilde{h} = 1 - H/L \quad (7.5)$$

является малой по сравнению с единицей.

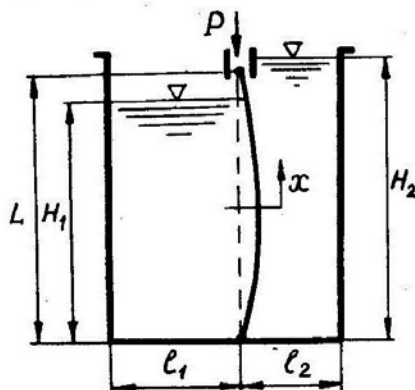
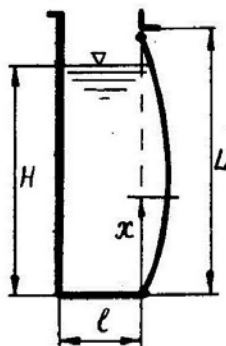


Рис. 3.10. Цилиндрический изгиб вертикальной пластины под гидростатическим давлением.

Рис. 3.11. Выпучивание вертикальной перегородки, контактирующей с жидкостью.

Используя формулы вида $\cos \pi(1-\tilde{h}) = -\cos \pi\tilde{h}$ и разлагая тригонометрические функции в степенные ряды, будем иметь

$$2 \left(1 - \frac{\pi^2 \tilde{h}^2}{4} \right) W_1 + \pi^2 \tilde{h}^2 W_2 = \pi \tilde{h} l$$

В первом приближении имеем значение $\pi \tilde{h} l = 2W_1$. Подставляя его в нелинейные члены, получаем уточненную зависимость

$$\pi \tilde{h} = \frac{2}{l} \left(1 - \frac{1}{l^2} W_1^2 \right) W_1 + \frac{4}{l^3} W_1^2 W_2$$

Отсюда видно, что в линейной задаче следует ограничиться первым приближением $\pi \tilde{h} l = 2W_1$. Оно будет удовлетворительным при $(W_1/l)^2 \ll 1$.

Учитывая (7.5), будем иметь приближенное значение высоты столба жидкости

$$H = L(1 - 2W_1/\pi l) \quad (7.6)$$

Заметим, что сюда не входит амплитуда второй гармоники (7.4), носящей поправочный характер. Из (7.6) видно, что с увеличением ширины емкости уровень жидкости стремится к его первоначальному значению ($H \rightarrow L$).

Интегрирование уравнения (7.2) проводим по методу Бубнова-Галеркина с использованием (7.4). При этом левую часть уравнения (7.2) интегрируем в пределах от 0 до L , а правую часть — от 0 до H . Значение этого верхнего предела задается выражением (7.6). Имеем

$$D \int_0^L \frac{d^4 w}{dx^4} \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi x}{L} \\ \sin \frac{2\pi x}{L} \end{pmatrix} dx = \gamma \int_0^H (H-x) \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi x}{L} \\ \sin \frac{2\pi x}{L} \end{pmatrix} dx$$

В полученных двух уравнениях относительно W_1 и W_2 производим такое же разложение тригонометрических функций в степенные ряды по аргументу $\pi \tilde{h}$, что и выше. Тогда выясняется, что в линейном приближении относительно амплитуд W_1 , W_2 отличный от L верхний предел H не оказывает влияния на решение (соответствующий вклад имеет порядок $(\pi \tilde{h})^2$). Опускание уровня сказывается на решении через подинтегральное выражение.

Вводя безразмерный параметр

$$\gamma_* = \frac{2\gamma}{\pi D} \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \approx 0.07 \frac{\gamma L}{E} \left(\frac{L}{h} \right)^3, \quad (7.7)$$

получаем следующие значения для амплитуд

$$W_1 = \frac{\pi l \gamma_*}{\pi l + 4L \gamma_*}, \quad W_2 = \frac{\gamma_* L}{32}$$

В соответствии с (7.4) прогиб пластины, отнесенный к ее длине, равен

$$\frac{w}{L} = \frac{\pi l \gamma_*}{\pi l + 4L \gamma_*} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{\gamma_*}{32} \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (7.8)$$

Изгиб пластины происходит в основном по одной полуволе синусоиды. Наличие в знаменателе члена с γ_* нарушает прямую пропорциональность между параметрами прогиба и гидростатического давления. Это объясняется тем, что при опускании уровня жидкости уменьшается действующее на пластину давление. Этот эффект проявляется тем сильнее, чем больше отношение L/l , т.е. уже полость, занятая жидкостью. При одном и том же значении параметра γ_* прогиб пластины больше для широкой полости, т.к. при этом H незначительно отличается от L , что видно из (7.6)

$$\frac{H}{L} = 1 - \frac{2 L \gamma_*}{\pi l + 4 L \gamma_*} \quad (7.9)$$

Заметим, что при $4 L \gamma_*/(\pi l) \gg 1$ из (7.8), (7.9) следует $w_1/L \rightarrow \pi l/(4L)$, $H/L \rightarrow 1/2$. Однако при этом линейное приближение не описывает реальную картину.

§ 8. УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В ЖИДКОСТИ

В сосуде с верхней открытой крышкой тонкая перегородка-пластина подвержена сжатию силой P , приходящейся на единицу ширины кромки. Обозначения приведены на рис. 3.11. Задачу устойчивости сжатой пластины рассмотрим в плоской постановке [10]. В отличие от предыдущего параграфа приведем иное решение уравнений, описывающих задачу.

В результате выпучивания перегородки возникает разность уровней жидкости $H_2 - H_1$ и боковое давление, равное

$$q = \gamma(H_2 - H_1) = \frac{1}{m} \int_{-L/2}^{L/2} w \, dx, \quad m = \frac{l_1 l_2}{\gamma(l_1 + l_2)} \quad (8.1)$$

Здесь использовано условие несжимаемости жидкости. Истинные пределы интегрирования (уровни жидкости) заменены на среднее значение $L/2$. Как было показано в предыдущем параграфе, соответствующая разница имеет порядок $(\pi h)^2$, где $h = 1 - H/L$ в линейной задаче представляет собой малую величину по сравнению с единицей. Давление (8.1) на пластину направлено с той стороны, где выше

уровень жидкости. Поэтому при симметричных формах изгиба пластины оно оказывает на нее стабилизирующее действие.

Дифференциальное уравнение продольного изгиба перегородки имеет вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad (8.2)$$

Правая часть уравнения (8.2) в соответствии с (8.1) не зависит от x . Поэтому его решение можно записать в виде

$$w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \alpha x + C_4 + qx^2/(2P) \quad (8.3)$$

$$\alpha^2 = P/D$$

Далее примем условия шарнирного закрепления обоих кромок перегородки $w = d^2 w/dx^2 = 0$ ($x = -L/2, L/2$).

При рассмотрении несимметричных относительно середины ($x = 0$) форм изгиба в (8.3) необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$. В этом случае не происходит изменения уровней жидкости с двух сторон перегородки. Поэтому $q = 0$, и задача сводится к классическому продольному изгибу. Образуются две полуволны. Как известно, наименьшая критическая сила при этом равна

$$P = 4\pi^2 D/L^2 \quad (\alpha L = 2\pi) \quad (8.4)$$

Рассмотрим теперь форму изгиба, симметричную относительно середины пластины.

Подставим в (8.1) выражение прогиба для симметричных форм

$$w = C_2 \cos \alpha x + C_4 + qx^2/(2P) \quad (8.5)$$

и удовлетворим условиям закрепления пластины. Приравняв соответствующий определитель нулю, получаем уравнение относительно αL :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} = \frac{\alpha L}{2} + \frac{\alpha^3 L^3}{24} - \frac{m \alpha^3 P}{2} \quad (8.6)$$

При бесконечной ширине сосуда $m \rightarrow \infty$, и из (8.6) следует $\alpha L = \pi$. Поэтому

$$P = \pi^2 D/L^2 \quad (8.7)$$

Это критическое значение сжимающей силы на свободно опертую плас-

тину (изгиб с образованием одной полуволны). Таким образом, при этом жидкость не оказывает влияния на критическую величину силы.

Вернемся к случаю ограниченных размеров сосуда. Представив (8.6) в виде

$$\frac{mD}{L^5} = - \frac{1}{(\alpha L)^5} \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} + \frac{1}{2(\alpha L)^4} + \frac{1}{24(\alpha L)^2}$$

и задаваясь значениями αL , можно построить график (рис. 3.12). Из него видно, что при $mD/L^5 > 1.4 \cdot 10^{-3}$ потеря устойчивости перегородки происходит с образованием одной полуволны (симметричная относительно середины $x = 0$ форма прогиба), а при $mD/L^5 < 1.4 \cdot 10^{-3}$ — с образованием двух полуволн (несимметричная форма). Критическая сила находится по (8.4).

Последний случай реализуется при узком сосуде, тонкой перегородке и плотной жидкости. Действительно, тонкая пластина, изогнутая по одной полуволне, "не выдерживает" значительного перепада уровней тяжелой жидкости и связанного с этим бокового

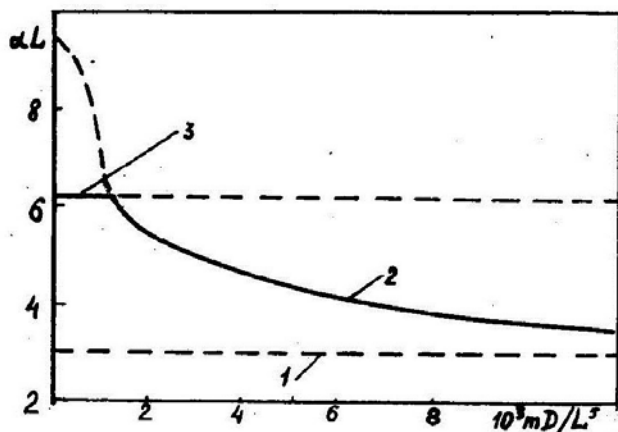


Рис. 3.12. Зависимость критических значений параметра αL от параметра mD/L^5 : 1— для пластины, не контактирующей с жидкостью (выпучивание с образованием одной полуволны), 2— для пластины, контактирующей с жидкостью (выпучивание с образованием одной полуволны), 3— для пластины, контактирующей с жидкостью (выпучивание по несимметричной форме с образованием двух полуволн).

давления и "предпочитает" принять форму с двумя полуволнами, при которой исчезают указанные перепад и давление.

Как следует из рис. 3.12, при большой ширине сосуда, значительной жесткости пластины на изгиб ($mD/L^5 \rightarrow \infty$) корень $\alpha L \rightarrow \pi$, и критическая сила определяется выражением (8.7). Образуется одна полуволна.

Если сосуд является замкнутым и заполнен жидкостью до верхней крышки, то, как известно, задача существенно меняется. При этом не может образоваться перепад уровней жидкости с двух сторон перегородки ($H_1 = H_2 = 0$). Продольный изгиб должен происходить только так, чтобы выполнялось условие

$$\int_{-L/2}^{L/2} w \, dx = 0 \quad (8.8)$$

Появляется необходимость учета среднего давления p_0 . Поскольку оно постоянно во всем объеме жидкости и, следовательно, по длине пластины, то общее решение (8.3) справедливо и в этом случае. Боковое давление $q = p_0$ так же, как константы C_1 , не может быть определено в линейной задаче устойчивости.

Итак, для случая симметричного изгиба имеем

$$w = C_2 \cos \alpha x + C_4 + C_5 x^2, \quad C_5 = q/(2P)$$

Удовлетворим условиям шарнирного закрепления и условию (8.8). Приравняв нулю соответствующий определитель, находим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} = \frac{\alpha L}{2} + \frac{(\alpha L)^3}{24} \quad (8.9)$$

Наименьший ненулевой корень (8.9) равен $\alpha L = 9.374$. Поэтому критическая сила, равная

$$P = \frac{(\alpha L)^2 D}{L^2} = \frac{87.87 D}{L^2},$$

больше, чем при симметричной форме (8.4). Потеря устойчивости по симметричной форме происходит и в случае полного заполнения жидкостью замкнутого сосуда.

В заключение заметим, что при выпучивании перегородки по симметричной форме критическая сжимающая сила и соответствующее число полуволн зависят от параметров жидкости и сосуда, а при несимметричной форме — они не зависят явно от этих параметров.

Последнее обстоятельство дает повод считать, что в рассматриваемом случае отсутствует всякое влияние окружающей среды. Однако это не так. В отсутствие жидкости форма потери устойчивости с образованием двух полуволн не реализуется.

Укажем на задачу устойчивости горизонтальной пластины, находящейся между слоями жидкостей с разными удельными весами (рис. 2.6). Формулировка ее дана в § 5 главы II для случая мембраны. Критическая разность удельных весов равна [5]

$$\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{D} = \left(\frac{5\pi}{4L} \right)^4$$

Здесь γ_2 и γ_1 относятся к верхнему и нижнему слоям, $2L$ — ширина пластины.

§ 9. ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ СРЕДЫ НА ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ

Указанное влияние рассмотрим на примере изгиба удлиненной плоской пластины, герметически закрывающей полость с абсолютно жесткими стенками, под действием сил, распределенных по линии $x = 0$. Начало координаты x находится в середине пролета длиной $2L$. За положительный прогиб w принято перемещение вниз.

Предполагается, что сжатие жидкости, находящейся в полости единичной ширины, при изгибе пластины происходит адиабатически, т.е. подчиняется закону (0.8) из введения. При уменьшении на v первоначального объема V_0 полости в результате изгиба пластины масса M_0 заключенной в ней среды не изменяется. Поэтому $\rho_0 = M_0/V_0$, $\rho = M_0/(V_0 - v)$. Так как $v = \int_{-L}^L w dx$, то согласно (0.8) имеем

$$p = p_0 \left[1 - \frac{1}{V_0} \int_{-L}^L w dx \right]^{-\kappa} \quad (9.1)$$

Здесь p_0 — давление в полости до деформации, w — прогиб, κ — показатель адиабаты (для воздуха $\kappa = 1.4$, воды $\kappa = 7$, этилового спирта $\kappa \approx 11.5$, для несжимаемой жидкости $\kappa = \infty$).

Адиабатическое изменение давления будет иметь место при достаточно быстром нагружении пластины. Допускаем, однако, что скорость нагружения не может быть такой, чтобы нужно было учитывать динамические явления в системе. Такое исследование было проведено в [4].

Линейное уравнение изгиба полоски под действием давления (9.1) и сосредоточенной нагрузки P , приложенной в середине пролета, имеет вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = P\delta(x-0) - \frac{\kappa p_0}{V_0} \int_{-L}^L w \, dx, \quad (9.2)$$

где $\delta = 1$ при $x = 0$ и $\delta = 0$ при $x \neq 0$. Внешнее равномерное давление принято равным p_0 .

Для шарнирного закрепления принимая w в виде

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^N w_n \cos \frac{n\pi x}{2L}, \quad (9.3)$$

и решая уравнение (9.2) методом Бубнова-Галеркина, будем иметь

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{P}{A} \left(1 + \frac{B}{A} \right)^{-1}, \\ w_3 &= \frac{1}{3^4} \frac{P}{A} \left(1 + \frac{4B}{3A} \right) \left(1 + \frac{B}{A} \right)^{-1}, \\ A &= DL \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4, \quad B = \frac{4\kappa p_0}{V_0} \left(\frac{2L}{\pi} \right)^2. \end{aligned} \quad (9.4)$$

В (9.4) отброшены члены порядка 3^{-6} по сравнению с единицей (при этом принимается, что $B \sim A$).

Влияние жидкости на изгиб пластины зависит от отношения (принято $\nu = 0.3$, $V_0 = 2LH$)

$$\frac{B}{A} = 0.091 \kappa \left(\frac{p_0}{E} \right) \left(\frac{2L}{H} \right) \left(\frac{2L}{h} \right)^3, \quad (9.5)$$

т.е. от упругих свойств и геометрических размеров пластины и среды (полости). С увеличением относительной глубины $H/2L$ это влияние уменьшается.

Если $p_0/E = 10^{-6}$, $\kappa = 1.4$, $2L/H = 2$, $h/2L = 10^{-2}$, то $B/A = 0.255$ и $W_1 = 0.797(P/A)$, $W_3 = 1.067(3^{-4}P/A)$ против $W_1 = P/A$ и $W_3 = 3^{-4}P/A$, когда не учитывается влияние полости ($B/A = 0$). При $\kappa = 7$ и других данных, приведенных выше, B/A составляет 1.27, и уравнением (9.2) и последующими формулами нельзя пользоваться, т.к. они справедливы лишь для малых значений B/A . В этих случаях в биномиальном разложении выражения (9.1) необходимо удерживать большее число членов. Отметим, что необходимость удержания нелинейных членов в правой части (9.2) может возникать раньше, чем нелинейного члена в результате учета мембранного усилия в пластине.

На примере приведенной простейшей задачи рассмотрим метод последовательных приближений по схеме

$$D \frac{d^4 w^{(i)}}{dx^4} = P\delta(x-0) - \frac{\kappa p_0}{V_0} \int_{-L}^L w^{(i-1)} dx, \quad (9.6)$$

$$(i = 1, 2, \dots)$$

где положим $w^{(0)} = 0$. Для коэффициентов первого члена разложения (9.3) первое приближение дает $W_1^{(1)} = P/A$. Второе и третье приближения

$$W_1^{(2)} = \frac{P}{A} \left[1 - \frac{B}{A} \right], \quad W_1^{(3)} = \frac{P}{A} \left[1 - \frac{B}{A} + \frac{B^2}{A^2} - \dots \right] \quad (9.7)$$

Таким образом, приближения (9.7) сходятся к точному значению $W_1 = (P/A)(1 + B/A)^{-1}$ при условии $B/A < 1$. Для малых значений B/A практически достаточно двух-трех приближений. При данных, рассмотренных выше, $W_1^{(2)} = 0.745(P/A)$; $W_1^{(3)} = 0.810(P/A)$. Точное значение $W_1 = 0.797(P/A)$.

Этот метод оказывается полезным при решении более сложных задач. К ним относится, например, случай пластины с длинами сторон одного порядка.

Решение (9.4) непригодно в случае несжимаемой жидкости. В

предыдущих параграфах рассматривался соответствующий изгиб пластины. Однако приведем решение задачи методом, использованным здесь, и сравним результаты с (9.4).

Противодавление на пластину вместо (9.1) будет равно

$$p = \frac{P}{2L} + \frac{R}{L}, \quad R = -D \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=L}, \quad (9.8)$$

которое получается из условия равновесия всей пластины. В (9.8) R — опорная реакция. Подставляя (9.3) в условие несжимаемости, находим

$$W_N = -N \sum_{n=1,3,\dots}^{N-2} \frac{1}{n} W_n (-1)^{\frac{1}{2}(n-N)} \quad (9.9)$$

Это условие сводит аппроксимацию (9.3) с $(N+1)/2$ варьируемыми параметрами к аппроксимации с $(N-1)/2$ варьируемыми параметрами

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{N-2} W_n \left[\cos \frac{n\pi x}{2L} - \frac{N}{n} (-1)^{\frac{1}{2}(n-N)} \cos \frac{n\pi x}{2L} \right] \quad (9.10)$$

На перемещениях (9.10) давление (9.8) не совершает работы и при интегрировании уравнения изгиба

$$D(d^4 w/dx^4) = P\delta(x-0) - p$$

по методу Бубнова-Галеркина последний член в нем пропадает. Будем иметь

$$\begin{aligned} W_n \left[1 + \left(\frac{N}{n} \right)^6 \right] + \frac{N^6}{n^5} \sum_{k=1,3,\dots}^{N-2} \frac{1}{k} W_k (-1)^{\frac{1}{2}(n+k)-N} = \\ = \frac{P}{A} \left[1 - \frac{N}{n} (-1)^{\frac{1}{2}(n-N)} \right] \end{aligned} \quad (9.11)$$

В сумме по k член, соответствующий $k = n$, опускается.

Рассмотрим пример с учетом трех членов в разложении (9.3) ($N=5$). При этом согласно (9.10)

$$w = W_1 \left[\cos \frac{\pi x}{2L} - 5 \cos \frac{5\pi x}{2L} \right] + W_3 \left[\cos \frac{3\pi x}{2L} - \frac{5}{3} \cos \frac{5\pi x}{2L} \right]$$

Из (9.11) находим значения W_1 и W_3 , а по (9.9) можно определить и W_5 . Их значения с погрешностью 3^{-6} по сравнению с единицей равны

$$W_1 = \frac{4P}{3^6 A} \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^6 \right], \quad W_3 = \frac{4P}{3^5 A}, \quad W_5 = \frac{4P}{5^5 A}$$

В отличие от случая сжимаемой жидкости, когда наибольшим является первый член разложения (9.3) (далее ряд сходится со скоростью n^{-4}) в случае несжимаемой жидкости наибольшим является второй член (9.3), а именно превосходит первый член примерно в три раза.

Отметим, что изгиб пластины, соприкасающейся с несжимаемой жидкостью, совершенно не зависит от физических свойств жидкости и размеров полости. Как следует из (9.4), (9.5), в случае сжимаемой жидкости изгиб зависит от указанных свойств.

§ 10. ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ СРЕДЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим устойчивость пластины, которая подвергается сжатию силой N . Как и в предыдущем параграфе, удлиненная пластина герметически закрывает полость со сжимаемой жидкостью.

Предполагая снова, что давления с двух сторон пластины до ее выпучивания равны между собой, в линейном приближении будем иметь

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + N \frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{\kappa p_0}{V_0} \int_{-L}^L w \, dx \quad (10.1)$$

Производя интегрирование (10.1) по методу Бубнова-Галеркина с учетом двух первых членов (9.3), находим, что потеря устойчивости по симметричной форме с одной полуволной происходит при значении сжимающей нагрузки [4]

$$N = D \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{B}{A} \right), \quad (10.2)$$

а по несимметричной форме с образованием двух полуволн при

$$N = D \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (10.3)$$

Отношение B/A дается формулой (9.5). Из (10.2) и (10.3) заключаем, что значение нагрузки, при котором пластина выпучивается по симметричной форме, зависит от свойств жидкости и размеров полости, а это значение для несимметричной формы потери устойчивости не зависит от этих факторов и равняется соответствующей нагрузке для пластины, не соприкасающейся с жидкостью.

Линейное приближение показывает на равную возможность выпучивания пластины в обе стороны. Это относится к обеим рассмотренным формам. Причем учет нелинейностей в уравнении изгиба (обусловленных как законом адиабаты, так и появлением мембранных сил в пластине) в отношении несимметричной формы выпучивания не приводит к изменению отмеченного факта. Несколько иная картина наблюдается для симметричной формы выпучивания.

В правой части уравнения (10.1) согласно закону (9.1) сохраним три члена разложения

$$- \frac{\kappa p_0}{V_0} \left[\int_{-L}^L w \, dx + \frac{\kappa+1}{2V_0} \left(\int_{-L}^L w \, dx \right)^2 + \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{6V_0^2} \left(\int_{-L}^L w \, dx \right)^3 \right] \quad (10.4)$$

Кроме того, учтем влияние мембранных сил в пластине, которое в уравнении изгиба будет описываться также кубическим членом [4].

Произведя интегрирование указанного уравнения по методу Бубнова-Галеркина при одночленной аппроксимации, для симметричной формы будем иметь

$$N = D \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \left[1 + \frac{B}{A} + \frac{B}{A} \frac{2L}{\pi V_0} (\kappa+1) W_1 + \right. \\ \left. + \frac{B}{A} \frac{2}{3} \left(\frac{2L}{\pi} \right)^2 \frac{1}{V_0^2} (\kappa+1)(\kappa+2) W_1^2 + \frac{1}{16h^2} W_1^2 \right] \quad (10.5)$$

Кривая II, построенная по (10.6), пересекает ось N при значении $N_0(1+B/A)$ и является несимметричной. Величина $N_0(1+B/A)$ есть критическое значение сжимающей силы (10.2)*. Из рисунка видно, что в этой точке кривая имеет наклон в сторону отрицательных W_1 , т.е. пластина будет стремиться выпучиться наружу. Наименьшее значение N получится при

$$\frac{W_1}{h} \approx - \frac{8(\kappa+1)h}{\pi N} \frac{B}{A} \quad (10.7)$$

Для не очень мелкой полости влияние предпоследнего члена (10.6) мало по сравнению с последним, и он в формуле (10.7) опущен.

При достижении сжимающей нагрузкой значения $N_0(1+B/A)$ пластина быстро выпучивается наружу из положения 1 до положения 2. При этом относительный прогиб будет равен

$$\frac{W_1}{h} \approx - \frac{16(\kappa+1)h}{\pi N} \frac{B}{A}$$

или, если учесть (9.5),

$$\frac{W_1}{h} \approx - 0.464 \kappa(\kappa+1) \cdot \left(\frac{p_0}{E} \right) \left(\frac{2L}{H} \right)^2 \left(\frac{2L}{h} \right)^2$$

Этот прогиб может быть значительным. При $p_0/E = 10^{-6}$, $\kappa=7$, $2L/H=3$, $2L/h=10^2$ он составляет $W_1/h \approx - 2.34$.

В случае несжимаемой жидкости критическая нагрузка для несимметричной формы неустойчивости совпадает с (10.3). Выпучивание с образованием одной полуволны невозможно. Возможно выпучивание, при котором будет сочетание трех и одной полуволны, но соответствующее сжимающее усилие больше, чем по формуле (10.3).

ГЛАВА IV

ОТДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. ГИБКАЯ ПЛАСТИНА НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПОД НАГРУЗКОЙ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ЛИНИИ

В данной главе рассматривается нелинейное поведение пластин, оболочек и панелей, контактирующих с жидкостью. При этом предполагается, что жидкость является как несжимаемой, так и сжимаемой. Перемещения и повороты тонкостенного упругого элемента могут быть произвольными. При рассмотрении выпучивания цилиндрической полостной панели максимальные углы поворота имеют порядок b/R , а максимальные перемещения – порядок $b^2/(4R)$, где b – половина хорды, R – радиус кривизны панели.

Простейшей задачей, допускающей точное интегрирование уравнений при произвольных перемещениях, является рассмотренное в § 7 главы II равновесие бесконечно длинной мембраны под нагрузкой, распределенной по линии (в постановке плоской задачи она показана на рис. 2.7). В этом параграфе ставится та же задача. Разница состоит в том, что вместо мембраны предполагается бесконечно длинная гибкая пластина с изгибной жесткостью D [8]. Собственный вес ее не учитывается. Обозначения из указанного параграфа и рис. 2.7 сохраняются и здесь.

Итак, уравнения изгиба имеют вид (7.1) и (7.2) из главы II. Если все линейные размеры отнести к $(D/\gamma)^{1/4}$, а все силовые факторы – к $(D\gamma)^{1/2}$, то эти уравнения приобретают вид

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \left(u - P\right)\cos\theta + \left(T - \frac{1}{2}z^2\right)\sin\theta, \quad (1.1)$$

$$\frac{du}{ds} = z\cos\theta, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dz}{ds} = -\sin\theta, \quad (1.2)$$

Граничные условия

$$\theta(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\theta(\infty) = 0, \quad u(\infty) = P, \quad z(\infty) = 0 \quad (1.4)$$

Из (1.1)–(1.4) необходимо установить связь безразмерных угла поворота элемента $\theta(s)$, координат $x(s)$, $z(s)$, максимального значения прогиба $w_0 = z(0)$ (под нагрузкой) и функции $u(s)$ с безразмерными силовыми факторами P и T .

В случае малых значений P по сравнению с единицей искомые функции можно представить в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} \theta &= P \theta_0 + P^3 \theta_1 + \dots, & u &= P u_0 + P^3 u_1 + \dots, \\ x &= x_0 + P^2 x_1 + \dots, & z &= P z_0 + P^3 z_1 + \dots, \end{aligned} \quad (1.5)$$

В соответствии с (1.5) уравнения и граничные условия (1.1)–(1.4) дают относительно θ_0 , u_0 , x_0 , z_0 следующую систему

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_0}{ds^2} &= u_0 - 1 + T \theta_0, \\ \frac{du_0}{ds} &= z_0, \quad \frac{dx_0}{ds} = 1, \quad \frac{dz_0}{ds} = -\theta_0, \\ \theta_0(0) &= 0, \quad u_0(0) = 0, \quad x_0(0) = 0, \\ \theta_0(\infty) &= 0, \quad u_0(\infty) = 1, \quad z_0(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Обычным образом получаются также уравнения и граничные условия относительно θ_1 , u_1 , x_1 , z_1 .

Рассмотрим решение задачи (1.6). Дифференцируя по s первое уравнение (1.6), находим

$$\frac{d^4 z_0}{ds^4} - T \frac{d^2 z_0}{ds^2} + z_0 = 0 \quad (1.7)$$

Если $T = 0$, то (1.7) представляет собой хорошо известное уравнение изгиба пластины (балки) на упругом основании.

Для $T > 2$; $T \neq 2$ решение (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4}} \left(\mu e^{\lambda s} - \lambda e^{\mu s} \right), \\ u_0 &= \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4}} \left(\frac{\mu}{\lambda} e^{\lambda s} - \frac{\lambda}{\mu} \lambda e^{\mu s} \right) + 1 \end{aligned}$$

$$\theta_0 = - \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4}} \left(e^{\lambda s} - e^{\mu s} \right), \quad (1.8)$$

$$x_0 = s,$$

$$\lambda = - \sqrt{\frac{1}{2} T + \frac{1}{2} \sqrt{T^2 - 4}}, \quad \mu = - \sqrt{\frac{1}{2} T - \frac{1}{2} \sqrt{T^2 - 4}}$$

При этом для прогиба под сосредоточенной силой $2P$ имеем

$$w_0 = P/\sqrt{2+T} \quad (T > -2) \quad (1.9)$$

Если $-2 < T < 2$, то имеет место волнообразное затухание решения по удалении от сосредоточенной силы.

При $T \geq 2$ решение затухает монотонно. Для $T = 2$ оно имеет вид

$$z_0 = \frac{1}{2} (1 + s) e^{-s}, \quad x_0 = s,$$

$$u_0 = 1 - \frac{1}{2} s e^{-s} - e^{-s}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} s e^{-s}$$

Решение относительно z_1 , x_1 , u_1 , θ_1 также может быть получено. Однако далее остановимся на получении первого интеграла исходного нелинейного уравнения [8]. Умножим (1.1) на $d\theta/ds$ и проинтегрируем по s

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 &= \int \left(u - P \right) \cos \theta \frac{d\theta}{ds} ds + \int \left(T - \frac{1}{2} z^2 \right) \sin \theta \frac{d\theta}{ds} ds = \\ &= \left(u - P \right) \sin \theta - \int z \sin \theta \cos \theta ds - \left(T - \frac{1}{2} z^2 \right) \cos \theta - \\ &- \int z \frac{dz}{ds} \cos \theta ds = \left(u - P \right) \sin \theta - \left(T - \frac{1}{2} z^2 \right) \cos \theta + C \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из условий на бесконечности (1.4) и из (1.10) следует $C = T$. При $s = 0$ из (1.3) и (1.10) получаем

$$d\theta/ds = w_0 \quad (1.11)$$

Если умножить уравнение (1.1) на z и проинтегрировать по s , то

$$z \frac{d\theta}{ds} - \cos \theta = \frac{1}{2} u^2 - Pu - \frac{1}{2} T z^2 + \frac{1}{8} z^4 + C_1 \quad (1.12)$$

Из условий на бесконечности (1.4) и (1.12) получаем $C_1 = P^2/2 - 1$. Используя уравнения (1.11), (1.12) и условия (1.3), находим квадратное уравнение относительно w_0^2 , откуда

$$w_0 = \left[2(2+T) \pm 2\sqrt{(2+T)^2 - P^2} \right]^{1/2} \quad (1.13)$$

Здесь принимается знак минус, так как при $P=0$ должно быть $w_0=0$.

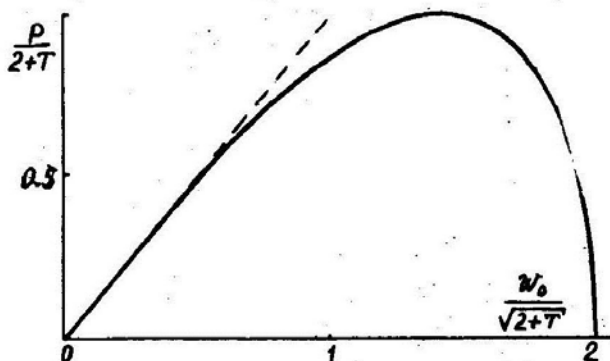


Рис. 4.1. Зависимость нагрузка-погружение пластины в жидкость.

На рис. 4.1 представлен график по (1.13). Линейная зависимость (1.9) показана штриховой линией. Нелинейное решение показывает, что максимальному значению $P = 2 + T$ соответствует прогиб $w_0 = \sqrt{4+2T}$. Дальнейшее увеличение w_0 (при уменьшении P) представляет собой неустойчивое решение. Для заданного осевого натяжения T сила P может возрастать до $2+T$. При $P > 2+T$ вся система неограниченно погружается в жидкость.

В размерных величинах максимальное значение нагрузки, которую может выдерживать бесконечно длинная пластина на поверхности жидкости, равно

$$2P' = 2T' + 4\sqrt{D\gamma} \quad (1.14)$$

Заметим, что мембранное усилие T' может быть и отрицательным (силы сжатия, приложенные к пластине на бесконечности). В частности, при $P'=0$ в соответствии с (1.14) эти силы равны

$$T' = -2\sqrt{D\gamma} \quad (1.15)$$

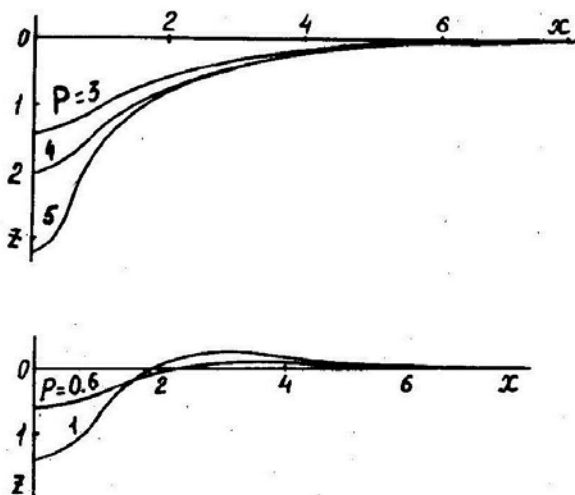


Рис. 4.2. Форма прогиба пластины при растягивающей силе $T = 3$ и разных значениях нагрузки P .

Рис. 4.3. Форма прогиба пластины при сжимающей силе $T = -1$. Максимальная нагрузка равна $P = 1$.

Значение T' по (1.15) может рассматриваться как критическое, при превышении которого появляются прогибы бесконечно длинной пластины, покоящейся на поверхности жидкости.

Форма прогиба по всей длине пластины была получена численным интегрированием системы (1.1)–(1.3) с учетом (1.13). На рис. 4.2 показана эпюра прогибов при $T = 3$ для разных значений P . За исключением зоны приложения нагрузки ($s = 0$) она напоминает форму на рис. 2.8 для мембраны. Максимальное устойчивое значение поперечной силы в этом случае равно $P = 5$, при превышении которого система неограниченно погружается в жидкость.

На рис. 4.3 показан случай сжимающей нагрузки ($T = -1$). Имеет место осциллирующее решение, что характерно для $|T| < 2$.

§ 2. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПАНЕЛЬ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗКИ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ЛИНИИ

Упругая бесконечно длинная панель с радиусом кривизны R контактирует выпуклой стороной с поверхностью жидкости неограниченной протяженности (рис. 4.4). Собственный вес ее не учитывается. Вдоль средней линии панели приложена равномерно, распределенная нагрузка интенсивности $2P'$. Поэтому рассматривается симметричная относительно середины дуги плоская задача. Существенным отличием ее от задачи в предыдущем параграфе является конечная длина дуги панели, часть которой не соприкасается с жидкостью. Таким образом, область интегрирования здесь является переменной.

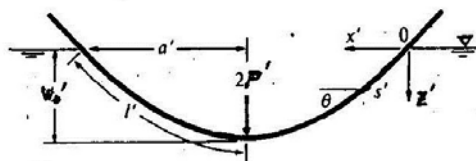


Рис. 4.4. Цилиндрическая панель под сосредоточенной нагрузкой на поверхности жидкости.

Система координат и обозначения приведены на рис. 4.4. Вводятся искомые величины длины $2l'$ касания дуги панели с жидкостью, а также соответствующей хорды $2a'$. Радиус R ненагруженной панели предполагается постоянным. Относя все длины к величине $(D/\gamma)^{1/4}$, имеем уравнение равновесия [9]

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \left(\int_0^s z \cos\theta \, ds \right) \cos\theta + \frac{1}{2} z^2 \sin\theta = 0$$

Если как в предыдущем параграфе ввести функцию u по формуле

$$\frac{du}{ds} = z \cos\theta, \quad (2.1)$$

то приходим к системе уравнений

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + u \cos\theta + \frac{1}{2} z^2 \sin\theta = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin\theta, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad (2.3)$$

Граничные условия имеют вид

$$\frac{d\theta}{ds}(0) = -\lambda, \quad (2.4)$$

$$u(0) = x(0) = z(0) = 0, \quad (2.5)$$

$$\theta(1) = 0, \quad u(1) = P'/(D\gamma)^{1/2} = P, \quad (2.6)$$

где λ и l безразмерные кривизна ненагруженной панели и полудлина касания нагруженной панели с жидкостью. Безразмерные полудлина хорды a и максимальное погружение в жидкость w_0 будут равны

$$a = x(1), \quad w_0 = z(1) \quad (2.7)$$

Рассмотрим случай плоской пластины ($\lambda=0$) и значений P , малых по сравнению с единицей. Тогда решение для θ , u , x , z можно представить в виде рядов (1.5) и

$$l = l_0 + P^2 l_1 + \dots$$

При этом уравнения для функций θ_0 , u_0 , x_0 , z_0 , l_0 и соответствующие граничные условия имеют вид

$$\frac{d^2\theta_0}{ds^2} + u_0 = 0, \quad \frac{du_0}{ds} = z_0, \quad \frac{dz_0}{ds} = \theta_0, \quad \frac{dx_0}{ds} = 1, \quad (2.8)$$

$$\frac{d\theta_0}{ds}(0) = x_0(0) = z_0(0) = u_0(0) = 0, \quad (2.9)$$

$$u_0(l_0) = 1, \quad \theta_0(l_0) = 0 \quad (2.10)$$

Обычным образом определяется система уравнений и граничных условий относительно величин θ_1 , u_1 , x_1 , z_1 , l_1 .

Из (2.8) получаем разрешающее уравнение относительно u_0

$$\frac{d^4 u_0}{ds^4} + u_0 = 0 \quad (2.11)$$

Решение краевой задачи (2.8)–(2.11) имеет вид

$$\theta_0 = \frac{ch(s/\sqrt{2}) \cos(s/\sqrt{2})}{sh(\pi/2)}, \quad u_0 = \frac{sh(s/\sqrt{2}) \sin(s/\sqrt{2})}{sh(\pi/2)},$$

$$z_0 = \frac{ch(s/\sqrt{2}) \sin(s/\sqrt{2}) + sh(s/\sqrt{2}) \cos(s/\sqrt{2})}{\sqrt{2} sh(\pi/2)}, \quad (2.12)$$

$$x_0 = s, \quad l_0 = \pi/\sqrt{2}$$

Из выражения для z_0 в (2.12) виден сложный характер эпюры прогибов. Этот линейный результат совпадает с решением задачи в § 1 главы III, если в последней не учитывать собственный вес бруса. Кроме того, там предполагалось что не происходит отрыва каких-либо частей бруса от жидкости. Решение было представлено в функциях Крылова.

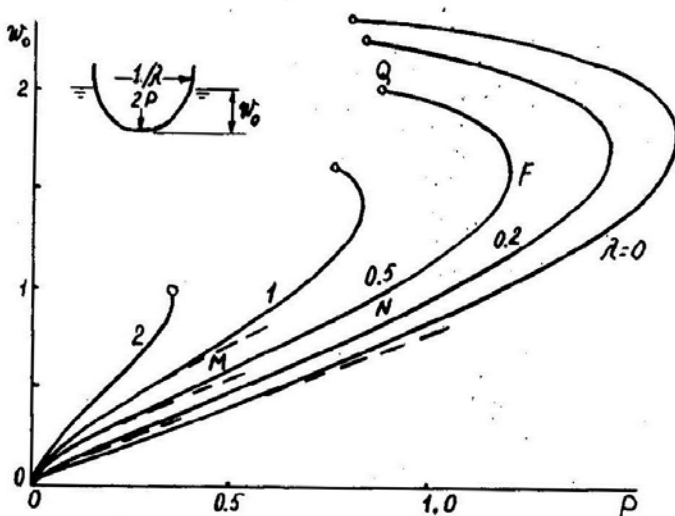


Рис. 4.5. Зависимость нагрузка-погружение панели в жидкость (P, w_0 — безразмерные величины).

Из выражения для z_0 в (2.12) находим максимальный прогиб (при $s = l_0 = \pi/\sqrt{2}$)

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} P \operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.13)$$

Отметим, что в постановке задачи в начале данного параграфа не указывалась ширина панели. Это возможно делать, если не учитывается ее собственный вес. Очевидно, размерная ширина должна быть не меньше, чем

$$2l^* = 2l_0 (D/\gamma)^{1/4} = \sqrt{2} \pi (D/\gamma)^{1/4} \quad (2.14)$$

В противном случае невесомая панель (в данном случае плоская пластина) на поверхности жидкости не может нести никакой нагрузки.

Приведем результаты численного решения нелинейной системы (2.1)–(2.6) [9]. На рис. 4.5 показана зависимость нагрузка – максимальное проникание в жидкость. Линейное решение (2.13) для плоской пластины ($\lambda=0$) справедливо при малых значениях нагрузки P (штриховая линия). При $0 \leq P \leq 1$ оно мало отличается от нелинейного решения.

Более подробно рассмотрим, например, случай панели с безразмерной кривизной $\lambda=0.5$. С увеличением P опускание w_0 растет нелинейно. В точке F на рис. 4.5 максимально возможное значение нагрузки равно $2P=2.42$. Выше этого значения P вся система неограниченно опускается в жидкость. На ниспадающем участке FQ состояние неустойчиво для заданного значения P , но устойчиво при заданном перемещении w_0 . Точке Q соответствует касание кромок панели друг друга (маленькие кружочки на концах кривых для всех λ соответствуют смыканию кромок).

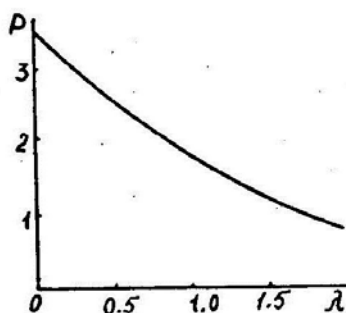


Рис. 4.6. Зависимость предельная нагрузка–начальная кривизна панели (P и λ – безразмерные величины).

На рис. 4.6 показано изменение предельной нагрузки, которую может нести панель разной кривизны. Плоская пластина ($\lambda=0$) может удерживать максимальную нагрузку $2P = 3.27$ или размерную нагрузку $2P' = 3.27 \sqrt{D\gamma}$. Для этого ширина пластины должна быть достаточно большой. Приближенное ее значение дается формулой (2.14). С увеличением кривизны предельная нагрузка уменьшается и стремится к нулю, как π/λ^2 .

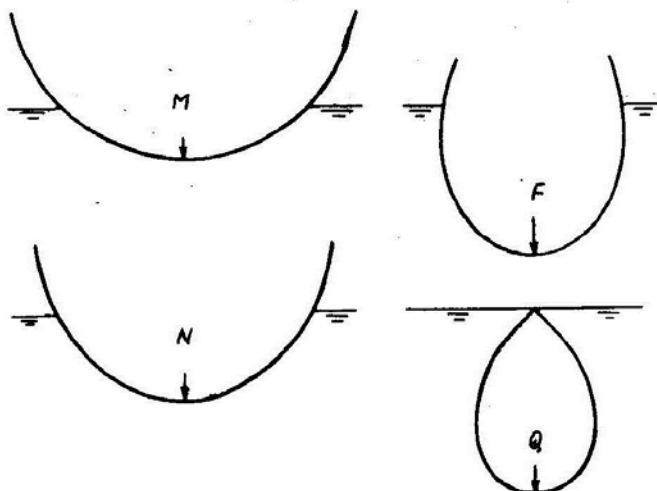
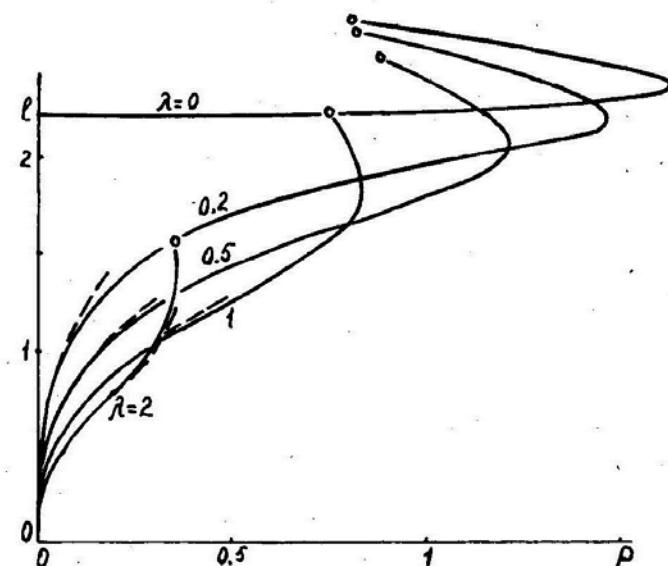


Рис. 4.7. Зависимость нагрузка - длина контакта панели с жидкостью при разных значениях начальной кривизны.

Рис. 4.8. Зависимость формы и глубины погружения панели от нагрузки (при $P = 0.480$ реализуется положение M, при $P = 0.878$ - положение N, при $P = 1.214$ - положение F, при $P = 0.878$ - положение Q).

На рис. 4.7 показана зависимость нагрузка — длина контакта панели с поверхностью жидкости (P и λ — безразмерные величины). Для $\lambda \neq 0$ при малых P справедливо простое соотношение

$$2P = \frac{1}{\lambda} - \frac{\sin(2\lambda)}{2\lambda^2},$$

которое получается применением закона Архимеда (0.2) из введения к недеформированному контуру панели. В случае $\lambda=0$ получается $l=\pi/\sqrt{2}$, что совпадает с l_0 в (2.12). Размерная ширина плоской пластины ограничена в пределах

$$\sqrt{2} \pi (\gamma/D)^{1/4} < 2l' \leq 4.72 (\gamma/D)^{1/4}$$

На рис. 4.8 приведены формы упругой панели с начальной кривизной $\lambda=0.5$ при разных нагрузках. Состояния M, N, F, Q соответствуют таким же точкам на рис. 4.5. Состояния M, N устойчивы. В положении F достигается максимальная несущая форма. В положении Q несущая способность такая же, что в N . Однако положение Q неустойчиво.

§ 3. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА В ЖИДКОСТИ ПОД РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ЛИНИИ НАГРУЗКОЙ

Рассматривается равновесие длинной горизонтальной тонкостенной упругой цилиндрической оболочки, которая полностью или частично погружается в жидкость. Равномерно распределенная нагрузка интенсивности $2P'$ приложена по нижней образующей цилиндра (рис. 4.9). Она уравнивает подъемную силу со стороны жидкости, которая зависит от глубины погружения и деформации оболочки. Собственный вес последней не учитывается. Можно ограничиться рассмотрением деформации кольца, образованного двумя поперечными сечениями оболочки. Изложим результаты работы [1].

Примем следующие обозначения: x', z' — декартовы координаты, как показано на рис. 4.9; s' — длина дуги, отсчитываемая от точки O ; θ — угол между касательной и горизонтальной линией; L — половина периметра кольца; t' — сила сжатия кольца в окружном направлении в точке O ; p_0 — гидростатическое давление в точке O . Полное

гидростатическое давление равно $p = p_0 + \gamma z'$. Введем безразмерные величины:

$$s = \frac{s'}{L}, \quad x = \frac{x'}{L}, \quad z = \frac{z'}{L}, \quad \mu = \frac{p_0 L^3}{D},$$

$$\tau = \frac{\gamma L^4}{D}, \quad t = \frac{t' L^2}{D}, \quad P = \frac{P' L^2}{D},$$

Так как p_0 означает давление в жидкости в верхней точке O , то параметр μ характеризует глубину погружения оболочки. Параметр τ характеризует изменение давления по поверхности оболочки.

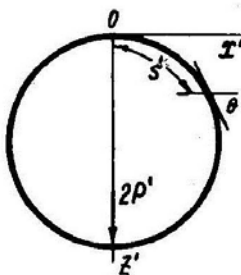


Рис. 4.9. Цилиндрическая оболочка в жидкости под распределенной нагрузкой $2P'$ на единицу длины.

Рассматриваются отдельно случаи полного и частичного погружения оболочки в жидкость. В первом случае уравнения равновесия деформированной оболочки имеют вид [1]

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} = \left[-t + \mu z + \frac{1}{2} \tau z^2 \right] \sin \theta + (\mu x + \tau u) \cos \theta, \quad (3.1)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{du}{ds} = z \cos \theta,$$

Граничными условиями являются

$$\begin{aligned} \theta(0) = x(0) = z(0) = u(0) = 0, \\ x(1) = 0, \quad \theta(1) = \pi \end{aligned} \quad (3.2)$$

В случае частичного погружения оболочки вводится длина дуги s^* ($0 \leq s^* \leq 1$), не соприкасающейся с жидкостью. Соответственно $x^* = x(s^*)$, $z^* = z(s^*)$. Давление на оболочку равно нулю в ее несмоченной части и изменяется линейно с увеличением глубины $z - z^*$ в смоченной части. При этом имеют место следующие уравнения

равновесия [1]

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -t \sin\theta, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dz}{ds} = \sin\theta, \quad (0 \leq s < s^*) \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \left[-t + \frac{1}{2} \tau (z - z^*)^2 \right] \sin\theta + \tau [u - z^* (x - x^*)] \cos\theta \quad (s^* \leq s \leq 1) \quad (3.4)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dz}{ds} = \sin\theta, \quad \frac{du}{ds} = z \cos\theta,$$

а также условия стыковки решений на границе $s = s^*$ и условия (3.2). В (3.4) $u(s)$ равен

$$u(s) = \int_{s^*}^s z(\xi) \cos\theta(\xi) d\xi$$

Из условия равенства вертикальной силы $2P$ и выталкивающей силы жидкости для деформированной оболочки имеем

$$P = -\tau u(1)$$

При $s^* = 0$, $\mu = 0$ уравнения (3.3), (3.4) переходят в (3.1).

При малых значениях τ и в интервале $0 \leq \mu \leq \mu_2$, где $\mu_2 = 3\pi^2$, решение задачи может быть представлено в виде рядов

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \tau\theta_1 + \dots, \quad x = x_0 + \tau x_1 + \dots, \quad z = z_0 + \tau z_1 + \dots, \\ u &= u_0 + \tau u_1 + \dots, \quad t = t_0 + \tau t_1 + \dots, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение относительно функций $\theta_0(s)$, $x_0(s)$, $z_0(s)$, $u_0(s)$, $t_0(s)$ приведено в § 6 этой главы.

В работе [1] найдено решение относительно функций $\theta_1(s)$, $x_1(s)$, ... Кроме регулярного случая $0 \leq \mu < \mu_2$, найдено также решение для сингулярного случая $\mu \sim \mu_2$. Не останавливаясь на этих решениях, приведем результаты численного анализа.

Для каждого значения безразмерного градиента давления τ определяются максимальные значения, достигаемые отношением P/τ , а также значения μ , при которых происходит соприкосновение точек противоположных сторон кольца. Определяется длина дуги несмоченной части s^* в случае частичного погружения.

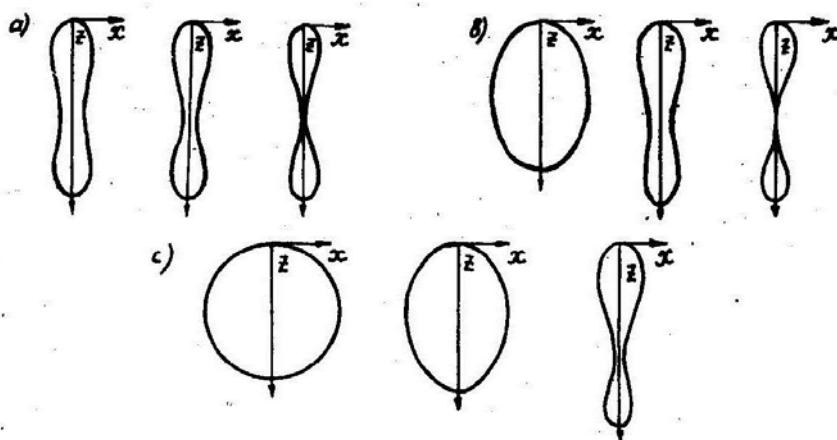


Рис. 4.10. Форма оболочки: а) при $\mu=90$; 100; 119 и постоянном значении $\tau=100$, б) при $\tau=100$; 300; 385 и постоянном значении $\mu=0$, в) при $s^*=1$; 0.6; 0.3 и при постоянном значении $\tau=700$.

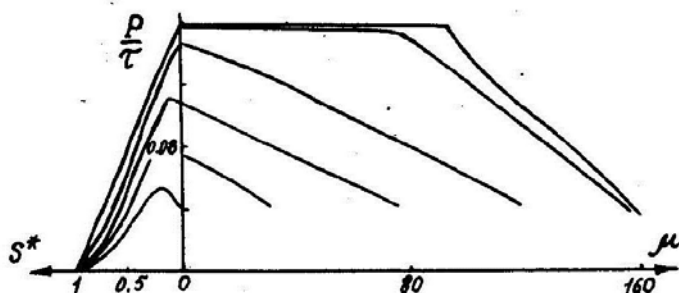


Рис. 4.11. Несущая способность оболочки при изменении глубины ее погружения в жидкость.

На рис. 4.10 приведены формы оболочки для различных значений τ и μ (или s^*). Ввиду наличия переменной части гидростатического давления нижняя часть конфигураций более сжата, чем верхняя половина.

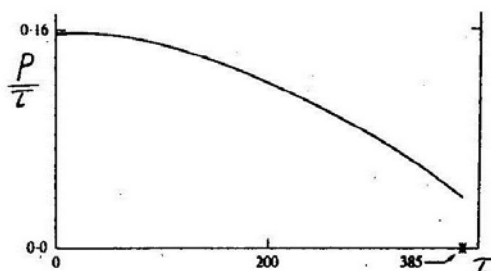


Рис. 4.12. Несущая способность оболочки при изменении переменной части гидростатического давления τ и в отсутствии постоянной его части ($\mu=0$).

На рис. 4.11 показана зависимость $P/\tau = P' / (\gamma L^2)$ от параметра μ (или s^*). Подъемы кривых при движении в правую сторону оси s^* (от 1 к 0) соответствуют устойчивому равновесию частично погруженной оболочки. При этом оболочка все более погружается в жидкость и обладает несущей способностью при увеличении нагрузки P . Состояния, соответствующие падающим кривым при увеличении значений μ , являются неустойчивыми при постоянной нагрузке P . При этом оболочка тонет в жидкости до полного раздавливания. Однако эти состояния устойчивы для фиксированных положений оболочки по вертикали (т.е. когда имеются кинематические ограничители).

Конечные точки кривых при увеличении μ соответствуют касанию точек противоположных боковых сторон оболочки в результате большого изменения формы.

Рассмотрим режим постепенного нагружения силой $2P'$ оболочки. При малых $2P'$ оболочка мало погружена в жидкость (на рис. 4.11 s^* близка к единице). При увеличении $2P'$ происходит дальнейшее проседание оболочки до ее полного погружения (s^* уменьшается до нуля). После этого оболочка тонет, все более сплющиваясь по мере опускания (если достигнутое к моменту полного погружения значение $2P'$ сохраняется).

Зависимость P от τ при $\mu = 0$ (т.е. верхняя точка O оболочки совпадает с поверхностью жидкости) дается на рис. 4.12. Значение τ , при котором точки боковых поверхностей оболочки приходят в контакт, приближенно равно 385.

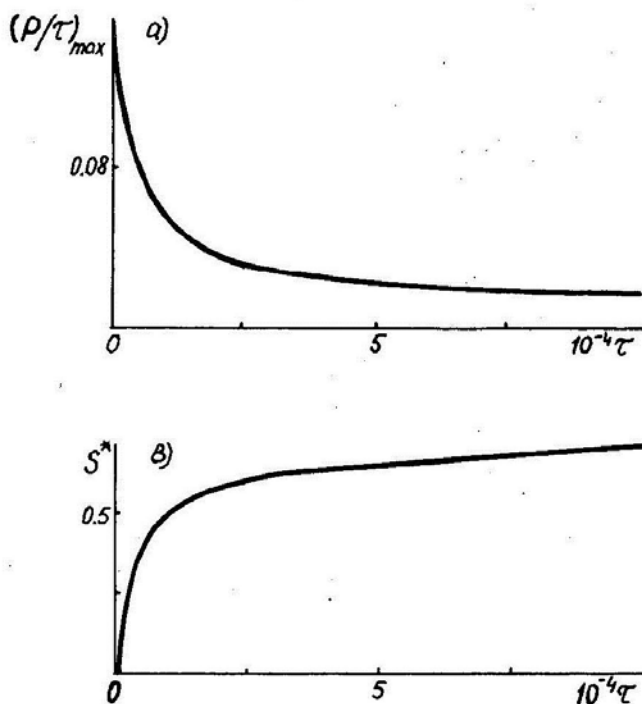


Рис. 4.13. Несущая способность оболочки (а) и параметр глубины погружения (б) при изменении переменной части гидростатического давления τ .

На рис. 4.13 приведены зависимости максимальных значений P/τ от τ в пределах $0 < \tau \leq 10^4$. Там же дается зависимость длины дуги несмоченной поверхности оболочки $s^*(\tau)$, соответствующей $(P/\tau)_{\max}$. Отметим, что все приведенные результаты справедливы для случаев, когда можно пренебречь собственным весом оболочки.

§ 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГОЙ ПАНЕЛИ ПОД СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

Рассматривается устойчивость удлиненной пологой цилиндрической панели, несущей жидкость со свободной поверхностью (рис. 4.14). Предполагается, что конструкция может иметь направленное вверх ускорение с коэффициентом перегрузки n . Все стенки считаются абсолютно жесткими. Массовые силы самой оболочки не учитываются. Изложим результаты работы [3].

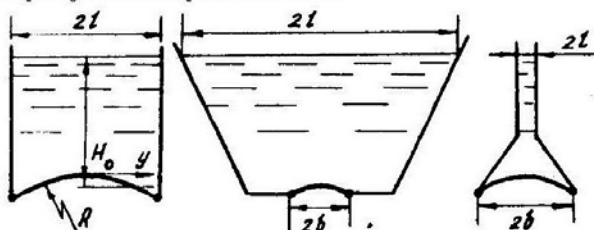


Рис. 4.14. Емкости с разными отношениями размеров упругой панели и поверхности жидкости.

Давление на пологую панель до ее деформации будет равно $n\gamma[H_0 - (b^2 - 2x^2)/(4R)]$, где γ — удельный вес жидкости. Обозначения приведены на рис. 4.14. При прогибе панели на величину w свободная поверхность жидкости опускается на величину $\sim (1/2l) \int_{-b}^b w dx$. Следовательно, давление на деформированную панель равно

$$p = n\gamma \left[H_0 - \frac{b^2 - 2x^2}{4R} + w - \frac{1}{2l} \int_{-b}^b w dx \right] \quad (4.1)$$

Если ширина свободной поверхности $2l$ намного больше пролета панели $2b$, то последний член в (4.1) может быть опущен. Наоборот, если свободная поверхность находится на уровне узкого сечения (рис. 4.14) (и толщина слоя H_0 значительна), то в (4.1) можно оставить только первый и последний члены.

Нелинейные уравнения изгиба пологой удлиненной цилиндрической панели имеют вид [4-6, 10]

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{N}{D} \left(\frac{1}{R} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = \frac{p}{D}, \quad (4.2)$$

$$\frac{N}{K} = \frac{du}{dx} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \quad \left[K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \right], \quad (4.3)$$

где N — постоянное вдоль дуги мембранное усилие. Давление над поверхностью жидкости и под панелью равны между собой.

Функцию прогиба в случае шарнирного закрепления краев панели ($w = d^2 w/dx^2 = u = 0$ при $x = \pm b$) примем

$$w = W_1 \cos \frac{\pi x}{2b} + W_3 \cos \frac{3\pi x}{2b} + W_2 \sin \frac{2\pi x}{2b} \quad (4.4)$$

Проинтегрируем (4.3) один раз с учетом (4.4). Удовлетворяя условиям $u = 0$ ($x = \pm b$), находим

$$\frac{2\pi}{k^2} \mu^2 = 3f_1 - f_3 - \frac{3\pi^3}{32} (f_1^2 + 9f_3^2 + 4f_2^2), \quad (4.5)$$

где введены обозначения безразмерных параметров кривизны, мембранного усилия и относительного прогиба

$$k = \frac{4b^2}{Rh}, \quad \mu^2 = -\frac{Nb^2}{D}, \quad f_1 = \frac{RW_1}{b^2}, \quad f_2 = \frac{RW_2}{b^2}, \quad f_3 = \frac{RW_3}{b^2}, \quad (4.6)$$

Интегрирование уравнений (4.2) и (4.1) производим по методу Бубнова-Галеркина (в (4.1) принято $l=b$)

$$\left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \mu^2 - g \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \right] \frac{\pi}{4} f_1 - \frac{2g}{3\pi} f_3 = q_0 + g \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{\pi^2} \right) - \mu^2, \quad (4.7)$$

$$\frac{2g}{\pi} f_1 - \left[\left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 - \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 \mu^2 - g \left(1 - \frac{8}{9\pi^2} \right) \right] \frac{3\pi}{4} f_3 = q_0 + g \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9\pi^2} \right) - \mu^2, \quad (4.8)$$

$$(\pi^4 - \pi^2 \mu^2 - g) f_2 = 0 \quad (4.9)$$

Здесь обозначено

$$g = \frac{n\gamma b^4}{D}, \quad q_0 = \frac{4n\gamma H_0 b^2}{kh D} \quad (4.10)$$

Из уравнения (4.9) имеем

$$1) f_2 = 0, \quad \pi^4 - \pi^2 \mu^2 - g \neq 0, \quad (4.11)$$

$$2) f_2 \neq 0, \quad \pi^4 - \pi^2 \mu^2 - g = 0 \quad (4.12)$$

Первый случай соответствует симметричному относительно середины панели изгибу; при этом f_1 и f_3 определяются из (4.7) и (4.8) в зависимости от q_0 , g и параметра μ .

Корни μ находятся из соотношения (4.5), в котором $f_2 = 0$, а f_1 и f_3 исключаются с помощью указанных выше выражений. В частности, если пренебречь влиянием начальной кривизны и изгиба панели на изменение давления (4.1), то положив в (4.7) и (4.8) $g = 0$, приходим к хорошо изученной задаче о потере устойчивости по симметричной форме под "мертвой" нагрузкой [5,10] (предельный случай для $g/q_0 = b^2/H_0 R \ll 1$).

Потеря устойчивости по симметричной форме может происходить только у весьма пологих оболочек, когда параметр кривизны $k \leq 9.04$ (это соответствует стреле подъема, почти равной толщине панели). Далее будет показано, что в нашей задаче эта величина может быть еще меньше. Поэтому влияние начальной кривизны и прогиба на давление (4.1) в этом случае будет мало. Оно может быть значительным только при больших значениях параметра g и малой толщине слоя жидкости H_0 (или q_0).

В связи с этим рассмотрим лишь несимметричную относительно середины пролета потерю устойчивости, которой соответствует соотношение (4.12). Из него находим

$$\mu^2 = \pi^2 \left(1 - \frac{g}{\pi^4} \right) \quad (4.13)$$

Таким образом, в отличие от известного случая нагружения давлением постоянной интенсивности ($\mu^2 = \pi^2$), потеря устойчивости панели, несущей жидкость, происходит при меньшем мембранном усилии. С учетом (4.13) из (4.7) и (4.8) будем иметь

$$f_1 = \frac{\left[\left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 + \left(\frac{9}{4} + \frac{8}{5\pi^2} \right) g \right] \left[\pi^2 - q_0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{\pi^2} \right) g \right] - \frac{8g}{5\pi^2} \left[\pi^2 - q_0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{9\pi^2} \right) g \right]}{\frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 + \left(\frac{9}{4} + \frac{8}{5\pi^2} \right) g \right] \left[3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 + \left(\frac{3}{4} - \frac{8}{\pi^2} \right) g \right] + \frac{16g^2}{5\pi^3}} \quad (4.14)$$

$$f_3 = \frac{\left[\frac{9}{5} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 + \left(\frac{9}{20} - \frac{24}{5\pi^2} \right) g \right] \left[\pi^2 - q_0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{9\pi^2} \right) g \right] + \frac{24g}{5\pi^2} \left[\pi^2 - q_0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{\pi^2} \right) g \right]}{\frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 + \left(\frac{9}{4} + \frac{8}{5\pi^2} \right) g \right] \left[3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 + \left(\frac{3}{4} - \frac{8}{\pi^2} \right) g \right] + \frac{16g^2}{5\pi^3}} \quad (4.15)$$

По известным f_1 и f_3 , а также μ^2 , значение f_2 находим из (4.5)

$$f_2 = \pm \left[-\frac{16}{3k^2} \left(1 - \frac{g}{\pi^4} \right) + \frac{8}{3\pi^3} (3f_1 - f_3) - \frac{1}{4} (f_1^2 + 9f_3^2) \right]^{1/2} \quad (4.16)$$

Здесь знаки $\pm$ указывают на равную возможность выпучиваться по несимметричной форме с поднятием правой или левой половин панели.

Прежде чем приступить к анализу выражений (4.14)–(4.16), рассмотрим потерю устойчивости панели под неизменной нагрузкой $q_0 = 4gH_0/(kh)$. Это необходимо для сравнения результатов в двух постановках задач. Кроме того, амплитуды прогиба по несимметричной форме в работах [4–6, 10] не определены.

Положив в (4.14)–(4.15) $g = 0$, находим

$$f_1 = \frac{64}{3\pi^5} (\pi^2 - q_0), \quad f_3 = \frac{64}{135\pi^5} (\pi^2 - q_0), \quad \frac{f_3}{f_1} = \frac{1}{45} \quad (4.17)$$

Ввиду малости отношения f_3/f_1 в (4.16) не будем учитывать квадрат величины f_3 . Подставим (4.17) в (4.16) ($g = 0$):

$$f_2 = \pm 4 \left[-\frac{1}{3k^2} + \frac{32}{3\pi^8} \frac{134}{135} (\pi^2 - q_0) - \frac{64}{9\pi^{10}} (\pi^2 - q_0)^2 \right]^{1/2} \quad (4.18)$$

Если в (4.16) не учитывать член f_3 , то в (4.18) вместо отношения $134/135$ будет фигурировать единица.

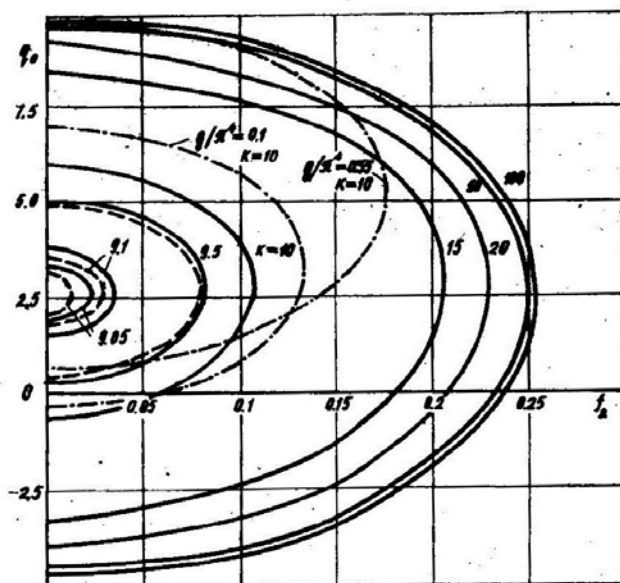


Рис. 4.15. Зависимость нагружение - прогиб по несимметричной форме цилиндрической панели.

Из условия равенства нулю подкоренного выражения (4.18) можно найти верхнее и нижнее критические значения давления

$$q_0^{(+,-)} = \pi^2 - \frac{134}{135} \frac{3\pi^2}{4} \left\{ 1 \mp \left[1 - \left(\frac{135}{134} \right)^2 \frac{\pi^6}{12k^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (4.19)$$

Отсюда следует, что потеря устойчивости по несимметричной форме возможна при параметре кривизны $k = \frac{134}{135} \cdot \frac{\pi^3}{\sqrt{12}} \approx 9.04$.

График функции (4.18) показан на рис. 4.15 (сплошные линии). Видно, что с увеличением параметра кривизны k возрастают и амплитуды несимметричной составляющей прогиба. На оси ординат располагаются верхнее и нижнее значения критического безразмерного давления q_0 .

В случае $g = 0$ может быть найдено и точное решение уравнений (4.1), (4.2) [5]. Решение (4.2) имеет вид

$$f = A \cos \mu \xi + B \sin \mu \xi + C \xi + D + \frac{1}{2} \left(\frac{q_0}{\mu^2} - 1 \right) \xi^2 \quad (4.20)$$

Здесь обозначено $f = wR/b^2$, $\xi = x/b$. Выражение для q_0 дано в (4.10).

Удовлетворяя (4.20) условиям неподвижного шарнирного опирания краев панели, находим

$$A = \frac{1}{\mu^2 \cos \mu} \left(\frac{q_0}{\mu^2} - 1 \right), \quad C = 0, \quad D = - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mu^2} \right) \left(\frac{q_0}{\mu^2} - 1 \right), \quad (4.21)$$

$$B \sin \mu = 0 \quad (4.22)$$

и, кроме того, уравнения для определения параметра μ .

Рассмотрим изгиб по несимметричной форме. Положив в (4.22) $B \neq 0$, $\sin \mu = 0$, получаем наименьшее ненулевое значение параметра мембранного усилия равным $\mu = \pi$, что совпадает со значением (4.13) ($g = 0$), найденным по методу Бубнова-Галеркина. Из граничного условия находим

$$B = \pm \frac{4}{\pi^2} \left[-\frac{\pi^4}{3k^2} + \frac{1}{4\pi^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \right) (\pi^2 - q_0) - \frac{1}{16\pi^4} \left(5 + \frac{2\pi^2}{3} \right) (\pi^2 - q_0)^2 \right]^{1/2} \quad (4.23)$$

Согласно (4.20), (4.21), (4.23) имеем

$$f = \left(1 - \frac{q_0}{\pi^2} \right) \left(\frac{1}{\pi^2} \cos \pi \xi - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2} \right) + B \sin \pi \xi \quad (4.24)$$

Здесь первый член соответствует общей деформации панели по симметричной форме, а второй — несимметричной составляющей. Поскольку корень μ независимо от параметров нагрузки q_0 и кривизны k получается равным π , то симметричная составляющая прогиба (4.24) является линейной функцией q_0 .

Верхнее и нижнее значения критической нагрузки получаем, положив равным нулю подкоренное выражение (4.23)

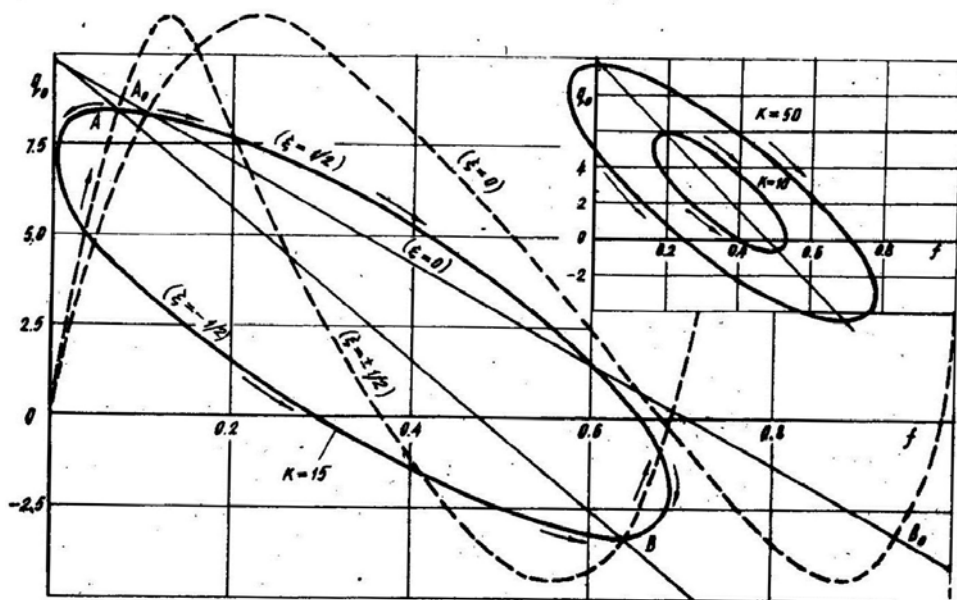


Рис. 4.16. Зависимость нагрузка - прогиб точек середины ($\xi=0$), одной четверти ($\xi=\pm 1/2$) пролета цилиндрической панели при разных кривизнах.

$$q_0 = \frac{9\pi^2}{15+2\pi^2} \pm \pi^2 \sqrt{\left(\frac{6+2\pi^2}{15+2\pi^2} \right)^2 - \frac{16\pi^4}{(15+2\pi^2)k}}$$

При

$$k > \frac{2\pi^2(15+2\pi^2)^{1/2}}{3+\pi^2} \approx 9.04$$

получаются вещественные значения q_0 .

Результаты по формулам (4.24), (4.23) даны на рис.4.15 штриховыми линиями (f_2 - амплитуда несимметричной формы в решении по методу Вубнова-Галеркина, B - эта же величина в точном решении). Заметная разница между ними наблюдается только при

малых k . Уже при $k = 10$ кривые практически сливаются.

На рис. 4.16 приводится зависимость между параметром давления q_0 и параметром прогиба $f = f_1 + f_3$ вершины панели ($\xi=0$) по формулам (4.17). При постепенном нагружении изображающая точка идет по кривой OA_0 симметричной формы прогиба. После достижения точки A_0 движение происходит по прямой A_0B_0 , построенной по (4.17), и далее вверх по кривой симметричного прогиба. Здесь же для $k=15$ дана зависимость между q_0 и параметром $f=0.707(f_1-f_3)+f_2$ для участков на четверти пролета ($\xi = \pm 1/2$). Движение происходит по кривой OA , после чего участок $\xi = +1/2$ идет по эллипсовидной кривой вправо, а участок $\xi = -1/2$ - влево (как указано стрелками). При достижении точки B перемещения обоих участков становятся одинаковыми.

В верхнем правом углу рис. 4.16 приведены зависимости q_0 и $f=0.707(f_1-f_3)+f_2$ для $k=10$ и $k=50$. При больших параметрах кривизны один из участков ($\xi = \pm 1/2$) в начале потери устойчивости получает отрицательное перемещение.

Возвратимся к рассмотрению случая $g \neq 0$. Отношение $\psi = f_3/f_1$ при $g/\pi^4 = 0; 0.1; 0.352$ изображено на рис. 4.17. До $q_0 = 6$ оно не сильно отличается от $1/45$ ($g = 0$).

Поскольку в (4.16) член f_3 носит только поправочный характер, подставляем вместо него $f_3 = f_1/45$:

$$f_2 = \pm \left[-\frac{16}{3k^2} \left(1 - \frac{g}{\pi^4} \right) + \frac{1072}{135\pi^3} f_1 - \frac{1}{4} f_1^2 \right]^{1/2} \quad (4.25)$$

Амплитуды f_2 и f_1 будут вещественны при условии

$$\left(\frac{536}{135\pi^3} \right)^2 - \frac{4}{3k^2} \left(1 - \frac{g}{\pi^4} \right) \geq 0,$$

откуда

$$k \geq \frac{135}{134} \frac{\pi^3}{\sqrt{12}} \left(1 - \frac{g}{\pi^4} \right)^{1/2} \approx 9.04 \left(1 - \frac{g}{\pi^4} \right)^{1/2} \quad (4.26)$$

Таким образом, если потеря устойчивости по несимметричной форме при постоянном давлении появляется при $k = 9.04$, то под слоем жидкости — при меньшем параметре кривизны (4.26). Согласно (4.10) при $\nu = 0.3$

$$g/\pi^4 = 0.11n\gamma b^4/(Eh^3)$$

Если, например, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\gamma = 10^{-3} \text{ кг/см}^3$, $b/h = 400$, $b = 20 \text{ см}$, $n = 20$, то $g/\pi^4 = 0.352$, и минимальное значение параметра кривизны, при котором возможна потеря устойчивости по несимметричной форме, будет равно $k = 7.25$.

На рис. 4.15 для $k = 10$ при $g/\pi^4 = 0.1$; 0.352 штрих-пунктиром нанесены зависимости между q_0 и f_2 согласно уравнениям (4.25), (4.14), которые значительно отличаются от кривой для $k = 10$, $g = 0$. Более подробный график $f_2 = f_2(q_0, g, k)$ дан на рис. 4.18.

В случае, когда в (4.1) можно не учитывать последний член ($l \gg b$), вместо уравнений (4.7), (4.8) будем иметь

$$\left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \mu^2 - g \right] \frac{\pi}{4} f_1 = -\mu^2 + q_0 + g \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{\pi^2} \right), \quad (4.27)$$

$$\left[\left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 - \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 \mu^2 - g \right] \frac{3\pi}{4} f_3 = \mu^2 - q_0 - g \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9\pi^2} \right)$$

Уравнение (4.5) остается без изменения. Из (4.27) при $\mu = \pi$ имеем

$$\frac{f_1}{f_3} = \frac{64}{3\pi} \frac{\pi^2 - q_0 - g(1/4 - 3/\pi^2)}{\pi^4 + 4g}, \quad (4.28)$$

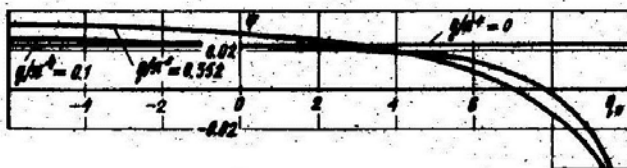


Рис. 4.17. Зависимость отношения амплитуд прогибов $\psi = f_3/f_1$ от параметров нагружения цилиндрической панели.

$$f_3 = \frac{64}{135\pi} \frac{\pi^2 - q_0 - g(1/4 + 5/9\pi^2)}{\pi^4 + 4g/81}, \quad (4.29)$$

Если ограничиться приближенной связью $f_3/f_1 \approx 1/45$, то из выражения (4.25)

$$f_2 = \pm 4 \left\{ -\frac{1-g/\pi^4}{3k^2} + \frac{134}{135} \frac{32}{3\pi^4} \frac{\pi^2 - q_0 + g(3/\pi^2 - 1/4)}{\pi^4 + 4g} - \frac{64}{9\pi^2} \frac{[\pi^2 - q_0 + g(3/\pi^2 - 1/4)]^2}{(\pi^4 + 4g)^2} \right\}^{1/2} \quad (4.30)$$

Верхнее и нижнее критические значения q_0 определяются по формуле

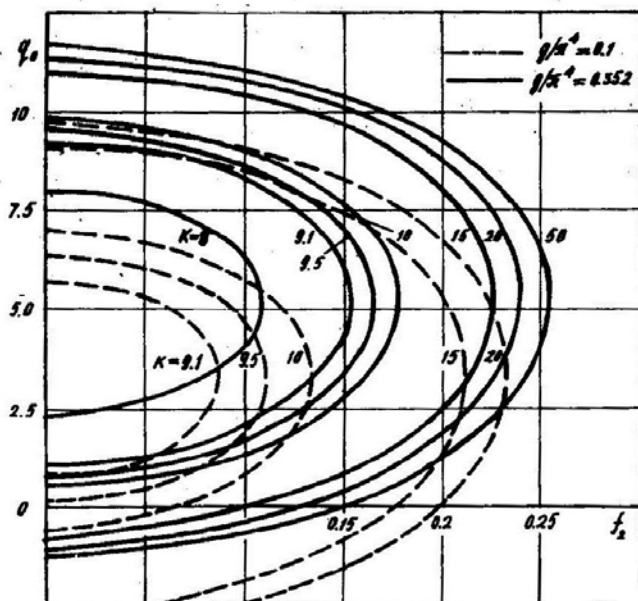


Рис. 4.18. Зависимость нагрузка - прогиб панели по несимметричной форме при разных кривизнах.

$$q_0^{(+,-)} = \pi^2 + g \left(\frac{3}{\pi^2} - \frac{1}{4} \right) -$$

$$- (\pi^4 + 4g) \frac{134}{135} \frac{3}{4\pi^2} \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{135}{134} \right)^2 \frac{\pi^6}{12k^2} \left(1 - \frac{g}{\pi^4} \right) \right]^{1/2} \right\}$$

Отсюда можно получить соотношение (4.19). Таким образом, критическое значение параметра кривизны остается таким же, что для (4.19).

§ 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, НАГРУЖЕННОЙ ДАВЛЕНИЕМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается устойчивость удлиненной пологой цилиндрической панели под действием давления с ее выпуклой стороны. Невесомая жидкость находится в герметически закрытой полости с жесткими стенками и может быть как сжимаемой, так и несжимаемой (рис. 4.19). Давление в полости создается медленной подачей жидкости, причем предполагается, что в процессе выпучивания панели, происходящей быстро, количество жидкости в ней не изменяется (подача прекращается) [2].

Обозначим через p_0 , V_0 и M_0 давление, объем и массу жидкости в ненапряженном состоянии панели, а через m^* , v^* , p^* — массу дополнительно поданной в полость жидкости к моменту начала выпучивания панели и соответствующие изменения объема полости и давления в ней.

Пусть давление p в полости в процессе всего нагружения изме-

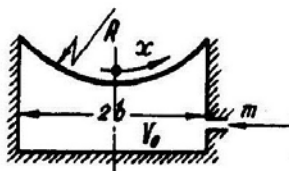


Рис. 4.19. Схема испытания цилиндрической панели на устойчивость.

няется по закону адиабаты. Тогда в соответствии с (0.8) из введения имеем

$$p = p_0 \left[\frac{1+m/M_0}{1+v/V_0} \right]^\kappa \quad \begin{array}{l} \text{при } 0 \leq m \leq m^*, \quad 0 \leq v \leq v^*, \quad p_0 \leq p \leq p^*; \\ \text{при } m = m^* + 0, \quad v > v^*, \quad p < p^* \end{array} \quad (5.1)$$

Таким образом, в данной задаче вместо перепада давления на панель регулирующим параметром может служить масса подаваемой в полость жидкости m .

Учитывая, что для пологой панели

$$v \propto \int_{-b}^b w dx,$$

где $2b$ — ширина, w — перемещение по нормали к срединной поверхности, (5.1) представим с точностью до членов третьего порядка

$$p = p_m - \frac{\kappa p_m}{V_0} \int_{-b}^b w dx \left[1 - \frac{\kappa+1}{2V_0} \int_{-b}^b w dx + \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{6V_0^2} \left(\int_{-b}^b w dx \right)^2 \right], \quad (5.2)$$

$$p_m = p_0 \left(1 + \frac{m}{M_0} \right)^\kappa$$

В уравнениях, описывающих изгиб пологой цилиндрической панели (4.2), (4.3), принимается, что внешнее давление равно давлению в жидкости до деформации панели p_0 . При сжатии мембранное усилие N берется со знаком минус.

Перейдем к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad f = \frac{R w}{b^2}, \quad q_m = \frac{p_m R b^2}{D}, \quad q_0 = \frac{p_0 R b^2}{D},$$

$$u_0 = \frac{R V_0}{b^3}, \quad k = \frac{4b^2}{R h}, \quad \mu^2 = - \frac{N b^2}{D} \quad (5.3)$$

В случае шарнирного закрепления для f принимаем функцию

(4.4), удовлетворяющую условиям $w = d^2w/d\xi^2 = 0$ при $\xi = \pm 1$. Подставляя эту функцию f в (4.3) и удовлетворяя условиям $u = 0$ при $\xi = \pm 1$, будем иметь

$$\frac{2\pi}{k^2} \mu^2 = 3f_1 - f_3 - \frac{3\pi^3}{32} \left(f_1^2 + 9f_3^2 + 4f_2^2 \right) \quad (5.4)$$

Производя интегрирование (4.2), (5.2) по методу Бубнова-Галеркина, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \mu^2 \right] f_1 + \mu^2 &= q - q_0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 \left[\left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 - \mu^2 \right] f_3 + \mu^2 &= q - q_0, \\ (\pi^2 - \mu^2) f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned} q - q_0 &= q_m - q_0 - t_1 q_m \left(f_1 - \frac{1}{3} f_3 \right) + \\ &+ t_2 q_m \left(f_1 - \frac{1}{3} f_3 \right)^2 - t_3 q_m \left(f_1 - \frac{1}{3} f_3 \right)^3 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{4\kappa}{\pi u_0}, \quad t_2 = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{\kappa_2}{u_0^2}, \quad t_3 = \left(\frac{4}{\pi} \right)^3 \frac{\kappa_3}{u_0^3}, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{2} \kappa(\kappa+1), \quad \kappa_3 = \frac{1}{6} \kappa(\kappa+1)(\kappa+2) \end{aligned}$$

При произвольно изменяющейся плавной функции $q - q_0$ и $f_2 = 0$, $\mu \neq \pi$ приходим к задаче об изгибе и устойчивости панели по симметричной форме. Для безразмерной кривизны $k = 8$ решение соответствующей задачи представлено на рис. 4.20. Кривая 1 построена в координатах $q - q_0$ и $f = f_1 + f_3$ (безразмерный прогиб центра панели).

Изменение давления $q - q_0$ подчиняется уравнению (5.6). При

подаче жидкости массы m давление $q - q_0$ на абсолютно жесткую панель возрастает от нуля до значения

$$q_m - q_0 = \frac{Rb^2}{D} \left[p_0 \left(1 + \frac{m}{M_0} \right)^K - p_0 \right] \quad (5.7)$$

При этом манометрическое (избыточное) давление $q - q_0$ в полости с деформируемой панелью возрастает согласно формуле (5.6). Изображающая точка движется по кривой OA . Когда давление достигает верхнего значения критической нагрузки $(q - q_0)^*$, будем иметь

$$q_m^* = \frac{(q - q_0)^* + q_0}{1 - t_1 \left(f_1^* - \frac{1}{3} f_3^* \right) + t_2 \left(f_1^* - \frac{1}{3} f_3^* \right)^2 - t_3 \left(f_1^* - \frac{1}{3} f_3^* \right)^3} \quad (5.8)$$

Это предельное значение q_m^* , после чего оно не меняется (подача пренебрежимо мала за время хлопка панели). Соответствующее значение m^* может быть найдено подстановкой (5.8) в (5.7). По известному параметру q_m^* зависимость нагрузка - прогиб строится по формуле (5.6).

Желая строить эту зависимость приближенно, оценим отношение f_3/f_1 , вытекающее из первых двух уравнений (5.5),

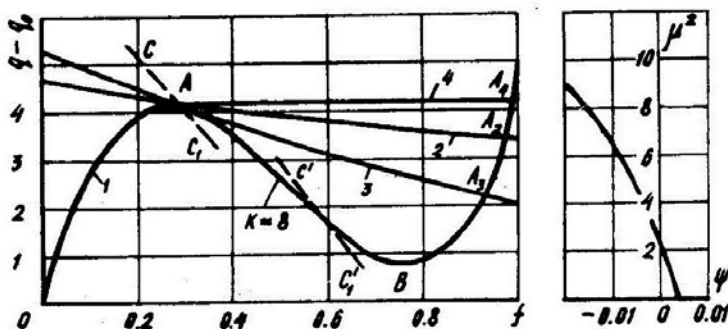


Рис. 4.20. Зависимость нагрузка - прогиб средней точки пролета и изменение отношения форм прогиба при изменении параметра сжатия панели.

$$\psi = \frac{f_3}{f_1} = \frac{1}{27} \frac{2.48 - \mu^2}{2.22 - \mu^2} \quad (5.9)$$

На рис. 4.20 справа дано изображение (5.9). Предельное значение μ равно π . Поэтому кривая для $\mu > \pi$ не строилась. Для $k = 8$ предельное значение $\mu^2 \approx 7.5$. В интервале $0 \leq \mu^2 \leq 7.5$ наибольшее отношение $\psi = f_3/f_1$ по модулю равно 0.013. Поэтому в формулах (5.8) и (5.6) члены, содержащие f_3 , f_3^* отбрасываем. Кроме того, ввиду сравнительной малости f_1^* (как видно из рис. 4.20, для $k = 8$ $f_1^* \approx 0.28$) в (5.8) ограничиваемся членами в степени, не выше второй. Итак, будем иметь ($f \approx f_1$)

$$q - q_0 = q_m^* - q_0 - t_1 q_m^* f + t_2 q_m^* f^2 - t_3 q_m^* f^3, \quad (5.10)$$

где

$$q_m^* = \frac{(q - q_0)^* + q_0}{1 - t_1 f^* + t_2 f^{*2}} \quad (5.11)$$

Эти упрощения справедливы в случае сжимаемых жидкостей.

Пример. Если $k = 4b^2/(Rh) = 8$, $h/b = 1/25$, $V_0 = b^2/2$, $p_0 = 1$ кг/см², $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu = 0.3$, $\kappa = 1.4$, то $b/R = 8h/4b = 0.08$, $h/R = 0.0032$, $u_0 = 6.25$, $q_0 = p_0 R b^2/D = 10.9(p_0 R/Eh)(b/h)^2 = 1.06$, $\kappa_2 = 1.68$, $\kappa_3 = 1.9$, $t_1 = 0.285$, $t_2 = 0.070$, $t_3 = 0.016$.

Из приведенных в книге [4] таблиц находим $(q - q_0)^* = 4.16$, $f^* = 0.285$. При этом по (5.11) $q_m^* = 5.69$. Уравнение (5.10) дает кривую 2 на рис. 4.20. Следовательно, изображающая точка будет двигаться по кривой ОАА₂. После достижения точки А₂ увеличения прогиба можно добиться только путем дополнительной подкачки жидкости. На оси ординат откладываются точки $q_m^* - q_0$.

Если $\kappa = 7$, $V_0 = b^2$, а остальные параметры остаются теми же, то $\kappa_2 = 28$, $\kappa_3 = 84$, $u_0 = 12.5$, $q_m^* = 6.36$. Получаем кривую 3.

При уменьшении объема полости (или увеличении κ) изменение нагрузки по f приближается к кривой АВ, и процесс потери устойчивости является спокойным (без хлопка). При дальнейшем уменьшении объема V_0 наклон кривой давления СС₁ может быть более

крутым, чем кривой AB . Панель медленно проседает только при дополнительной подкачке ($C'C_1'$). В этом случае трудно экспериментально установить верхнее значение критической нагрузки. Прекращая подачу, можно останавливать процесс деформации в любом промежуточном положении.

И, наконец, когда в большом объеме полости находится хорошо сжимаемая жидкость (например, в ней имеется большое объемное содержание пузырьков), деформация происходит по пути OAA_4 . При этом наблюдается наибольший эффект хлопка панели.

Рассмотрим несимметричную форму потери устойчивости (в уравнениях (5.4), (5.5) $\mu=\pi$, $f_2 \neq 0$). Как было показано в предыдущем параграфе, решение имеет вид

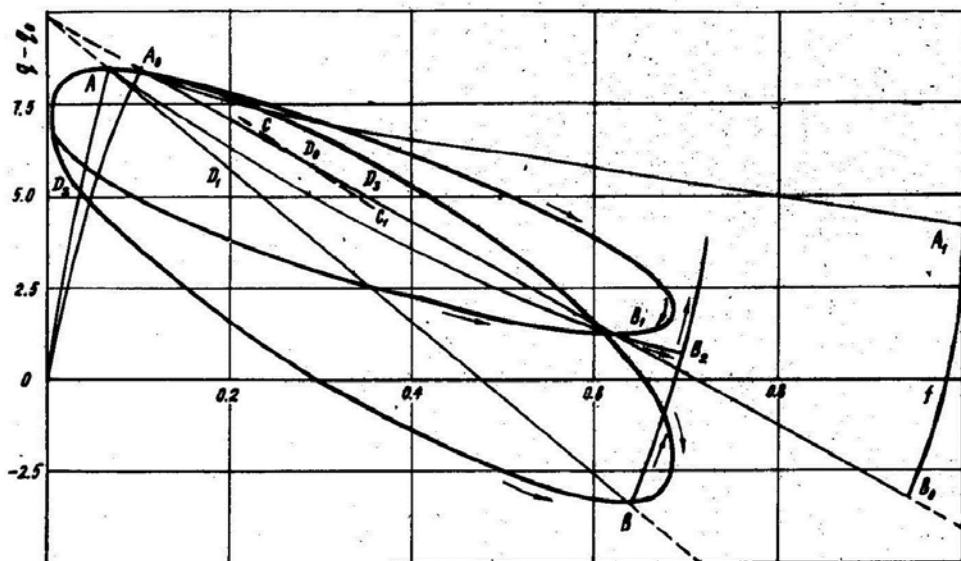


Рис. 4.21. Зависимость нагрузка - прогиб панели.

$$f_1 = \frac{64}{3\pi^5} \left[\pi^2 - (q - q_0) \right], \quad f_3 = \frac{64}{135\pi^5} \left[\pi^2 - (q - q_0) \right],$$

$$f_3/f_1 = 1/45, \quad (5.12)$$

$$f_2 = \pm 4 \left[-\frac{1}{3k^2} + \frac{32}{3\pi^8} \frac{134}{135} \left(\pi^2 - q + q_0 \right) - \frac{64}{9\pi^{10}} \left(\pi^2 - q + q_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

На рис. 4.21 для безразмерной кривизны $k = 15$ указана зависимость между $q - q_0$ и прогибом центра $f = f_1 + f_3$ (OA_0B_0), а также точек на четверти длины пролета панели (движение по OA , затем по эллипсовидной кривой до B). Этот график взят из рис. 4.16.

Изменение давления $q - q_0$ при потере устойчивости согласно формулам (5.10) и (5.11) идет по A_0A_1 (для центра) и по эллипсовидной кривой от A до B_1 , затем до B_2 (для точек на четверти пролета). Движение вверх от точки B_2 происходит только при дополнительной подаче жидкости. Кривая $A_0B_1B_2$ соответствует следующим данным: $k = 15$, $h/b = 1/25$, $b/R = 0.15$, $h/R = 0.006$, $q_0 = 0.567$, $(q - q_0)^* = 8.4$, $f^* = 0.1$, $\kappa = 7$, $u_0 = 12.5$, $q_{\square}^* = 9.62$.

В случае больших отношений $\kappa k/u_0$ в разложении (5.2) в ряд необходимо брать большее число членов.

Так же, как в случае симметричной деформации, потери устойчивости не наблюдается, если наклон кривой в точке A_0 по формуле (5.10) больше, чем наклон прямой A_0B_0 . При дополнительной подаче жидкости панель медленно проседает и пересечение указанных кривых происходит, например, в D (кривая CC_1). При этом среднее перемещение участков на четверти пролета определяется положением D_1 , а амплитуда прогиба по несимметричной форме равняется отрезкам D_1D_2 и D_1D_3 . Таким образом, после достижения давлением значения $(q - q_0)^*$ малая подача жидкости может приводить к малому прогибу по симметричной форме, но значительному прогибу по несимметричной форме.

Углы наклона по уравнениям (5.12) и (5.10) определяются формулами

$$\operatorname{tg} \varphi \propto \frac{3\pi^5}{64}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 \propto (t_1 - t_2 f^*)$$

По достижении давлением значения $(q - q_0)^*$ происходит выпучивание, если $\operatorname{tg} \varphi_1 < \operatorname{tg} \varphi$ или

$$t_1 - t_2 f^* < 3\pi^5 / (64 q_m^*) \quad (5.13)$$

С учетом (5.11) неравенству (5.13) можно придать вид

$$\frac{\kappa}{u_0} \left[1 - \frac{2(\kappa+1)}{\pi u_0} f^* \right] < \frac{3\pi^6}{256} \left[(q - q_0)^* + q_0 + \frac{3\pi^5}{64} f^* \right]^{-1} \quad (5.14)$$

Отсюда можно найти критическое значение $[\kappa/u_0]$, при превышении которого потеря устойчивости в смысле, указанном выше, не происходит. Для рассмотренного примера второй член в левой части (5.13) и (5.14) мал, и критический параметр определяется из следующей простой формулы

$$[\kappa/u_0] \approx 3\pi^6 / (256 q_m^*) \approx 1.17$$

Если нагружение осуществляется подачей в полость несжимаемой жидкости, то должно выполняться условие (4.5) главы III. При этом панель может выпучиваться по несимметричной форме, если жидкость подавать и после достижения точки A_0 на рис. 4.21. Выпучивание по симметричной форме не происходит.

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЕ. ЖЕСТКАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА, НАХОДЯЩАЯСЯ В ЖИДКОСТИ ИЛИ СОДЕРЖАЩАЯ ЖИДКОСТЬ

1. В § 3 этой главы были использованы разложения (3.5) для искомых функций. Здесь приводится решение для их первых членов. Оно определяет равновесие абсолютно жесткой цилиндрической оболочки, полностью или частично погруженной в жидкость (рис. 4.9). Постановка задачи и система обозначений приведены в § 3.

Указанное выше приближение не зависит от параметра изменения давления τ жидкости вдоль дуги цилиндра. Предполагается, что параметр равномерного давления $\mu \geq 0$.

В случае полного погружения цилиндра в жидкость решение имеет вид [1]

$$\theta_0 = \pi s, \quad x_0 = \frac{1}{\pi} \sin \pi s, \quad z_0 = \frac{1}{\pi} (1 - \cos \pi s)$$

$$u_0 = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi s - \frac{1}{4\pi^2} \sin 2\pi s - \frac{1}{2\pi} s,$$

$$t_0 = \frac{\mu}{\pi}, \quad \frac{P}{\tau} = \frac{1}{2\pi}$$

В случае частичного погружения цилиндра в жидкость решение имеет вид

$$\theta_0 = \pi s, \quad x_0 = \frac{1}{\pi} \sin \pi s, \quad z_0 = \frac{1}{\pi} (1 - \cos \pi s)$$

$$u_0 = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq s \leq s^* \\ \frac{\sin \pi s - \sin \pi s^*}{\pi^2} - \frac{\sin 2\pi s - \sin 2\pi s^*}{4\pi^2} - \frac{s - s^*}{2\pi} & \text{при } s^* < s \leq 1, \end{cases}$$

$$t_0 = 0$$

2. Длинная цилиндрическая оболочка, содержащая жидкость, покоится на жестком основании. Как и в предыдущем пункте, собственный вес оболочки предполагается малым по сравнению с весом содержащейся в ней жидкости и не учитывается. Может быть рассмотрено лишь одно поперечное сечение (или кольцо), как показано на рис. 4.22, а. Ввиду симметрии системы относительно вертикальной оси AC определяем силовые факторы в половине оболочки (рис. 4.22, б). Равновесие недеформированной оболочки является нулевым приближением в соответствующей задаче гидроупругости. Кроме того, определение кольцевых, перерезывающих сил и изгибающих моментов в недеформированном цилиндре представляет самостоятельный интерес в случае большой изгибной жесткости [7].

В точке A нет вертикальной силы, а в точке C она равна погонному весу жидкости $\pi \gamma R^2/2$. Сумма сил T_A и T_C равна общему

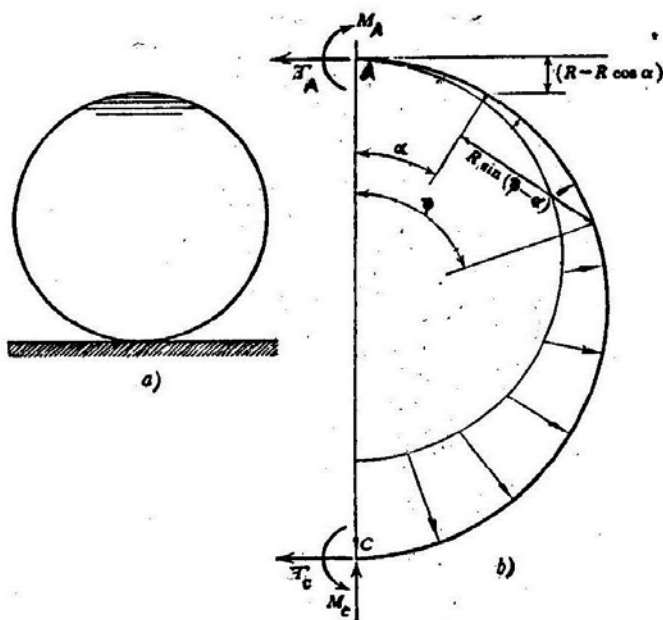


Рис. 4.22. Абсолютно жесткая цилиндрическая оболочка с жидкостью на горизонтальной поверхности (а) и система обозначений (б).

гидростатическому давлению по отрезку AC

$$T_A + T_C = 2\gamma R^2 \quad (6.1)$$

Центр тяжести площади полукруга отстоит от вертикали AC на расстояние $4R/(3\pi)$. Поэтому момент относительно точки C от веса жидкости равен $(2/3)\gamma R^3$. Момент от гидростатического давления равен $(4/3)\gamma R^3$. Из условия равенства нулю суммы моментов

$$M_A - 2T_A R - M_C + 2\gamma R^3 = 0 \quad (6.2)$$

Общий момент всех сил относительно точки оболочки с центральным углом φ равен

$$M = M_A - T_A R(1 - \cos\varphi) + \gamma R^3 \left[1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2} \sin\varphi \right] \quad (6.3)$$

С использованием (6.3) имеем

$$\int_0^{\pi} M d\varphi = \pi \left(M_A - T_A R + \frac{1}{2} \gamma R^3 \right) = 0, \quad (6.4)$$

$$\int_0^{\pi} M (1 - \cos\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \pi R \left(T_A - \frac{3}{4} \gamma R^2 \right) = 0$$

Отсюда получаем

$$T_A = \frac{3}{4} \gamma R^2, \quad M_A = \frac{1}{4} \gamma R^3 \quad (6.5)$$

Из (6.5), (6.1), (6.2) следует

$$T_C = \frac{5}{4} \gamma R^2, \quad M_C = -\frac{3}{4} \gamma R^3 \quad (6.6)$$

Таким образом, мембранное усилие и изгибающий момент в точке С больше, чем в верхней точке А, в 1.66 и в 3 раза.

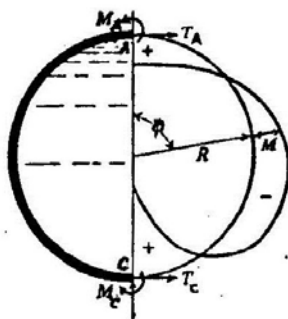


Рис. 4.23. Эпюра изгибающих моментов в цилиндрической оболочке, содержащей жидкость.

Подстановкой (6.5) в (6.3) определяем изменение изгибающего момента

$$M = \frac{1}{2} \gamma R^3 \left(1 - \frac{1}{2} \cos\varphi - \varphi \sin\varphi \right),$$

которое показано на рис. 4.23. В точке С имеет место максимальное напряжение

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\gamma R^2}{4h} \left(5 + 18 \frac{R}{h} \right),$$

где h — толщина оболочки. При обычных значениях размеров напряжение, вызванное мембранным усилием T_c (первый член), пренебрежимо мало по сравнению с напряжением от изгибающего момента.

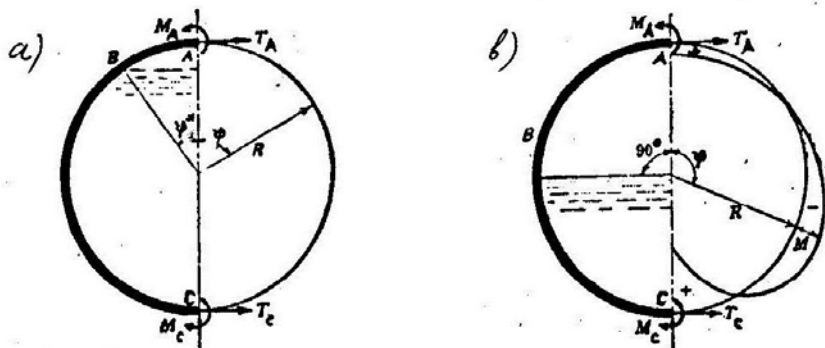


Рис. 4.24. Эпюра изгибающих моментов в цилиндрической оболочке, частично заполненной жидкостью.

Когда учитывается вес оболочки $2\pi R h \gamma_0$ наряду с весом жидкости $\pi R^2 \gamma$, изгибающий момент равняется

$$M = \left(\frac{1}{2} \gamma R^3 + \gamma_0 R^2 h \right) \left(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right)$$

Если оболочка частично заполнена жидкостью (рис. 4.24), то изгибающий момент равен [7]

$$M_{AB} = \frac{\gamma R^3}{\pi} \left[\frac{\pi - \varphi^*}{2} - (\pi - \varphi^*) \cos \varphi^* - \sin \varphi^* + \frac{1}{4} \sin 2\varphi^* + \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi^*}{2} + \frac{3}{8} \sin 2\varphi^* + \frac{\pi}{2} \cos^2 \varphi^* - \frac{\varphi^*}{4} \cos 2\varphi^* \right) \cos \varphi \right],$$

$$M_{BC} = M_{AB} + \frac{\gamma R^3}{\pi} \left[2\cos\varphi^* - \cos\varphi^* \cos(\varphi - \varphi^*) - (\varphi - \varphi^*) \sin\varphi - \cos\varphi \right]$$

Когда оболочка заполнена жидкостью наполовину ($\varphi^* = \pi/2$), имеем

$$M_{AB} = \frac{\gamma R^3}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{8} \cos\varphi \right],$$

$$M_{BC} = \frac{\gamma R^3}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - 1 - \frac{3\pi}{8} \cos\varphi + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin\varphi \right]$$

Распределение изгибающего момента в этом случае показано на рис. 4.24, б. Максимальный изгибающий момент (при $\varphi = \pi$) в 2.45 раза меньше, чем в случае полного заполнения оболочки жидкостью.

ГЛАВА V

РАВНОВЕСИЕ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ. ЕМКОСТИ

§ 1. ДЛИННАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА, СОДЕРЖАЩАЯ ЖИДКОСТЬ

Ввиду допущения о большой длине цилиндра можно рассматривать только одно его сечение и вместо оболочки говорить о нити. Собственным весом последней пренебрегаем. Итак, абсолютно гибкая нерастяжимая замкнутая нить длиной L находится на твердой поверхности только под действием гидростатического давления внутренней жидкости (рис. 5.1). Начало координат x, z удобнее взять в вершине нити. Необходимые обозначения указаны на рис. 5.1.

Отметим, что выполнены исследования (например, в [9,10]) формоизменения мягких оболочек с учетом их деформаций, в том числе больших деформаций. Однако всюду в этой главе оболочка считается нерастяжимой.

Как было показано в § 4 главы II, деформированная форма мембраны существенно зависит от соотношения постоянной p_0 и переменной γH частей гидростатического давления. Аналогично обстоит дело с формой мягких и гибких емкостей для хранения и перевозки жидкостей. В данном идеализированном примере (рис. 5.1) форма нити, высота водяного столба H_u в гибком патрубке (через который подается жидкость) и высота H взаимосвязаны. При $H_u/H \gg 1$ постоянная часть гидростатического давления в емкости будет преобладающей, нить стремится принять форму окружности с небольшим участком прилегания к твердой поверхности $2a$. При $H_u/H \ll 1$ образуется пологая форма с большим участком прилегания.

В данном параграфе рассматривается равновесие пологой системы нить-жидкость. Поэтому полагается $H_u = 0$. Это допущение позволя-

ет принять, что в вершине кривой Γ кривизна ее равна нулю.

В этом случае, как это следует из предыдущих глав, $p_0 = \gamma z$ и уравнение равновесия можно записать в виде

$$T\tilde{k} = \gamma z, \quad (1.1)$$

где T , $\tilde{k}$ — натяжение и кривизна нити, γ — удельный вес жидкости.

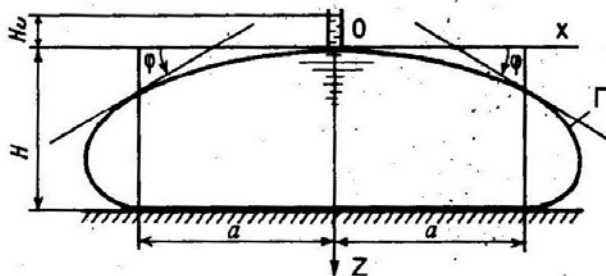


Рис. 5.1. Длинная цилиндрическая мягкая оболочка, содержащая жидкость, на горизонтальной поверхности.

Как известно из предыдущей главы, между dx , dz , ds и углом φ между касательной к кривой Γ и осью x имеются соотношения

$$dx = \cos\varphi ds, \quad dz = \sin\varphi ds, \quad d\varphi = \tilde{k} ds \quad (1.2)$$

Дифференцируя (1.1) по φ с учетом (1.2) и постоянства T и γ , находим

$$\tilde{k} \frac{d\tilde{k}}{d\varphi} = \frac{\gamma}{T} \sin\varphi$$

Интегрирование по φ дает $\tilde{k}^2 = 2(C - \cos\varphi)\gamma/T$, где C — постоянная.

Дальнейшее изложение задачи дается, следуя работе [1]. В ней принимается, что при $\varphi = 0$ кривизна $\tilde{k} = 0$, и вводится для удобства новый угол $\theta = \varphi/2$.

Тогда $C = 1$ и $\tilde{k} = 2\sqrt{\gamma/T} \sin\theta$. Сопоставление с уравнением (1.1) дает

$$z = 2\sqrt{T/\gamma} \sin\theta \quad (1.3)$$

Положив здесь $\theta = \pi/2$, получаем значение высоты, на которую поднимается нить

$$H = 2\sqrt{T/\gamma}, \quad z = H \sin\theta \quad (1.4)$$

Таким образом, высота системы и натяжение нити взаимосвязаны. Из этих соотношений, а также из (1.2) следует

$$\tilde{k} = (4/H)\sin\theta, \quad ds = (H/2 \sin\theta)d\theta, \quad ds-dx = H \sin\theta d\theta \quad (1.5)$$

Интегрируя последнее выражение в пределах от вершины Γ ($s = 0$, $x = 0$, $\theta = 0$) до точки касания нити с горизонтальным основанием ($s = l$, $x = a$, $\theta = \pi/2$), находим связь $l-a = H$, где l — длина нити от вершины до точки контакта. Так как $L = 2a + 2l$, то

$$4a + 2H = L \quad (1.6)$$

Следовательно, периметр прямоугольника с основанием $2a$ и высотой H равен длине нити L . Но этот прямоугольник обладает и другим любопытным свойством [1].

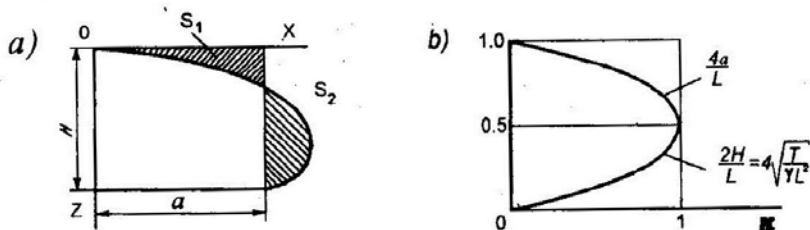


Рис. 5.2. К вычислению площади поперечного сечения (а) и зависимости высоты подъема оболочки и длины контакта с горизонтальной поверхностью от коэффициента заполнения (б).

Интегрируя по φ следующее из (1.2) выражение

$$z dx = (H^2/4)\cos\varphi d\varphi$$

в пределах от 0 до π , находим, что площади S_1 и S_2 одинаковы (рис. 5.2, а). Следовательно, площадь указанного прямоугольника равна площади S , охваченной нитью. Так что

$$2aH = S \quad (1.7)$$

Этот прямоугольник с основанием $2a$ и высотой H можно назвать эквивалентным, так как его периметр и площадь равны длине контура

L и охваченной им площади.

Из (1.6), (1.7) путем исключения a получаем квадратное уравнение относительно H/L , откуда

$$\frac{H}{L} = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 - \kappa} \right), \quad \left(\kappa = 16 \frac{S}{L^2} \right)$$

Здесь необходимо выбрать нижний знак, так как при $S=0$ должно быть $H=0$. Величину κ можно называть коэффициентом заполнения длинной цилиндрической емкости. С учетом (1.4) имеем

$$\sqrt{\frac{T}{\gamma L^2}} = \frac{H}{2L} = \frac{1}{8} \left(1 - \sqrt{1 - \kappa} \right)$$

Эти зависимости представлены на рис. 5.2, б. Они имеют место при $\kappa \leq 1$ или $16S \leq L^2$.

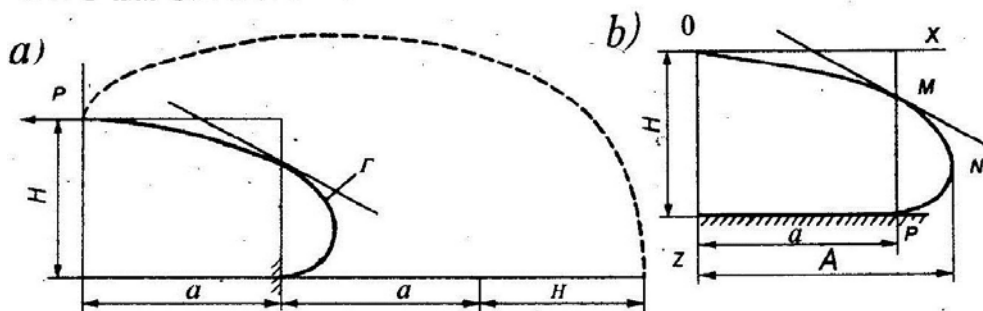


Рис. 5.3. Характерные особенности формы мягкой оболочки, содержащей жидкость.

Кривая Γ может быть представлена как упругая линия при изгибе стержня (эластика Эйлера) (рис. 5.3, а). Об этом более подробно будет сказано в § 3. Определим некоторые ее характерные элементы.

В наиболее удаленной точке N (рис. 5.3, б) $\theta = \pi/4$, и из (1.4) имеем $Z_N = (\sqrt{2}/2)H$. Чтобы определить габаритный размер A , проинтегрируем (1.5) по θ от нуля до $\pi/4$. Если обозначить через l_1 длину дуги OMN , то

$$l_1 - A = (1 - \sqrt{2}/2)H$$

Интегрируя теперь (1.5) от $\theta = \pi/4$ до $\theta = \pi/2$, получаем выражение для длины дуги NP в виде $l_2 = - (H/2) \ln \operatorname{tg}(\pi/8)$. Так как $l_1 + l_2 = l$, а с другой стороны, как было показано выше, $l = a + H$, то

$$A = a + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right) H = a + 0.266H \quad (1.8)$$

Для определения угла θ_M в точке M сначала вычислим длину l_3 дуги MNP . Из (1.5) путем интегрирования в пределах от θ_M до $\pi/2$ получаем как $l_3 = H \cos \theta$, так и $l_3 = - (H/2) \ln \operatorname{tg}(\theta_M/2)$. Отсюда следует уравнение $\cos \theta_M = - (1/2) \ln \operatorname{tg}(\theta_M/2)$. Если обозначить $\operatorname{tg}(\theta_M/2) = e^{-v}$, то $v = 2 \operatorname{tg} v$. Единственный положительный корень последнего уравнения $v = 1.915$, так что $\theta_M = 0.293$.

Ордината z_M точки M определяется из (1.4): $z_M = 0.288H$. Отметим, что касательная в точке M пересекает основание ($z = H$) на расстоянии $1.074H$ от точки контакта P .

§ 2. ОБЪЕМ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОДУШЕЧНОЙ ЕМКОСТИ

Предполагаем снова, что оболочка "подушки" является абсолютно гибкой, нерастяжимой, невесомой. Она может быть изготовлена разными способами. Рассмотрим случай, когда в ненапряженном состоянии два квадратных листа размерами сторон $L/2$ скрепляются по кромкам. При подаче жидкости в объем между ними образуется подушка. Она покоится на горизонтальном основании. Относительно гидростатического давления жидкости принимаем те же допущения, что в предыдущем параграфе ($H_u \ll H$, $p_0 \ll \gamma H$). В такой постановке в работе [1] приближенно определяется объем жидкости, содержащейся в полости. Ниже приводятся результаты этой работы.

Сила давления на основание равна $\gamma a^2 c$, где a — расстояние от центра пятна контакта с основанием до его границы, измеренное

в той плоскости симметрии, которая не содержит углов подушки, c — коэффициент полноты площади пятна контакта. Последний зависит от объема жидкости V в оболочке. В отсутствии жидкости ($V = 0$) эта площадь равна $4a^2$ и $c=4$. При максимальном объеме V у нерастяжимой оболочки пятно контакта стремится принять форму круга с исчезающе малым радиусом a . При этом $c \rightarrow \pi$. Таким образом, $\pi < c \leq 4$. В реальных условиях коэффициент c ближе к 4, чем к π .

Так как вес жидкости составляет γV , то условие равновесия всей системы имеет вид

$$\gamma V = \gamma N a^2 c \quad (2.1)$$

В приближенном расчете предположим, что кривые пересечения оболочки с плоскостями симметрии, не содержащими углов подушки, совпадают с поперечными сечениями длинной цилиндрической оболочки с периметром L (§ 1). Эта гипотеза имеет геометрический характер и никаких предположений силового характера не содержит. Согласно этой гипотезе сохраняется равенство (1.6), которое можно переписать в виде

$$4qV = H(L/2 - H)^2, \quad (2.2)$$

где обозначено $q = 1/c$ ($1/4 \leq q \leq 1/\pi$).

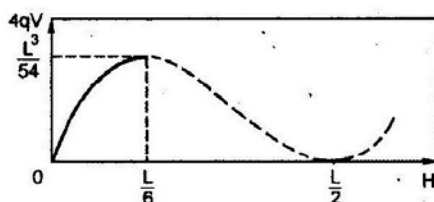


Рис. 5.4. Зависимость объем жидкости в оболочке — высота ее подъема.

Кубическая парабола по (2.2) показана на рис. 5.4. Максимум $4qV$ имеет место при $H = L/6$ и равен $L^3/54$. Смысл имеет только начальный участок кривой (выделенный на рисунке) — от $H = 0$ до $H = L/6$.

Вводя, как в предыдущем параграфе, коэффициент заполнения емкости по формуле $\kappa = 216 qV/L^3$, имеем по определению $0 \leq \kappa \leq 1$.

Натяжение T определяется из предположения о тождестве сечения подушечной емкости и сечения длинной цилиндрической оболочки. Так как тканевые и пленочные материалы обладают повышенной проч-

ностью в одноосном напряженном состоянии по сравнению с двухосным, наиболее слабой точкой подушечной оболочки является ее вершина, где напряженное состояние является двухосным.

Габаритный размер A определяется по формуле (1.8). Что касается напряженного состояния углов подушки и их влияния на значение V , то в пределах изложенного приближенного решения ответа на этот вопрос дать нельзя.

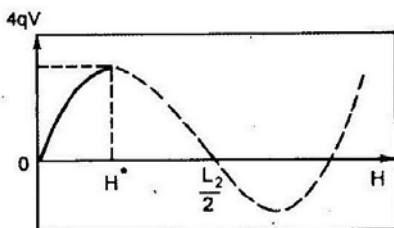


Рис. 5.5. Зависимость объем жидкости в подушке — высота ее подъема.

В заключение параграфа в том же приближении дадим обобщение для прямоугольной подушечной емкости с периметрами средних линий L_1 , L_2 (причем $L_1 \geq L_2$). Площадь пятна контакта равна sa_1a_2 , где a_1 , a_2 — размеры пятна контакта с основанием в обеих плоскостях симметрии, s — коэффициент полноты площади пятна контакта. Как и в случае квадрата, $\pi < s \leq 4$. Вместо (2.2) имеем

$$4qV = H(L_2/2 - H)(L_1/2 - H) \quad (2.3)$$

Кубическая парабола по (2.3) показана на рис. 5.5. Точки, где $4qV$ имеет экстремум, определяются из выражения

$$H = \frac{1}{6} (L_1 + L_2)(1 \pm m), \quad m = \sqrt{1 - 3L_1L_2/(L_1 + L_2)^2}$$

Так как $0 < L_2/L_1 \leq 1$, то $0 < m \leq 1/2$. В выражении для H следует оставить нижний знак. При этом экстремальное значение $4qV$ определяется равенством

$$864qV/(L_1 + L_2)^3 = (1 - m)^2(1 + 2m)$$

На рис. 5.5 смысл имеет только участок кривой при $0 \leq H \leq H^*$, где $H^* = (L_1 + L_2)(1 - m)/6$. Задаваясь L_1 и L_2 , можно найти H^* — предельное значение высоты системы, а затем для любого промежуточного значения H по (2.3) найти объем подушечной полости V .

§ 3. РАВНОВЕСИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОЛНОМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ

В предыдущих параграфах этой главы в упрощенной постановке рассмотрены равновесие длинной цилиндрической оболочки и применение решения этой задачи для приближенного расчета подушечной емкости. Были получены легко обозримые результаты. Теперь приведем задачу в более общей постановке, а именно, снимем ограничение, принятое в начале § 1 об отсутствии постоянной части гидростатического давления. Следовательно, допускаются произвольные значения высоты столба жидкости H_u в патрубке и высоты оболочки H (рис. 5.1).

Полное давление на контур равно

$$p_* = \gamma(z + H_u) \quad (3.1)$$

Величины γ и H_u заданы. Координаты x, z точек нити, натяжение T неизвестны. Но последнее постоянно вдоль всего контура.

Решению этой задачи посвящено значительное количество публикаций. Обзор их можно найти, например, в книгах [4, 8]. Следуя

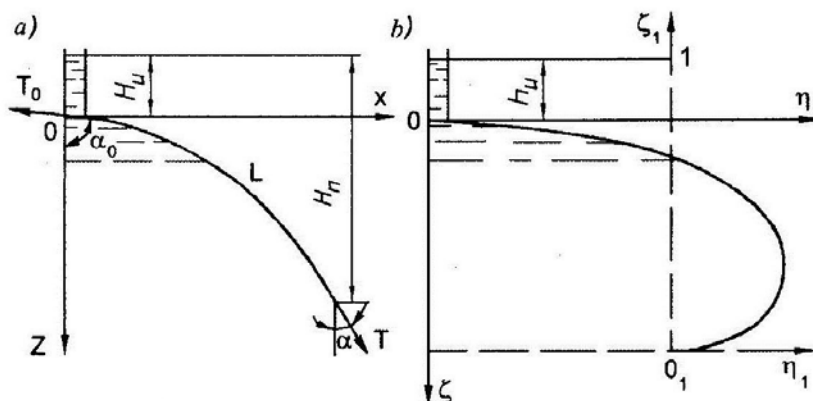


Рис. 5.6. К определению формы мягкой оболочки, контактирующей с жидкостью.

[7], здесь дадим краткое изложение лишь некоторых окончательных результатов.

Вводится угол α согласно рис. 5.6, а. Для координат точки нити, где соответствующий угол равен α , имеем

$$x = -\sqrt{Tk^2/\gamma} \delta A, \quad z = \sqrt{H_u^2 + 2(T/\gamma)(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)} - H_u, \quad (3.2)$$

а для длины L дуги, отсчитываемой от точки 0,

$$L = -\sqrt{Tk^2/\gamma} \delta F \quad (3.3)$$

Здесь приняты обозначения

$$k^2 = \frac{4T/\gamma}{H_u^2 + (4T/\gamma) \sin^2 \varphi_0}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi_0 = \varphi (\alpha = \alpha_0)$$

$$A(\varphi, k) = \frac{2-k^2}{k^2} F(\varphi, k) - \frac{2}{k^2} E(\varphi, k),$$

$$\delta A = A(\varphi, k) - A(\varphi_0, k), \quad \delta F = F(\varphi, k) - F(\varphi_0, k),$$

где φ — амплитуда (этот угол отличен от принятого угла φ в § 1), k — модуль эллиптических интегралов, $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Площадь S , заключенная между кривой L и осью z , равна

$$S = \frac{T}{\gamma} \left(\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi - 2\delta A \cdot \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \right) \quad (3.4)$$

Вводится в рассмотрение характерный линейный размер d , за который в зависимости от конкретной задачи может быть принят периметр, высота, корень квадратный из площади, занимаемой жидкостью, и т.д. В безразмерных величинах

$\xi = z/d$, $\eta = x/d$, $l = L/d$, $h_u = H_u/d$, $t = T/\gamma d^2$
формулы (3.2) и (3.3) приобретают вид

$$\eta = -\sqrt{tk^2} \delta A, \quad l = -\sqrt{tk^2} \delta F, \quad (3.5)$$

$$\xi = \sqrt{h_u^2 + 2t(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0)} - h_u$$

Кроме того

$$k^2 = \frac{4t}{(h_u^2 + 4t \sin^2 \varphi_0)}$$

В § 1 уже указывалось, что форма нити в поле гидростатической нагрузки дает упругую кривую изгиба гибкого стержня — эластику Эйлера. Кривые, описываемые более общими уравнениями (3.5), также представляют собой эластики. Для приведения их к обычному виду начало координат помещают в точку, где $\alpha = -\pi/2$, $\varphi = 0$ (рис. 5.6, б). Вводят оси η_1, ξ_1 , причем вторую из них нужно направить вверх. В качестве характерного линейного размера принимают расстояние по вертикали плоскости гидростатического напора (свободной поверхности жидкости) от оси η_1 . Уравнения эластик приобретают вид

$$\eta_1 = - (k^2/2) A(\varphi, k), \quad \xi_1 = 1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

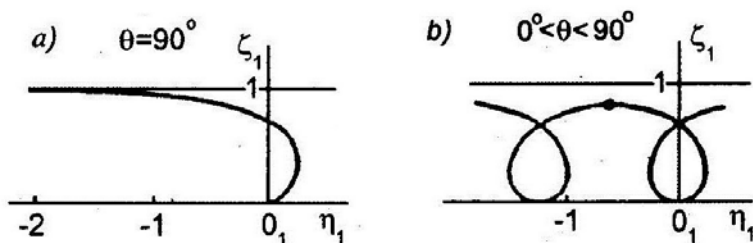


Рис. 5.7. К определению формы мягкой оболочки под действием гидростатического давления.

На рис. 5.7 эластики приведены для углов θ по формуле $k = \sin \theta$. При $k^2 < 1$ эластики — бесперегибные периодические кривые (рис. 5.7, б), при $k^2 = 1$ имеется одна кривая, асимптотически приближающаяся к плоскости гидростатического напора $\xi_1 = 1$ (рис. 5.7, а).

В таблицах эллиптические интегралы приведены для $k^2 \leq 1$. При $k^2 > 1$ переходят к новому модулю $\bar{k}$ и новому углу $\bar{\varphi}$ по соотношениям

$$\sin \bar{\varphi} = k \sin \varphi, \quad F(\varphi, k) = \bar{k} F(\bar{\varphi}, \bar{k}),$$

$$\bar{k} = \frac{1}{k}, \quad E(\varphi, k) = \frac{1}{\bar{k}} E(\bar{\varphi}, \bar{k}) + \frac{(\bar{k}^2 - 1)}{\bar{k}} F(\bar{\varphi}, \bar{k})$$

Обычные уравнения эластик в этом случае

$$\eta_1 = \frac{1}{2\bar{k}} [2E(\bar{\varphi}, \bar{k}) - F(\bar{\varphi}, \bar{k})], \quad \xi_1 = 1 - \cos \bar{\varphi}$$

Изменяют вид и формулы (3.2)–(3.5). Этим объясняется существование в литературе нескольких форм расчетных зависимостей. Кроме того, формулы записывают в эллиптических функциях Якоби, функциях Вейерштрасса.

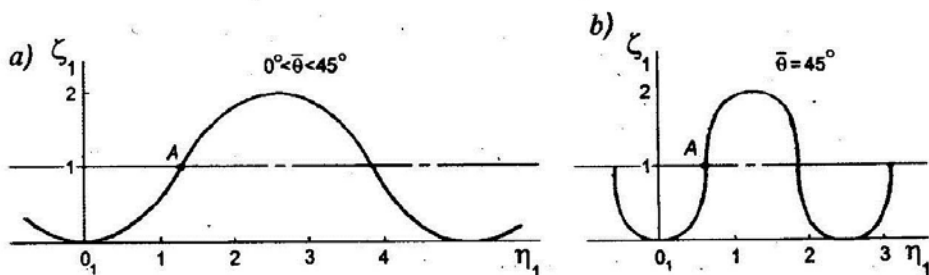


Рис. 5.8. К определению формы мягкой оболочки под действием гидростатического давления.

При $k^2 > 1$ ($\bar{k} < 1$) эластики – периодические перегибные кривые с точкой перегиба на уровне гидростатического напора ($\xi_1 = 1$). Ниже точки перегиба ($\xi_1 < 1$) оболочка испытывает внутреннее избыточное давление, выше ($\xi_1 > 1$) – наружное давление. Некоторые виды эластик приведены на рис. 5.8.

Сведения данного параграфа будут использованы в последующих параграфах этой главы.

§ 4. РАСЧЕТ ПЕРЕБОРОК, ОГРАЖДАЮЩИХ ОТСЕКИ С ЖИДКОСТЬЮ

Отсеки с мягкими перегородками для жидкости имеются, в частности, в малых промысловых судах. На рис. 5.9 показаны обозначения и системы координат.

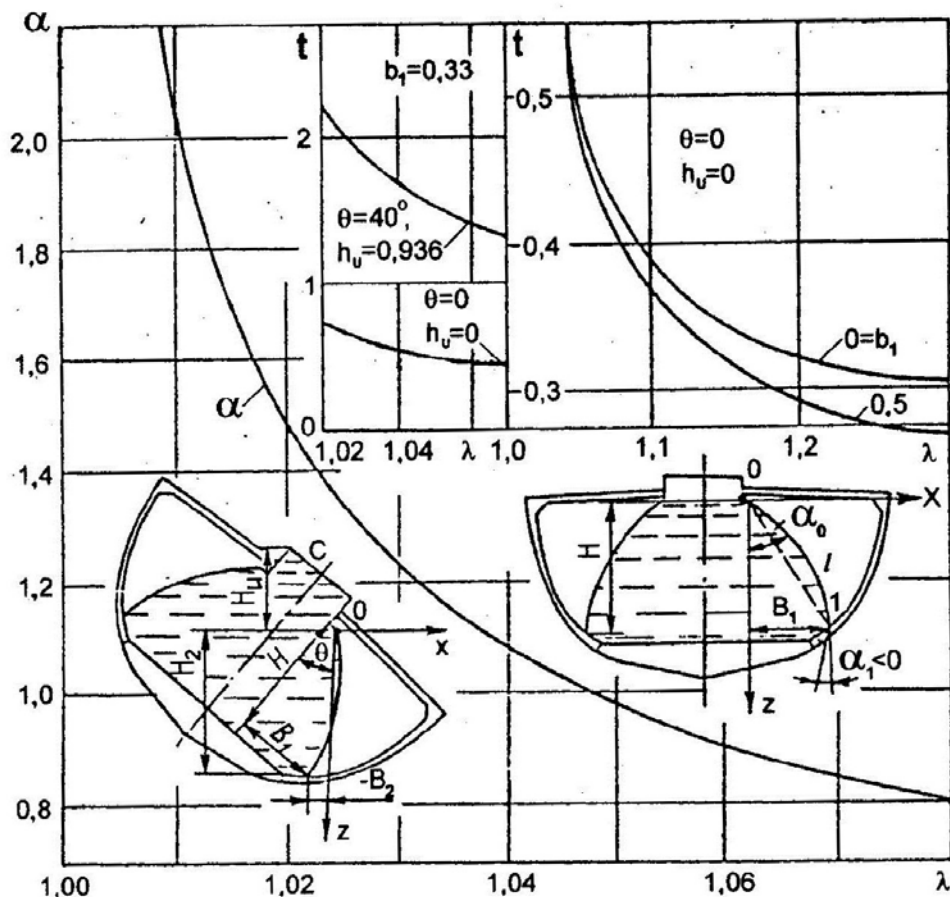


Рис. 5.9. Поперечное сечение мягкой емкости для перевозки жидкости и расчетные параметры.

Принимая за характерный линейный размер глубину H жидкости в прямосидящем судне, вводим следующие безразмерные параметры

$$\eta = x/H, \quad \xi = z/H, \quad h_u = H_u/H, \\ t = T/\gamma H^2, \quad \lambda_1 = L/H, \quad b_1 = B_1/H$$

Для прямосидящего судна получена система уравнений [7]

$$h_u = \frac{\Delta_0}{\Delta_1 - \Delta_0}, \quad -\lambda_1 = \frac{k^2 \delta F(\varphi, k)}{2(\Delta_1 - \Delta_0)}, \quad -b_1 = \frac{k^2 \delta A(\varphi, k)}{2(\Delta_1 - \Delta_0)} \quad (4.1)$$

Здесь обозначено

$$\Delta_1 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}, \quad \Delta_0 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_0}, \quad (4.2)$$

$$\delta A(\varphi, k) = A(\varphi_1, k) - A(\varphi_0, k), \quad \delta F(\varphi, k) = F(\varphi_1, k) - F(\varphi_0, k)$$

Эти функции, введенные в предыдущем параграфе, берутся для значений углов φ_0, φ_1 в точках 0 и 1, которые указаны на рис. 5.9. Безразмерное натяжение вычисляется по формуле

$$t = \frac{k^2}{4(\Delta_1 - \Delta_0)^2} \quad (4.3)$$

Численное решение дает значения φ_0, φ_1, k .

При малых избыточных напорах модуль $k^2 > 1$. Как показано в предыдущем параграфе, при этом удобнее перейти к величинам $\bar{k} = 1/k$ и т.д. При этом вместо системы (4.1)–(4.3) будут следующие уравнения

$$h_u = \frac{\cos \bar{\varphi}_0}{\cos \bar{\varphi}_1 - \cos \bar{\varphi}_0}, \quad -\lambda_1 = \frac{\delta F(\bar{\varphi}, \bar{k})}{2\bar{k}(\Delta_1 - \Delta_0)}, \quad (4.4) \\ -b_1 = \frac{\delta F(\bar{\varphi}, \bar{k}) - 2\delta E(\bar{\varphi}, \bar{k})}{2\bar{k}(\cos \bar{\varphi}_1 - \cos \bar{\varphi}_0)}, \quad t = \frac{1}{4\bar{k}^2(\cos \bar{\varphi}_1 - \cos \bar{\varphi}_0)^2}$$

Формулы справедливы, если переборка не прилегает ко второму дну или если

$$\lambda_1 \leq - \frac{k^2 F(\bar{\varphi}_0, \bar{k})}{2\Delta_0}, \quad \lambda \leq - \frac{F(\bar{\varphi}_0, \bar{k})}{2\bar{k} \cos \varphi_0}$$

Зависимости $t(\lambda)$ для $\theta = 0$, $h_u = 0$ приведены в верхнем правом углу рис. 5.9. Вместо λ_1 введена величина $\lambda = \lambda_1 / \sqrt{1+b_1^2}$.

Для судна, сидящего с креном θ (рис. 5.9) избыточный напор H_u определяется графически. Так же легко определить по рисунку размеры B_2 , H_2 ($b_2 = B_2/H$, $h_2 = H_2/H$). Имеет место разрешающая система уравнений

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} - 1 = \frac{h_2}{h_u}, \quad \frac{k^2 \delta A(\varphi, k)}{2\Delta_0} = - \frac{b_2}{h_u}$$

$$\frac{k^2 \delta F(\varphi, k)}{2\Delta_0} = - \frac{\lambda_1}{h_u}, \quad t = \left(\frac{kh_u}{2\Delta_0} \right)^2$$

В левой верхней части рис. 5.9 приведен результат численного решения этой системы уравнений.

При всех углах крена достаточную точность обеспечивает формула [7]

$$t = \left(\frac{1}{2} + h_u \right) (1+b_1^2)^{1/2} a(\lambda_1),$$

где $a(\lambda_1)$ определяется из системы уравнений

$$a = \frac{1}{2 \sin \beta}, \quad \frac{\beta}{\sin \beta} = \lambda_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+b_1^2}}$$

Конечно, найденные здесь значения натяжения оболочки $T = \gamma H^2 t$ не являются определяющими, так как максимальные их значения возникают при качке судна. Но рассмотрение динамических вопросов выходит за пределы данной работы.

§ 5. СВОБОДНОЛЕЖАЩИЕ ЕМКОСТИ

Примером свободнолежащей емкости является "подушка" (рис. 5.10), равновесие которой рассматривалось в § 2 этой главы. Кроме подушечных широко применяются трубчатые емкости, которые также выкраиваются из двух прямоугольных полотнищ, соединяемых по периметру. Известно множество других форм.

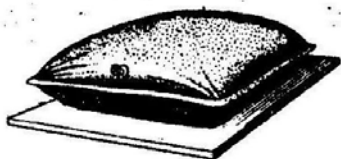


Рис. 5.10. Свободнолежащая емкость для жидкости.

Судовые емкости во избежание колебаний жидкости во время качки (вообще, для придания жесткости всей системе) наполняют со значительным избыточным напором. При этом высота H_c жидкости в патрубке велика. Поэтому они изготавливаются из прочных материалов. Объемы транспортных емкостей обычно изменяются в пределах от 1 м^3 до 15 м^3 .

Обширен ассортимент емкостей для наземного хранения жидкостей, их вместимость превышает 200 м^3 . Для них характерны небольшие избыточные давления и поэтому пологие формы. В силу этого обычно применяются относительно слабые материалы.

Статическому и динамическому расчету свободнолежащих емкостей посвящена значительная литература, например, [4, 5, 7, 9]. В этих расчетах исходят из модели формообразования по цилиндрической форме. Таким образом, применяется тот же подход, что в § 2 этой главы.

Далее, следуя [7], приведем без выводов решение задачи о равновесии емкости на горизонтальном жестком основании (рис. 5.11, а). Обозначения: S — площадь сечения емкости, d — диаметр сечения оболочки круговой формы, T , T_n — кольцевое (попереч-

a)

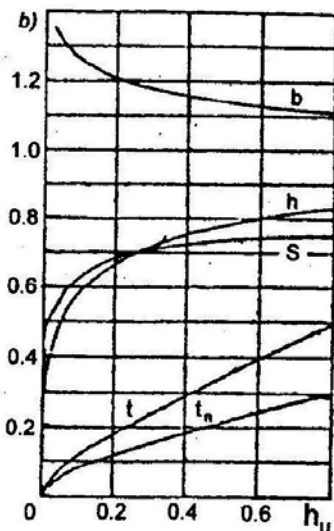
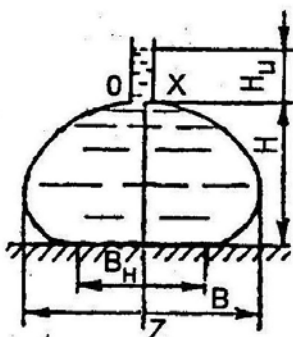


Рис. 5.11. Сечение свободнолежащей емкости (а) и зависимость искомых параметров от относительной высоты жидкости в патрубке (б).

ное) и продольное натяжения в оболочке. Другие обозначения указаны на рис. 5.11, а.

В безразмерных параметрах

$$h = \frac{H}{d}, \quad h_u = \frac{H_u}{d}, \quad b = \frac{B}{d}, \quad b_u = \frac{B_u}{d},$$

$$s = \frac{S}{d^2}, \quad t = \frac{T}{\gamma d^2}, \quad t_n = \frac{T_n}{\gamma d^2}$$

расчетные формулы имеют вид

$$h_u = 2 \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} t, \quad t = \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \frac{k^2}{[K(k)-E(k)]^2},$$

$$s = 4tA(k), \quad h = 2(1-\sqrt{1-k^2})\sqrt{t/k^2},$$

$$b = 2\sqrt{tk^2} [A(k)-A(\pi/4, k)], \quad b_u = 2\sqrt{tk^2} A(k)$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Функции A , E приведены в § 3 этой главы.

Расчетные кривые, построенные по этим формулам, даны на рис. 5.11, б. Видно, что с увеличением высоты жидкости в патрубке безразмерные значения натяжений t , t_n , высоты емкости h , площади ее поперечного сечения s возрастают, причем этот рост более крутой при малых значениях t_u . Что касается габаритного размера B (рис. 5.11, а), то он уменьшается с ростом высоты жидкости в патрубке. Следует отметить, что усилия t , t_n продолжают расти и при $h_u > 0.8$, в то время как для $h_u > 0.6$ значение площади сечения остается постоянным.

При наклонениях основания емкость перекачивается. Если имеется стенка, оболочка опирается на нее (рис. 5.12, а). Обозначим через θ угол наклона основания, а через $L_{bc} = l_{bc} d$ высоту касания оболочки к стенке. Коэффициент заполнения емкости жидкостью можно ввести аналогично § 1: $\kappa = 4S/\pi d^2$.

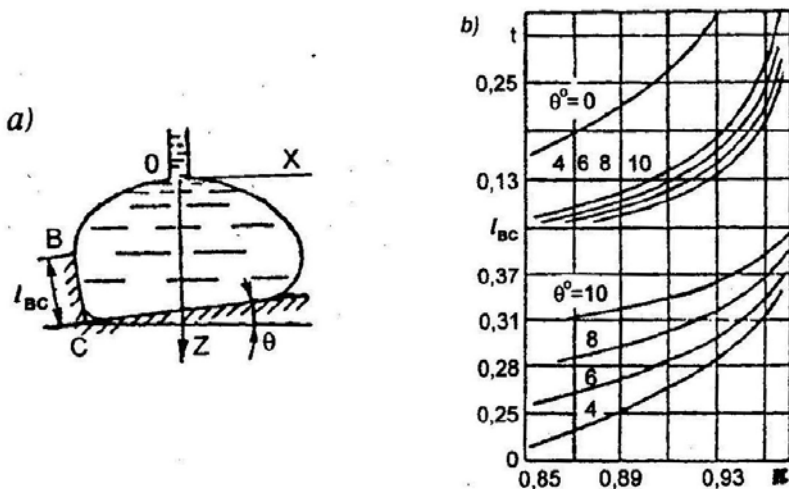


Рис. 5.12. Сечение наклоненной емкости (а) и зависимость искомых параметров от коэффициента заполнения и углов наклона (б).

На рис. 5.12, б приведена зависимость безразмерных значений натяжения t и высоты касания $I_{\text{вс}}$ от коэффициента заполнения при разных углах наклона. Имеет место стремительный рост этих характеристик с увеличением коэффициента заполнения. С увеличением угла наклона основания существенно снижаются безразмерные значения натяжения, в то время как размер касания к стенке, естественно, возрастает.

§ 6. ВКЛАДНЫЕ СУДОВЫЕ ЕМКОСТИ

Среди судовых вкладных емкостей можно выделить [7]: 1) облегающие, прилегающие всей поверхностью к стенкам, днищу и верхнему перекрытию отсека; 2) напряженные, верхняя поверхность которых не имеет контакта с отсеком и напряжена избыточным давлением жидкости (рис. 5.13, а, б); 3) напряженно-облегающие, имеющие сверху как свободные, так и прилегающие к отсеку участки. Могут быть комбинированные емкости, в которых имеются как мягкие, так и жесткие элементы.

Приведем расчет напряженных вкладных емкостей [7]. Рассмотрим результаты, полученные для случая удлиненной емкости и прямого положения судна (рис. 5.13, а). Обозначим через L полный периметр поперечного сечения оболочки и через $L_{\text{во}}$ — периметр верхнего участка A_1OA , через S_0 , $S_{\text{в}}$ — площади всего сечения емкости и сечения верхнего участка. За характерный линейный размер примем ширину основания B_0 и введем обычные безразмерные параметры

$$\lambda = \frac{L}{B_0}, \quad \lambda_{\text{во}} = \frac{L_{\text{во}}}{B_0}, \quad h_{\text{во}} = \frac{H_{\text{во}}}{B_0}, \quad h = \frac{H}{B_0}, \quad h_{\text{в}} = \frac{H_{\text{в}}}{B_0}, \quad h_{\text{н}} = \frac{H_{\text{н}}}{B_0}$$

$$t = \frac{T}{\gamma B_0^2}, \quad s_{\text{во}} = \frac{S_{\text{в}}}{B_0^2}, \quad s_0 = \frac{S_0}{B_0^2}$$

Тогда в плоской задаче получаются следующие соотношения

$$t = \frac{1}{4k^2[A(k) - A(\pi/4, k)]^2}, \quad h_{u0} = 2\sqrt{\frac{1-k^2}{k^2} \cdot t},$$

$$h_B = h_{u0} \left(\sqrt{\frac{2-k^2}{2(1-k^2)}} - 1 \right), \quad s_B = \sqrt{\frac{2(2-k^2)}{k^2} \cdot t} - 2t,$$

$$h_{B0} = 2k\sqrt{t} [K(k) - F(\pi/4, k)], \quad h_H \approx \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_{B0} - 1), \quad s_0 \approx s_B + h_H = h$$

Графические зависимости, построенные по этим формулам, приведены на рис. 5.13, d. В диапазоне $0 \leq h_{u0} < 1/2$ наблюдаются сильная зависимость величин λ_B , h_B , s_B от h_{u0} . При $h_{u0} > 1/2$ эта зависимость — слабая. Как и в предыдущем параграфе, функция $t(h_{u0})$ близка к линейной.

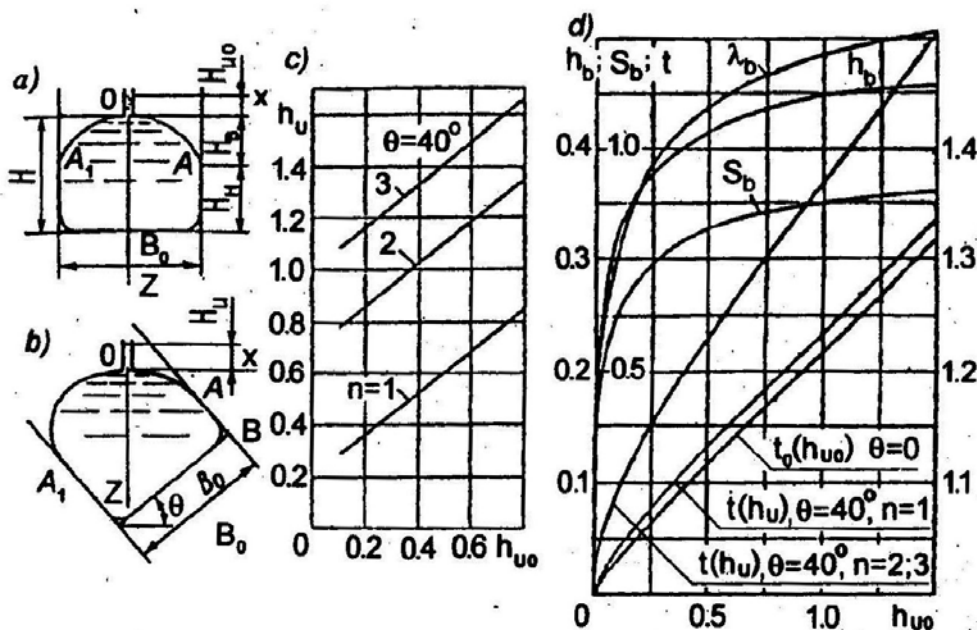


Рис. 5.13. Поперечные сечения вкладных емкостей (a, b) и зависимость искомых параметров от избыточного напора (c, d).

При посадке судна с креном θ для зависимости безразмерного натяжения t от фактического избыточного напора h_u характерно то же свойство почти линейного возрастания, что и при $\theta=0$ (рис. 5.13, d). Отличие h_u от h_{u0} в том, что первый параметр берется для оболочки в наклонном положении. Эта кривая указана как $t(h_u)$ при $\theta = 40^\circ$, $n = 1$ (n указывает на число емкостей),

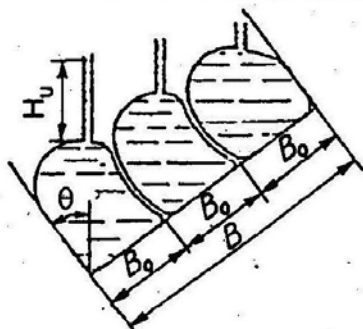


Рис. 5.14. Поперечное сечение группы вкладных емкостей.

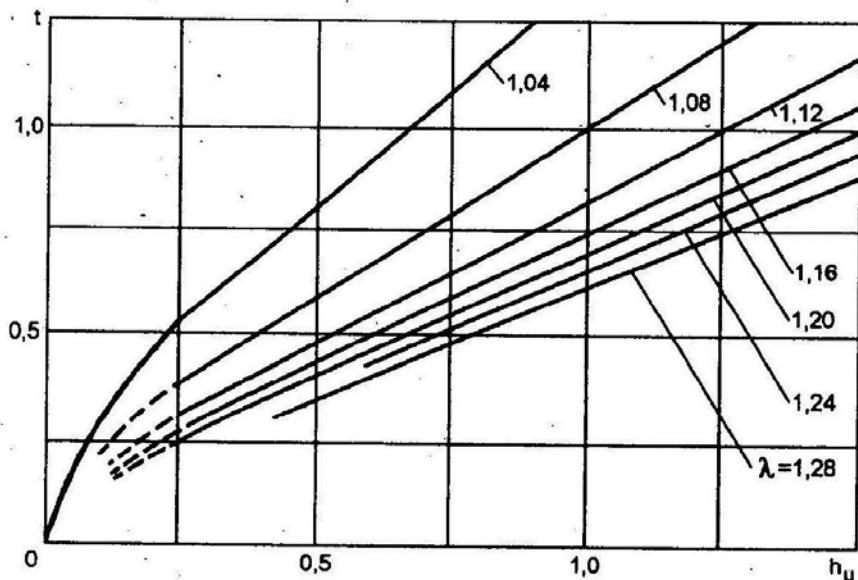


Рис. 5.15. Зависимость натяжения от избыточного напора в оболочке вкладных емкостей с продольными диафрагмами.

Ясно, что h_u зависит от h_{u0} , θ . Такая зависимость может быть получена из рассмотрения задачи с учетом несжимаемости жидкости. Может быть рекомендована также экспериментальная зависимость $h_u(h_{u0})$. Такая зависимость показана на рис. 5.13, с с индексом $n=1$.

В случае группы емкостей в одном отсеке (рис. 5.14) приближенный расчет ведется так же, как расчет одиночной емкости. При этом за B_0 может быть принята ширина отсека, деленная на число емкостей n . Емкости соприкасаются по круговым цилиндрическим поверхностям. При крене зависимость $t(h_u)$ может быть также найдена по опытной кривой. На рис. 5.13, d эти зависимости указаны для угла $\theta = 40^\circ$ (для числа емкостей $n = 2, n = 3$).

Для емкостей с продольными диафрагмами зависимость безразмерного натяжения t от напора h_u и параметра λ приведена на рис. 5.15. Характерно, что для $h_u > 1/4$ зависимость $t(h_u)$ является линейной.

§ 7. ПЛАВУЧИЕ МЯГКИЕ ЕМКОСТИ

Плавучие емкости используют как хранилища и буксируемые транспортные средства. Буксируемая емкость сигарообразной формы (рис. 5.16) может использоваться для транспортировки нефтепродуктов и пресной воды [3, 6]. Плавучесть достигается как за счет разности удельных весов жидкостей внутри и вне оболочки, так и за счет устройства воздушных баллонов и воздушных труб внутри емкости (рис. 5.17).

Анализ равновесия плавучей емкости в постановке пространственной задачи исключительно сложен. Сложности сильно возрастают в динамической постановке, имитирующей условия эксплуатации, в частности, поведения на волнении. Ниже приведем, следуя [3, 6, 7], простейшие статические расчеты поперечного сечения длинной мягкой емкости.

На рис. 5.17, b показаны обозначения. Другие принятые обозначения следующие: γ , γ_0 — удельные веса жидкостей внутри и вне

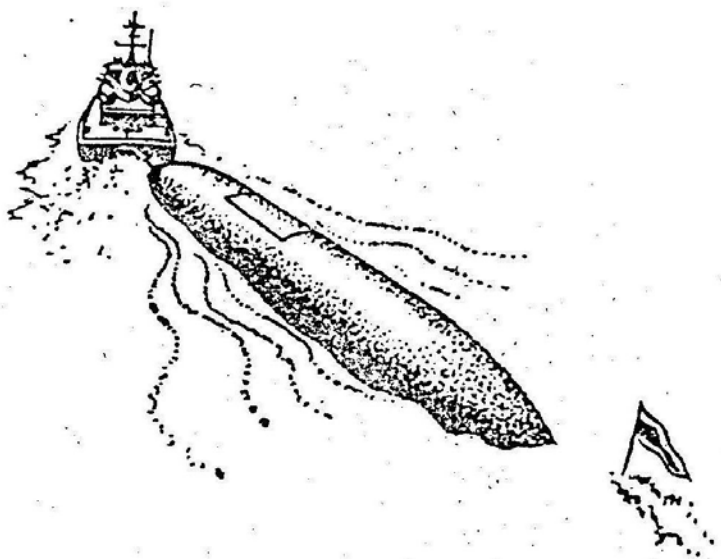


Рис. 5.16. Буксируемая плавучая емкость.

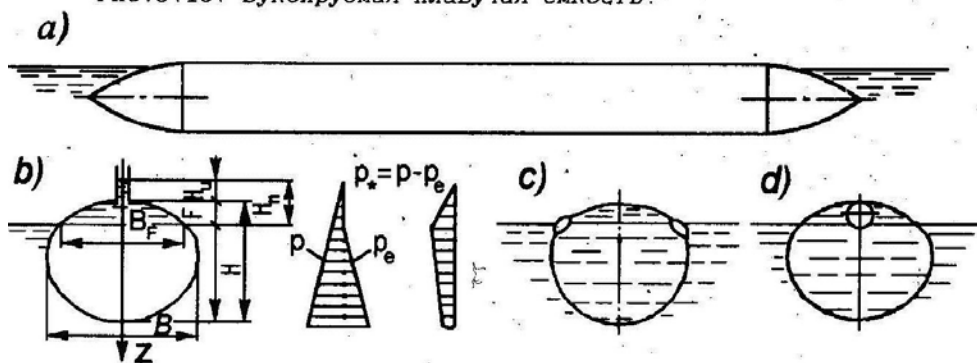


Рис. 5.17. Продольное и поперечное сечения плавучей емкости.

оболочки, d – диаметр оболочки, когда она принимает круговую форму, S_0 – площадь поперечного сечения емкости с грузом. Безразмерные параметры:

$$h_u = \frac{H_u}{d}, \quad h = \frac{H}{d}, \quad b = \frac{B}{d}, \quad b_F = \frac{B_F}{d},$$

$$f = \frac{F}{d}, \quad h_n = \frac{H_n}{d}, \quad s_o = \frac{S_o}{d^2}, \quad t = \frac{T}{\gamma d^2}$$

Введем отношения удельных весов жидкостей и коэффициент заполнения емкости

$$\nu = \frac{\gamma}{\gamma_o}, \quad \kappa = \frac{4S_o}{\pi d^2}$$

При заданном избыточном напоре h_u параметры φ_1 , κ , κ_n определяются из системы уравнений

$$\frac{\kappa}{\kappa_n} \sqrt{\frac{1-\nu}{\nu}} \frac{A(\kappa) - A(\varphi_1, \kappa)}{A(\kappa_n) - A(\varphi_1, \kappa)} = 1$$

$$\psi_1 = \pi/2 - \varphi_1, \quad \sin^2 \varphi_1 = (1-\nu)(1-1/\kappa^2) + \nu/\kappa^2,$$

$$\kappa[K(\kappa) - F(\varphi_1, \kappa)] + \kappa_n \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} [K(\kappa_n) - F(\psi_1, \kappa_n)] = \pi h_u \sqrt{\frac{1-\kappa^2}{\kappa^2}}$$

По известным значениям параметров φ_1 , κ , κ_n остальные величины можно найти по формулам

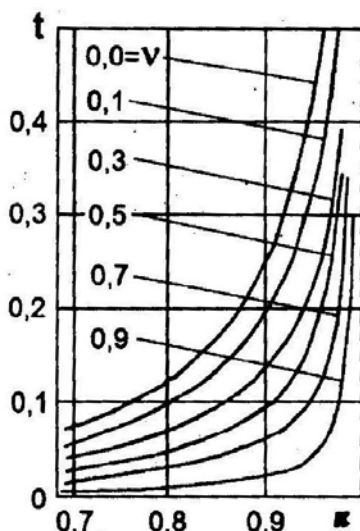


Рис. 5.18. Зависимость натяжение-коэффициент заполнения емкости при различных отношениях удельного веса внутренней жидкости к удельному весу наружной жидкости.

$$t = \frac{h_u^2 k^2}{4(1-k^2)}, \quad f = \frac{2\sqrt{t}}{k} \left(\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_1} - \sqrt{1-k^2} \right),$$

$$h = f + \frac{2\sqrt{t}}{k_H} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \left(\sqrt{1-k_H^2 \sin^2 \varphi_1} - \sqrt{1-k_H^2} \right),$$

$$b = 2 \sqrt{\frac{\nu t}{1-\nu}} k_H^2 [A(k_H) - A(\pi/4, k_H)],$$

$$s_0 = \frac{h_u + f}{1-\nu} \cdot 2\sqrt{t} k^2 [A(k) - A(\varphi_1, k)] - \frac{2t}{1-\nu} \sin 2\varphi_1.$$

Графическое изображение зависимостей можно найти в литературе [7]. Например, зависимость безразмерного кольцевого натяжения t от коэффициента заполнения и отношения удельных весов жидкостей приведена на рис. 5.18. Под значением $\nu = 0$ можно подразумевать наполнение емкости газом. При этом натяжение максимально. С увеличением удельного веса внутренней жидкости t уменьшается. При $\nu = 1$ оболочка не испытывает натяжения.

При малых значениях коэффициента заполнения емкости ($\kappa < 1/3$) t стремится к нулю при всех ν . При приближении к $\kappa = 1$ значение натяжения стремительно возрастает.

§ 8. ЕМКОСТИ ДЛЯ ПОДЪЕМА ГРУЗА

Рассмотрим равновесие погруженной в воду мягкой сферической емкости, заполненной воздухом и удерживаемой грузом. В расчетной схеме будем считать, что удерживающие тросы сплошным образом прикреплены к оболочке и представляют собой конусообразную поверхность (рис. 5.19, а). Меридиональный угол крепления тросов к оболочке обозначим через φ_0 , расстояние между нижней точкой сферы и точкой схождения тросов — через L_0 .

На оболочку емкости действует внутреннее давление воздуха и внешнее давление воды. В зависимости от значения этого перепада

давлений отдельные участки оболочки могут находиться в напряженно-деформированном состоянии нескольких типов. Однако здесь будем рассматривать равновесие системы, когда во всех точках оболочки имеются такие значения избыточного внутреннего давления и натяжения, что реализуется только двухосное растянутое состояние. В таком случае изменение формы и объема сферы мало. Это позволяет ограничиваться рассмотрением только напряженного состояния под нагрузкой, считая форму оболочки известной. В такой постановке задача рассматривалась в [2].

Отметим, что задача не изменится, если рассматривать находящуюся в воздухе емкость, содержащую внутри жидкость и подвешенную за те же тросы (рис.5.19,б). Давление, создаваемое столбом воды в патрубке, будет соответствовать постоянной части перепада давлений в задаче на рис.5.19,а.

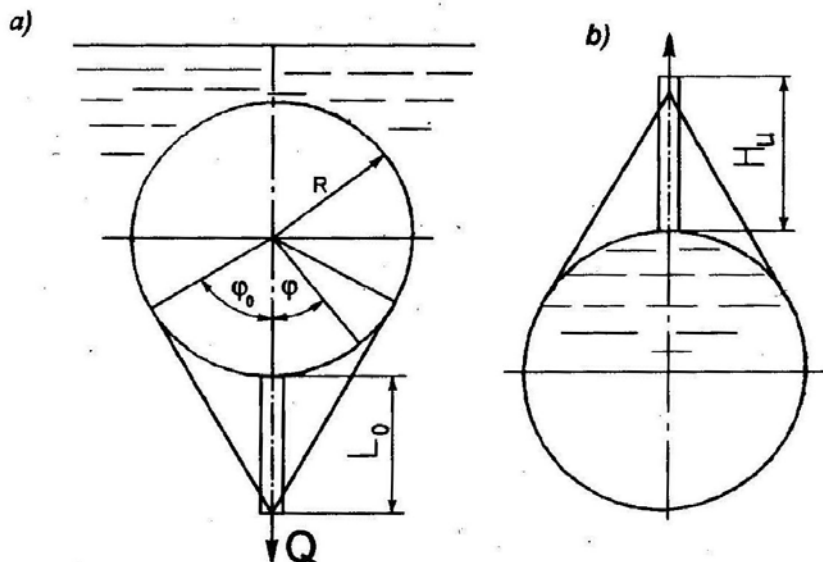


Рис.5.19. Сферическая емкость для подъема груза в жидкости (а) и емкость, содержащая жидкость (б).

Для безмоментной сферической оболочки, загруженной осесимметричной нагрузкой, могут быть записаны следующие формулы для меридионального и кольцевого натяжений

$$T_{\varphi} = \frac{R}{\sin^2 \varphi} \left(\int p \cos \varphi \, d\varphi + C \right), \quad (8.1)$$

$$T_{\theta} = pR - T_{\varphi}$$

Здесь φ, θ — угловые координаты меридиана и параллели, C — постоянная интегрирования.

Если перепад давлений на оболочке изменяется так, что он равен нулю в ее нижней точке и $2\gamma R$ в верхней точке, то

$$p = \gamma R(1 - \cos \varphi) \quad (8.2)$$

Из (8.1), (8.2) имеем значение

$$T_{\varphi} = \frac{\gamma R^2}{6 \sin^2 \varphi} [(2 \cos \varphi - 3) \cos^2 \varphi + 6C],$$

где при $\varphi=0$ знаменатель обращается в нуль. Чтобы значения натяжений здесь были конечными, выражение в квадратных скобках должно быть равно нулю. Поэтому $C=1/6$.

Формулы (8.1) для зоны, лежащей ниже линии крепления тросов к оболочке, приобретают вид

$$T_{\varphi} = \frac{\gamma R^2}{6} \left(1 - \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right), \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \quad (8.3)$$

$$T_{\theta} = \frac{\gamma R^2}{6} \left(5 - 6 \cos \varphi + \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right)$$

Для верхней части оболочки ($\varphi_0 \leq \varphi \leq \pi$) необходимо определить постоянную C из условия, чтобы при $\varphi = \pi$ натяжения в оболочке имели конечные значения. Это дает $C = 5/6$. Следовательно

$$T_{\varphi} = \frac{\gamma R^2}{6} \left(5 + \frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi} \right), \quad T_{\theta} = \frac{\gamma R^2}{6} \left(1 - 6\cos\varphi - \frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi} \right) \quad (8.4)$$

($\varphi_0 \leq \varphi \leq \pi$)

В линейной задаче натяжения от постоянного перепада давления в сфере

$$T_{\varphi} = T_{\theta} = T_0 = p_0 R/2 \quad (8.5)$$

суммируются с переменными значениями (8.3), (8.4).

Для схемы на рис.5.19,б постоянный перепад $p_0 = \gamma H_0$ и равномерное натяжение равно $T_0 = \gamma H_0 R/2$.

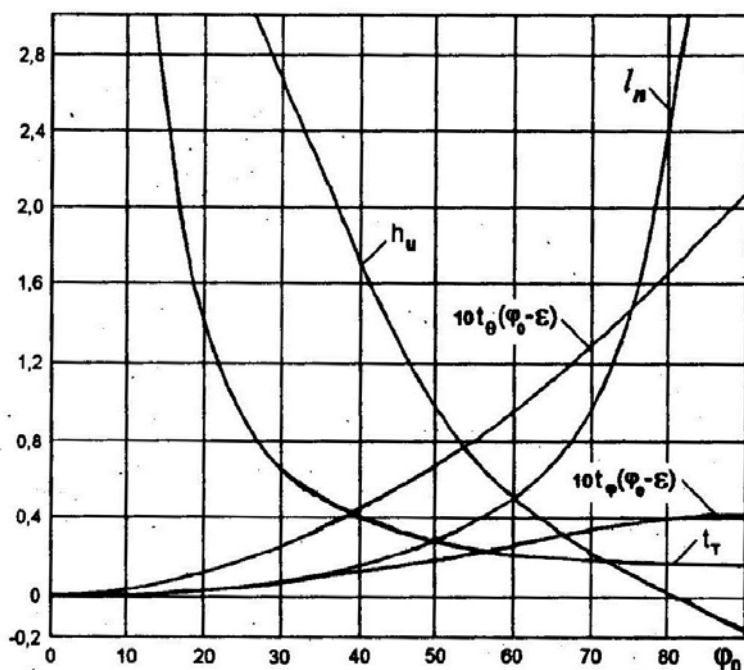


Рис.5.20. Искомые параметры сферической емкости для подъема груза в зависимости от угла закрепления тросов.

Натяжение в тросах, приходящееся на единицу длины линии крепления их к оболочке, равно

$$T_r = \frac{2\gamma R^2}{3\sin^2\varphi_0}$$

Если принять, что тросы направлены по касательной к сферической поверхности под углом φ_0 (длина троса при этом равна $(L_0 + R)/\sin\varphi_0$), то имеется соотношение между натяжениями

$$T_\varphi(\varphi_0 + \varepsilon) = T_\varphi(\varphi_0 - \varepsilon) + T_r,$$

где наличие малого угла ε по меридиану означает принадлежность T_φ по разные стороны от параллели с углом φ_0 . Здесь могут быть наибольшие натяжения в оболочке. Их величина зависит от угла φ_0 .

На рис. 5.20 показаны кривые безразмерных значений натяжений

$$t_\varphi = \frac{T_\varphi}{4\gamma R^2}, \quad t_\theta = \frac{T_\theta}{4\gamma R^2}$$

по нижнюю сторону от линии закрепления тросов ($\varphi = \varphi_0 - \varepsilon$).

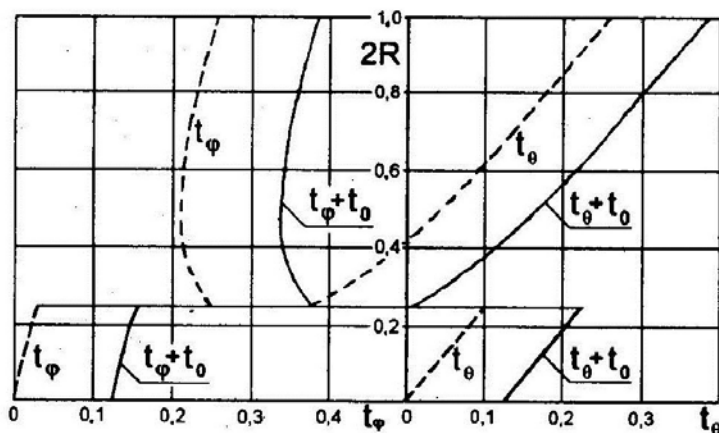


Рис. 5.21. Меридиональные и кольцевые натяжения в недеформируемой сферической оболочке.

Как видно, с увеличением угла закрепления φ_0 эти натяжения возрастают. При этом безразмерное расстояние $l_n = L_n / (2R)$ также сильно возрастает, так как предполагается, что тросы закрепляются по касательной к оболочке. Безразмерные значения натяжения тросов $t_T = T_T / (4\gamma R^2)$ и эквивалентного уровня жидкости в патрубке $h_u = H_u / (2R)$ уменьшаются с ростом угла φ_0 . Эти значения h_u определены из условия, что в оболочке не образуются складки, т.е. $T_\theta(\varphi_0 + \epsilon) + T_0 = 0$.

При нулевом избыточном давлении в нижней точке емкости сжимающие усилия в оболочке в месте крепления тросов получаются равными нулю при $\varphi_0 = 81^\circ$. При $\varphi_0 > 81^\circ$ в оболочке не будут образовываться складки.

Для примера рассмотрена емкость с углом $\varphi_0 = 60^\circ$, при котором натяжения в оболочке не столь велики, а длина L_n равна радиусу R . Для исключения образования складок требуется безразмерное натяжение, равное $t_0 = T_0 / (4\gamma R^2) = 0.125$. На рис. 5.21 изображены для этого случая зависимости безразмерных меридиональных и кольцевых натяжений. Сплошные линии показывают распределение по высоте оболочки суммарных натяжений (с учетом избыточного давления), а пунктирные линии — натяжения при $t_0 = 0$. Приведенные графики дают возможность судить о состоянии сферической емкости в ее статическом подводном положении.

ГЛАВА VI

РАВНОВЕСИЕ ПЛЕНOK, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ. ВЫТЕСНИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

§ 1. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ПЛЕНКИ

Устройство для вытеснения жидкости из сосуда с помощью движения разделительной мембраны или пленки схематически может быть представлено в виде рис. 2.5, б или 2.6, а. Полость выше пленки заполнена газом под давлением p_0 , которое может служить регулирующим параметром. Под действием этого давления пленка вытесняет жидкость из нижней полости (в ней предполагается наличие отводной трубки). При этом гравитационная сила может быть направлена как вниз (как обычная сила тяжести), так и вверх (либо в обычных условиях жидкость расположена в верхней полости, а газ — в нижней). Соответственно этому примененный в § 4 главы IV коэффициент перегрузки $n > 0$ и $n < 0$.

Как и в предыдущей главе, предполагается, что пленка представляет собой абсолютно гибкую и нерастяжимую поверхность. В постановке плоской задачи она может рассматриваться как нить. Только в последнем параграфе предполагается растяжимость мембраны. При этом допускаются большие деформации ее.

Как будет видно из дальнейшего, имеется много общего в поведении рассматриваемой системы с теми, которые изучались в главах II и V. При изложении материала этой главы следуем работам [2-6].

Точки прикрепления пленки к стенкам находятся на одном уровне, расстояние между ними равно $2L$. Длина пленки L больше, чем расстояние $2L$, так что имеются ее ненатянутые, сложенные состояния. Кроме точек прикрепления пленка не касается стенок. Эта задача впервые была рассмотрена в [6].

Начало координатной системы xz взято в середине отрезка $2L$, причем ось x направлена горизонтально (через точки закрепления),

а ось z направлена вверх. Гидростатическое давление равно $p = p_0 - \rho g z$, а давление на пленку $p^* = p_0 - p_0 + \rho g z$.

Уравнение равновесия имеет вид (1.1) главы V с правой частью, равной p^* ,

$$T\tilde{k} = p_0 - p_0 + \rho g z, \quad (1.1)$$

где T — постоянное вдоль пленки натяжение, $\tilde{k}$ — кривизна, которая выражается формулой

$$\tilde{k} = \frac{d^2 z}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

Условие нерастяжимости пленки

$$\int_{-L}^L \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx = \tilde{L}, \quad \tilde{L} \geq 2L \quad (1.2)$$

и условие несжимаемости жидкости

$$\int_{-L}^L z dx = V \quad (1.3)$$

вместе с условиями закрепления ($z = 0$ при $x = \pm L$) и с (1.1) представляют собой постановку задачи.

Постоянная V есть разница между объемом слоя жидкости единичной толщины и соответствующим объемом сосуда с твердой перегородкой $z = 0$. В соответствии с этим V не может превышать площади сегмента с хордой $2L$ и длиной дуги $\tilde{L}$. Отсюда следует неравенство

$$|V| \leq \frac{L^2(2\beta - \sin 2\beta)}{2\sin^2 \beta}, \quad (1.4)$$

в котором вспомогательный параметр β определяется как корень уравнения

$$\frac{\sin \beta}{\beta} = \frac{2L}{\tilde{L}},$$

лежащий в первой четверти.

Рассмотрим линейную задачу при малой разнице между длиной пленки $\tilde{L}$ и расстоянием $2L$ между точками закрепления

$$\tilde{L} = 2L + \delta, \quad 0 \leq \delta/L \ll 1, \quad (1.5)$$

Тогда отклонение от горизонтальной линии будет мало. При этом $\tilde{k} \approx d^2z/dx^2$, и уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \alpha^2 z = \frac{p_0 - p_0}{T}, \quad \alpha^2 = -\frac{n\gamma}{T}, \quad (1.6)$$

неоднократно встречающийся в главе II.

Условие (1.2) вместе с (1.5) дает

$$\int_{-L}^L (dz/dx)^2 dx = 2\delta \quad (1.7)$$

Неравенство (1.4) также упрощается

$$v = V^2/(8L^3\delta) \leq 1/6 \quad (1.8)$$

Далее рассмотрим случай направления гравитационной силы вверх, по положительному направлению оси z . Подобная задача для предварительно натянутой мембраны решалась в главе II. Коэффициент перегрузки $n < 0$. Поэтому $\alpha^2 > 0$, и решение (1.6) имеет вид

$$z = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x - (p_0 - p_0)/(n\gamma) \quad (1.9)$$

В случае симметричной формы относительно оси z в соответствии с (1.3) и условиями закрепления при $x = \pm L$ получаем из (1.9)

$$z = \frac{\alpha V (\cos \alpha x - \cos \alpha L)}{2(\sin \alpha L - \alpha L \cos \alpha L)} \quad (1.10)$$

Из (1.7), (1.8) и (1.10) получится уравнение

$$v = \frac{(\alpha L \cos \alpha L - \sin \alpha L)^2}{(\alpha L)^3 (\alpha L - \sin \alpha L \cos \alpha L)} \quad (1.11)$$

для определения αL . Для заданных параметров L , V , δ , удовлетворяющих условию (1.8), существует по крайней мере одно решение уравнения (1.11). Число решений конечно при любом $v > 0$ и растет от одного до бесконечности при уменьшении v от $1/6$ до нуля. После определения αL форма пленки и сила натяжения T определяются по (1.10) и (1.6). Таким образом $T = -n\gamma/\alpha^2$ (как указано выше, в данной задаче $n < 0$).

Аналогично рассматривается линейное поведение системы по несимметричной форме отклонения [6]. Найдено, что при $v > \pi^{-2} \approx 0.1$ несимметричных решений вообще не существует, а при $0 < v \leq \pi^{-2}$ существует конечное число таких решений.

Так как при $\mu < 0$ формы равновесия не единственны, то необходимо рассмотреть их устойчивость [6,5]. Это делалось с помощью принципа минимума потенциальной энергии и достаточных условий слабого минимума в изопериметрической задаче. При $\mu < 0$ и $0.1 \leq v \leq 1/6$ имеется единственная устойчивая форма равновесия пленки. Она определяется уравнениями (6.10) и (6.11). При $0 \leq v \leq 0.1$ имеется устойчивая несимметричная форма, когда $\alpha L = \pi$. Все остальные формы неустойчивы. Аналогичное исследование для $\mu > 0$ показывает, что при $0 \leq v \leq 1/6$ имеется единственная и устойчивая форма равновесия.

Как известно из § 3 главы V, нелинейное поведение нерастяжимой мягкой оболочки при действии гидростатического давления определяется в неполных эллиптических интегралах первого и второго рода $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$, где φ — амплитуда, k — модуль эллиптических интегралов. Форма равновесия пленки в сформулированной задаче (6.1)–(6.4) описывается в параметрическом виде функциями

$$x = \sqrt{m} [F(\varphi, k) - 2E(\varphi, k)] + x_0,$$

$$z = d + 2k \sqrt{m} \cos \varphi$$

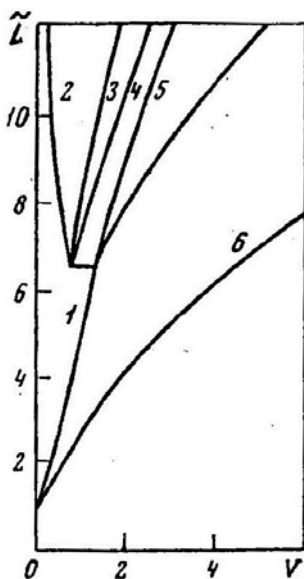


Рис. 6.1. Области различных форм равновесия пленки в терминах длина пленки—объем жидкости, превышающий объем сосуда с твердой стенкой $z = 0$ ($\tilde{L}$ имеет размерность длины, V — размерность куба длины).

Константы k , m , d , x_0 определяются из условий закрепления пленки, постоянства длины L и объема жидкости V .

В работах [6,5] рассматривается равновесие в нелинейном случае, когда ускорение направлено в отрицательном направлении оси z , а жидкость находится над пленкой. Как и в линейном случае, при $V = 0$ существует счетное число форм равновесия пленки и жидкости, при $V \neq 0$ число форм конечно.

В результате исследований выяснено [6,5], что имеются шесть типов формы равновесия. На рис. 6.1 приведены области, в которых имеет место тот или иной тип равновесия. При заданных значениях L и V отбиралась форма с наименьшей потенциальной энергией.

Области 1-4 соответствуют несимметричным формам равновесия. В области 4 разные части кривой, показывающей форму пленки, касаются между собой. Этот участок касания (или слипания) образует прямую по вертикали. В области 3 такой участок содержит точку закрепления, и в этой точке кривая терпит излом. Формы в области 2 также имеют излом, а участок касания вырождается в точку, совпадающую с точкой закрепления пленки. Область 1 соответствует формам без участков касания и изломов.

В областях 5 и 6 реализуются симметричные формы. Они не имеют участков касания в области 6, а в области 5 происходит касание на оси симметрии.

В случае, когда жидкость находится под пленкой, также существуют неединственные решения, а формы равновесия пленки могут содержать участки касания и угловые точки.

§ 2. РАВНОВЕСИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ И ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ

Пленка в недеформированном состоянии представляет собой сферу радиуса R и прилегает к стенкам сферического сосуда того же радиуса. Две точки прикрепления пленки к стенкам расположены на противоположных концах вертикального диаметра (рис. 6.2). В деформированном состоянии объем V между пленкой и стенками сосуда заполнен несжимаемой жидкостью, а внутри пленки находится газ под давлением p . Гравитационные силы действуют по вертикали. Изложим

результаты работы [3].

Поскольку имеется осевая симметрия, то можно рассматривать только вертикальную плоскость, проходящую через ось симметрии. Оси r, z показаны на рис.6.2. Положение пленки определяется уравнением $r = r(z)$.

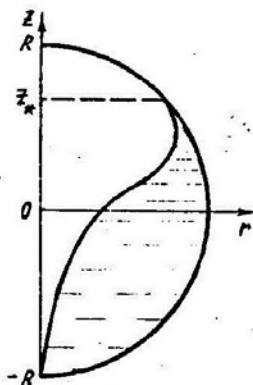


Рис.6.2. Сферическая пленка в сосуде, разделяющая жидкость и газ.

На поверхности пленки имеются складки, расположенные в меридиональных плоскостях вдоль кривых $r = r(z)$. При этом принимается обычное допущение для мягких оболочек о том, что каждая складка бесконечно мала, а самих складок много.

По условиям задачи в области, полностью прилегающей к сферической стенке, обе компоненты натяжения (T_1 и T_2 — силы, действующие на единицу длины параллели и меридиана) принимаются равными нулю. В одноосной зоне, где имеются складки, $T_2 = 0$, а T_1 определяется из решения.

Условия равновесия имеют вид

$$T_1 r = F = \text{const},$$

$$F \frac{d^2 r}{dz^2} + (n\gamma z - p_0 + p_e) \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{3/2} r = 0 \quad (2.1)$$

Для прилегающих к стенкам сосуда участков пленки вместо (2.1) имеется уравнение

$$r(z) = (R^2 - z^2)^{1/2}$$

Ставятся условия сопряжения этих участков. Кроме того имеются условия закрепления

$$r(-R) = 0, \quad r(R) = 0 \quad (2.2)$$

и условия нерастяжимости пленки и несжимаемости жидкости

$$\int_{-R}^R \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} dz = \pi R, \quad (2.3)$$

$$\pi \int_{-R}^R r^2 dz = \frac{4}{3} \pi R^3 - V,$$

где V объем между пленкой и сферической стенкой сосуда.

Можно показать [3,5], что существует не более одного участка прилегания пленки к стенкам сосуда. Этот участок $[z_*, R]$ может быть расположен лишь в конце интервала $[-R, R]$ (рис.6.2). Вместо условий (2.2) при наличии участка прилегания можно использовать

$$r(-R) = 0, \quad r(z_*) = (R^2 - z_*^2)^{1/2},$$

$$\left(\frac{dr}{dz} \right)_{z_*} = -z_*(R^2 - z_*^2)^{-1/2}, \quad z_* > 0 \quad (2.4)$$

Решение $r(z)$ должно удовлетворять неравенству

$$r(z) \leq R \sin \frac{s(z)}{R} \quad (-R \leq z \leq z_*), \quad (2.5)$$

где $s(z)$ — длина дуги кривой $r = r(z)$, отсчитываемая от точки $z = -R$. Это неравенство выражает тот факт, что каждая окружность в

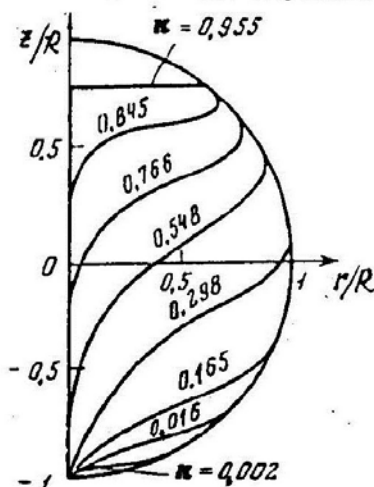


Рис.6.3. Положение пленки и жидкости в объеме под пленкой для разных значений коэффициента заполнения.

горизонтальном сечении пленки имеет меньший радиус, чем окружность, составленная из этих же точек пленки в недеформированном состоянии.

Случаю $F = 0$ соответствует ненатянутое состояние пленки. Тогда жидкость имеет горизонтальную свободную поверхность $z = z_0$. Пленка в этом случае состоит из трех участков: вертикального жгута $r = 0$ при $-R \leq z \leq z_0$, плавающей части на поверхности $z = z_0$ и прилегающей к стенкам сосуда части $z_0 \leq z \leq R$. Такое решение реализуется, если коэффициент заполнения $\kappa = 3V/(4\pi R^3)$ удовлетворяет неравенству $\kappa \geq \kappa_1 = 0.956$ (о коэффициенте заполнения см. главу V). При $\kappa < \kappa_1$ пленка будет натянута, причем величина $F > 0$, и она определяется в ходе решения задачи.

Задача (2.1)–(2.5) была решена численно [3]. На рис. 6.3 представлены формы пленки для различных значений коэффициента заполнения κ . Координаты r, z отнесены к радиусу R .

На рис. 6.4 приводится зависимость безразмерной силы натяжения $f = F/(\pi \gamma R^3)$ от коэффициента κ . Функция $f(\kappa)$ достигает максимума, равного $f \approx 0.022$, при $\kappa \approx 0.3$. Таким образом, наибольшее натяжение пленки имеет место при тридцатипроцентном заполнении объема сосуда жидкостью.

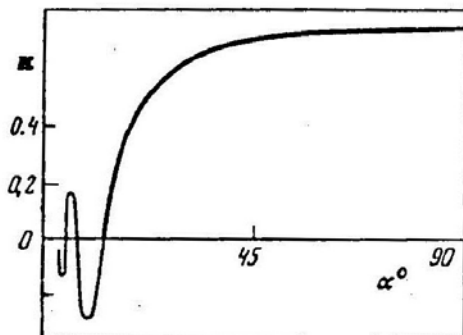
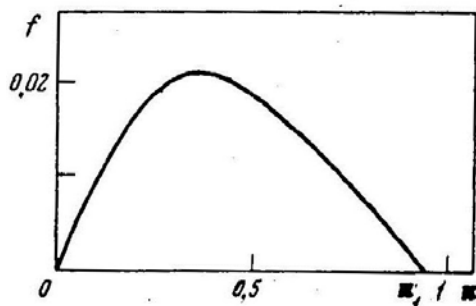


Рис. 6.4. Значения безразмерной силы натяжения в одноосной зоне (на рис. 6.3 соответствующие формы показаны для разных κ) в зависимости от коэффициента заполнения.

Рис. 6.5. Связь коэффициента заполнения полусферической пленки и угла раствора сферического сегмента.

Далее, следуя работам [3,5], рассмотрим поведение пленки, которая в недеформированном состоянии является полусферой. Она закреплена по окружности основания, лежащего в плоскости, перпендикулярной к оси z , и не касается стенок сосуда. Сила тяжести действует против направления оси z . Над пленкой находится жидкость, под пленкой — газ.

Форма пленки в двухосной области ($T_1 \neq 0, T_2 \neq 0$) представляет собой сферический сегмент заданного радиуса. В одноосной области ($T_2 = 0$) форма определяется из решения поставленной задачи.

В результате численного решения в работе [3] найдено, что возможны неединственные положения равновесия. Это видно на рис. 6.5 по построенной зависимости коэффициента $\kappa = 3V/(4\pi R^3)$ от угла α° раствора сферического сегмента, составляющего двухосную область. Можно видеть также, что при $|\kappa| > \kappa_1 \approx 0.18$ каждому значению объема жидкости соответствует единственная форма равновесия. С уменьшением κ число форм равновесия увеличивается.

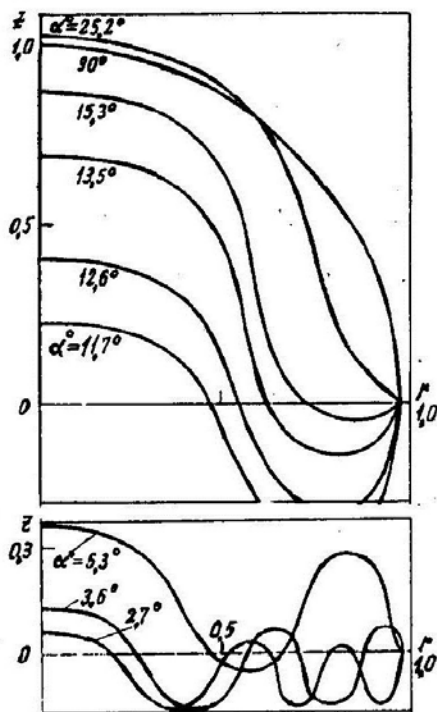


Рис. 6.6. Формы равновесия полусферической пленки и углы раствора двухосного сферического сегмента (координаты z и r отнесены к радиусу сферы R).

На рис. 6.6 показаны образующие поверхностей равновесия и соответствующие им значения угла α° . По величине потенциальной энергии, соответствующей разным значениям α° , можно судить, что наиболее устойчивыми среди осесимметричных форм равновесия являются те, у которых значение α° максимально. Наибольшее усилие натяжения возникает в вершине сферического сегмента.

Когда жидкость находится под пленкой, искомая поверхность равновесия состоит из двухосной области в виде сферического пояса и из ненапряженной области, которая является кругом в горизонтальной плоскости. Наибольшие усилия возникают в этом случае в контуре пленки.

§ 3. РАВНОВЕСИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ

Нерастяжимая пленка в недеформированном состоянии представляет собой круговую цилиндрическую оболочку радиусом R и высотой $\tilde{L}$. Кромки ее закреплены в горизонтальных плоскостях $z = 0$ и $z = -L$. Принимается, что $L < \tilde{L}$. Ось симметрии z противоположна направлению силы тяжести. Положение пленки определяется функцией $r(z)$. Все длины отнесены к радиусу R .

Внутри цилиндрической пленки находится жидкость, а с внешней стороны — газ. Предполагается, что пленка при ее деформировании не имеет общих точек с осью цилиндра и не касается стенок сосуда. В такой постановке задача рассмотрена в работе [4]. Изложим результаты, следуя [4, 5].

Как и в случае полусферической пленки, рассмотренной в предыдущем параграфе, равновесная форма цилиндрической пленки может состоять из двухосной и одноосной зон. Первая из них соответствует цилиндрической форме равновесия. В одноосной зоне ($T_2 = 0$) равновесие пленки определяется из решения нелинейной задачи для уравнений типа (6.1) с привлечением условий закрепления, гладкости, нерастяжимости пленки, несжимаемости жидкости.

В результате численного решения задачи были найдены четыре типа равновесия пленки. Их реализация определяется параметрами $\tilde{L}$, L и V , где V — объем жидкости.

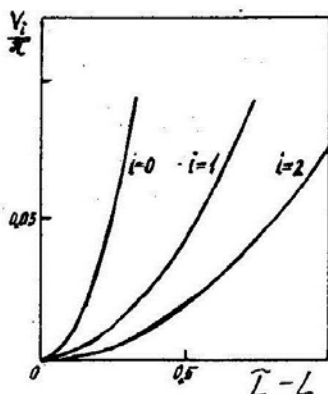


Рис. 6.7. Критические объемы жидкости, определяющие тип равновесия мембраны.

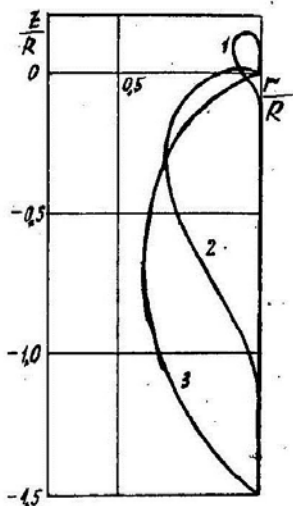


Рис. 6.8. Формы равновесия мембраны, соответствующие разным объемам жидкости.

Для каждого значения $\tilde{L}$ и L существует пять критических объемов жидкости, которые обозначаются далее через V_0 , V_1 , V_2 , V_3 , V_4 . Тип равновесия пленки, соответствующий этим объемам, определяется следующим образом. При $V_3 < V < V_4$ вся пленка находится в одноосном состоянии. Случаю $V_2 < V < V_3$ соответствует равновесие с одной одноосной и одной двухосной областями. При $V_1 < V < V_2$ в пленке имеются две двухосные и одна одноосная области. При $V_0 < V < V_1$ имеются две двухосные и две одноосные области.

Объемы жидкости V_3 и V_4 зависят от $\tilde{L}$ и L сложным образом, а V_0 , V_1 , V_2 определяются только разностью длин $\tilde{L} - L$. На рис. 6.7 даны эти функции V_i/π ($i=0,1,2$) в зависимости от параметра $\tilde{L} - L$.

На рис. 6.8 показаны первые три типа формы равновесия пленки. Кривые 1, 2, 3 соответствуют равновесным формам пленки при объеме жидкости из интервалов (V_1, V_2) , (V_2, V_3) , (V_3, V_4) . Для всех вариантов принято $L = 1.5$, $\tilde{L} = 1.8$.

Формы равновесия четвертого типа ($V_0 < V < V_1$), которые здесь не приводятся, содержат около верхней кромки еще одну одноосную область. При $V = V_0$ образующие двух одноосных областей касаются друг друга в точке. При $V < V_0$ участок этого касания расширяется.

§ 4. КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ МЕМБРАНЫ

В заключение главы рассмотрим деформацию круглой мембраны, сопровождаемую значительными перемещениями и формоизменением. Примем, что материал ее является несжимаемым, деформация описывается упругим потенциалом в форме Муни [1]. Растяжение мембраны происходит за счет изменения ее толщины. Случаи значительных изменений формы мембраны встречаются, например, в разного рода чувствительных элементах гидросистем, вытеснительных устройствах и т.д.

Круглая мембрана из резиноподобного материала закреплена по контуру радиусом R , снизу на нее действует давление газа p_0 , сверху — гидростатическое давление жидкости, так что перепад давления (положительное направление оси z — вниз)

$$p_* = p_0 + \gamma z - p_0 \quad (4.1)$$

В дальнейшем начало системы координат z, r совместим с центром деформированной мембраны.

Следуя работе [2], приведем решение задачи для случая, когда степени удлинений λ_r и λ_θ в радиальном и окружном направлениях выражаются через деформации $\epsilon_r, \epsilon_\theta$ линейной зависимостью

$$\lambda_r = 1 + \epsilon_r, \quad \lambda_\theta = 1 + \epsilon_\theta$$

Для несжимаемого материала $\lambda_n = (\lambda_r \lambda_\theta)^{-1} = h/h_0$, где h_0, h — толщины мембраны в недеформированном и деформированном состояниях. При этом можно принять

$$\sigma_r = 8(C_1 + C_2) \left(\epsilon_r + \frac{1}{2} \epsilon_\theta \right), \quad \sigma_\theta = 8(C_1 + C_2) \left(\epsilon_\theta + \frac{1}{2} \epsilon_r \right)$$

Усилия в радиальном и окружном направлениях выражаются следующим образом

$$T_r = \sigma_r h, \quad T_\theta = \sigma_\theta h$$

Физические постоянные материала C_1 и C_2 связаны с модулем упругости E зависимостью $E = 6(C_1 + C_2)$. Обозначим $C_2/C_1 = \Gamma$ и введем функции ψ и w по формулам

$$r\sigma_r = -\frac{3}{2}(1+\Gamma)\psi, \quad z = w + \frac{p_0 - p_\infty}{\gamma} \quad (4.2)$$

Тогда уравнения равновесия мембраны принимают вид [2]

$$\begin{aligned} r \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r}\psi &= 2C_1 \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \\ \frac{d\psi}{dr} \frac{dw}{dr} + \psi \frac{d^2w}{dr^2} &= -\frac{2}{3} \frac{\gamma}{1+\Gamma} r. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В центре деформированной мембраны

$$w = -(p_0 - p_\infty)/\gamma, \quad \psi = 0 \quad (r = 0) \quad (4.4)$$

Кроме того, из условия осевой симметрии $dw/dr = 0$ ($r = 0$). На закрепленном крае $\varepsilon_\theta = 0$, или

$$\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{2r}\psi = 0 \quad (r = R) \quad (4.5)$$

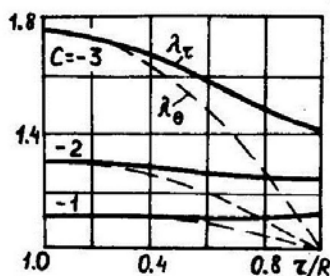
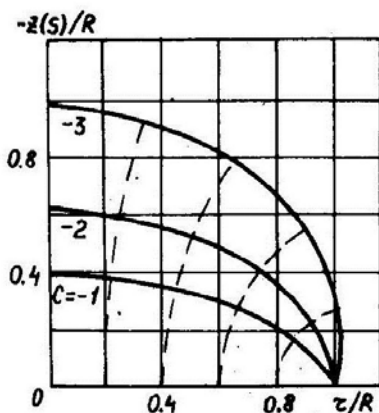


Рис. 6.9. Формы равновесия растянутой круглой мембраны при различных перепадах давления газа и жидкости.

Рис. 6.10. Главные степени удлинений при различных перепадах давления газа и жидкости.

Не вдаваясь в подробности решения нелинейной задачи (4.3) – (4.5), отметим лишь, что по заданному напряжению можно определить перемещение фиксированных точек мембраны, а затем и значение объема ΔV вытесненной жидкости. Задача решалась как с помощью аналитического метода (в рядах по степеням r/R), так и конечно-разностного метода [2].

На рис. 6.9 изображены меридиональные сечения деформированной мембраны при различных значениях параметров нагрузки

$$C = (p_0 - p_e)R / (2C_1 h_0), \quad D = -\tau R^2 / (2C_1 h_0)$$

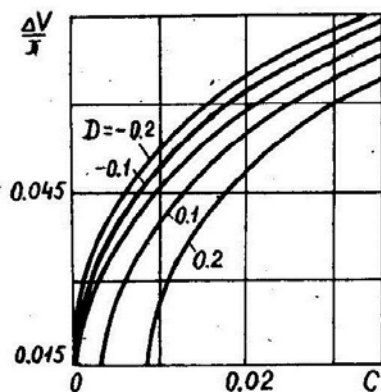


Рис. 6.11. Зависимость объема вытесненной жидкости от определяющих параметров.

Было принято $\Gamma = 0.1$, $D = 1$. Штриховые линии соответствуют траекториям перехода фиксированных точек недеформированной мембраны в точки деформированной поверхности. Зависимости главных степеней удлинений λ_r , λ_θ от расстояния r/R при некоторых параметрах гидростатической нагрузки приведены на рис. 6.10. Видно, что в окрестности центра растянутой мембраны имеется область, где степени удлинений λ_r , λ_θ равны между собой.

Объем вытесненной мембраной жидкости характеризуется параметром $\Delta V/\pi$. Этот объем как функция параметра C изображен на рис. 6.11 для различных интенсивностей гравитационного поля. Отметим, что параметр $\Delta V/\pi$ равен $\Delta V' / (\pi R^3)$, где $\Delta V'$ соответствующий размерный объем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Книга представляет собой попытку собрать характерные статические задачи гидроупругости и изложить их с единых позиций. Замечательно то, что механическое поведение объектов, отличающихся своим устройством и размерами (иногда на несколько порядков), часто описываются близкими моделями. Для определения поведения клеточных мембран (см., например, книгу E.A. Evans, R. Skalak. *Mechanics and Thermodynamics of Biomembranes*, RCR Press, Inc., 1980) применяются те же уравнения равновесия мягкой оболочки и заключенной в ней среды, что и для огромных аэростатических объектов (дирижабли, аэростаты) и воздухоопорных строительных конструкций.

Далеко не все относящиеся к предмету книги задачи приведены в ней. Во-первых, можно добавить материал к каждой из шести глав. Это, в частности, относится к учету трехмерности задач и нелинейных эффектов. Во-вторых, не все классы статических задач гидроупругости затронуты.

В качестве примера к последнему утверждению можно привести вопросы взаимодействия при появлении пластических деформаций в твердом теле и при переходе жидкости из жидкой фазы в твердую. Это широко известные явления в природе и технике. Замерзание воды в трубопроводе приводит к его раздачу, пластической деформации. В вертикально стоящей металлической бочке — к раздаче цилиндрической стенки и весьма заметному выпучиванию дна. Все это зависит еще от уровня воды.

В этих и других примерах, число которых велико, постановка задачи гидроупругости меняется. Преобладающими могут быть не гидростатические силы в жидкости, а объемное расширение (удельный объем воды при 4°C равен $1\text{ см}^3/\text{г}$, льда при 0°C — $1.09\text{ см}^3/\text{г}$). При изменении фазового состояния меняются условия на контактной поверхности. Требуются не только условия равенства нормальных

составляющих перемещений и сил (как всюду в данной книге), но и их касательных составляющих.

При более расширительном толковании предмета гидроупругости к нему относятся также некоторые технологические приемы пластического формообразования тонкостенных деталей с применением не только жидкостей, но и сыпучих сред. Например, для гибочных операций трубки некоторых измерительных приборов сначала в полость прямой трубки впрессовывается кристаллическая соль. При дальнейшей глубокой гибке трубки на матрице это обеспечивает сохранение круглой формы ее поперечного сечения (без такого заполнителя оно сильно сплющивается). При математической формулировке этой задачи необходимо привлекать уравнения равновесия сыпучей среды. Условия на контактной поверхности должны учитывать возможность некоторого взаимного скольжения сред в зависимости от развиваемого давления на этой поверхности.

Отметим, что многие из такого рода задач еще не поставлены и не нашли своего решения. Они могут быть предметом самостоятельных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К введению

1. Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L. Aeroelasticity. Cambridge (Mass.). 1955. 860 p. (Рус. пер.: Висплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфман Р.Л. Аэроупругость. М.: ИЛ. 1958. 860 с.)
2. Fung Y.C.B. An Introduction to the Theory of Aeroelasticity. New York. Wiley. 1955. 490 p. (Рус. пер.: Фун Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз. 1959. 450 с.)
3. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. М.: Наука, Физматлит. 1991. 200 с.

К главе I

1. Bernitsas M.M., Kokkinis T. Buckling of risers in tension due to internal pressure: nonmovable boundaries // J. Energy Resources Technology. 1983. Vol.105. N 3. P.277-281.
2. Bernitsas M.M., Kokkinis T. Buckling of columns with movable boundaries // J. Structural Mechanics. 1983. Vol.11. N 3. P.351-370.
3. Bernitsas M.M., Kokkinis T. Buckling of columns with nonmovable boundaries // J. Structural Engineering. 1983. Vol.105. P.2113-2128.
4. Bernitsas M.M., Kokkinis T. Global static instability of risers // J. Ship Research. 1984. Vol.28. N 4. P.261-271.
5. Bernitsas M.M., Kokkinis T. Asymptotic behavior of heavy column and riser stability boundaries // J. Applied Mechanics. 1984. Vol.51. N 2. P.1-6.
6. Biezeno C.B., Koch J.J. Note on the buckling of a vertically submerged tube. // Appl. Sci. Res. Sec. A. 1948. 1(2). P.131-138.
7. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой

устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 340 с.

8. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Физматгиз, 1973. 400 с.

9. Goodman T.R., Breslin J.S. Statics and dynamics of anchoring cables in wakes //J. Hydronautics. 1976. Vol.10. N 4. P.113-120.

10. Handelman G.H. Buckling under locally hydrostatic pressure //J. Applied Mechanics. 1946. Vol.13. P.198-200.

11. Huang T., Dareing D.W. Buckling and frequency of long vertical pipes //J. Engineering Mechanics Division. 1967. Vol.95. P.167-181.

12. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.

13. Ишлинский А.Ю. Исследование устойчивости упругих систем с точки зрения математической теории упругости // Украинский математический журнал. 1954. Т.6. N 2. С.140-146.

14. Kerr A.D., Tang S. The effect of lateral hydrostatic pressure on the instability of elastic solids, particularly beams and plates //J. Applied Mechanics. 1966. Vol.33. P.617-622.

15. Link H. Über den geraden Druckstab in Flüssigkeit //Ingenieur-Archiv. 1962. B.31. S.149-167.

16. Lubinski A. A study of the buckling of rotary drilling strings. Drilling and Production Practice //API. New York. 1950. P.178-214.

17. Peterson J.P. Axially loaded column subjected to lateral pressure //AIAA J. 1963. Vol.1. N 6. P.1458-1459.

18. Pflüger A. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin. Springer-Verlag. 1950. 217 s.

19. Sugiyama Y., Ashida K. Buckling of long columns under their own weight //Trans. Japan Soc. Mech. Eng. 1978. 21(158). P.1228-1235.

20. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.

21. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1946. 400 с.

22. Ясинский Ф.С. Избранные труды по устойчивости балок. М.: Физматгиз, 1962. 200 с.

К главе II

1. Динник А.Н. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости // Часть I. Изв. Донского политехнического института. Т. II. 1913. 156 с.

2. Динник А.Н. Избранные труды. Т. II. Киев: Изд. АН Украинской ССР. 1955. 223 с.

3. Ильгамов М.А. Об устойчивости пологой панели под слоем жидкости // Труды семинара по теории оболочек / Казанск. физ.-техн. ин-т. 1973. N 3. С. 241-255.

4. Лаврентьев М.А., Шабат В.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 280 с.

5. Kerr A.D. On plates sealing an incompressible liquid. // Int. J. Mech. Sci. 1966. Vol. 8. P. 295-304.

6. Kerr A.D., Coffin D.W. On membrane and plate problems for which the linear theories are not admissible // J. Appl. Mech. 1990, Vol. 57. N 1. P. 128-133.

7. Otto F., Trostel R. Zugbeanspruchte Konstruktionen. Ullstein Fachverlag. Frankfurt/Berlin. 1962 (Русск пер. Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. М.: Стройиздат. 1967. 320 с.)

8. Wang C.Y. Nonlinear deflection of a thin elastic sheet on a liquid foundation // Quarterly of Appl. Math. 1984. Vol. 41. P. 433-442.

К главе III

1. Динник А.И. Избранные труды, Том II. Киев, Изд. АН Украинской ССР, 1955, 223 с.

2. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Физматгиз, 1973. 400 с.

3. Hertz H. Über das Gleichgewicht Schwimmender Elastischer Platten /Wiedemann's Ann. 1884. B. 22. S.35-45.
4. Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость пластины, закрывающей полость с жидкостью //Труды семинара по теории оболочек /Казанск. физ.-техн. ин-т. 1973. N 3. С.232-240.
5. Ильгамов М.А., Сахабутдинов Ж.М. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности. Избранные проблемы прикладной механики. М.: Наука, 1974. С.341-346.
6. Kerr A.D. On the instability of circular plates //J. Aerospace Sci. 1962. Vol.29. P.486-487.
7. Kerr A.D. Bending of circular plates sealing an incompressible liquid //J. Appl. Mech. 1965. Vol.32. P.704-707.
8. Kerr A.D. On plates sealing an incompressible liquid //Int. J. Mech. Sci. 1966. Vol.8. P.295-304.
9. Коренев В.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М.: Физматлит, 1960. 459 с.
10. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем М.: Гостехтеориздат, 1955. 280 с.

К главе IV

1. Elgindi M.B.M., Yen D.H.Y., Wang C.Y. Deformation of a thinwalled cylindrical tube submerged in a liquid //Quarterly J. Mechanics and Applied Mathematics. 1992. Vol.45. P.250-268.
2. Ильгамов М.А. Об устойчивости цилиндрической панели, нагруженной давлением жидкости //Труды семинара по теории оболочек /Казанск. физ.-техн. ин-т. 1973. N 3. С.220-230.
3. Ильгамов М.А. Об устойчивости пологой панели под слоем жидкости //Труды семинара по теории оболочек /Казанск. физ.-техн. ин-т. 1973. N3. С.241-255.
4. Корнишин М.С., Исанбаева Ф.С. Гибкие пластины и панели. М.: Наука, 1968. 260 с.
5. Корнишин М.С., Муштары Х.М. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального рав-

номерного давления //Изв. Казанского филиала АН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук. 1955. N 7. С.36-50.

6. Муштари Х.М. Нелинейная теория оболочек. М.: Наука, 1990. 223 с.

7. Van Den Broek J.A. Elastic Energy Theory. London, John Wiley and Sons. 1950. 298 p.

8. Wang C.Y. Nonlinear deflection of a thin elastic sheet on a liquid foundation //Quarterly J. Applied Mathematics. 1984. Vol.41. P.433-442.

9. Wang C.Y. Load capacities of floating elastic sheets of finite width //Quarterly J. Mechanics and Applied Mathematics. 1985. Vol.38. P.257-266.

10. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 450 с.

К главе V

1. Алексеев С.А. Расчет подушечных емкостей. Статика и динамика гибких систем. М.: Наука, 1987. С.34-43.

2. Друзь И.В., Друзь Б.И. Подъем груза всплывающей сферической мягкой емкостью //Симпозиум "Проектирование и эксплуатация конструкций из мягких оболочек". Владивосток. 1990. С.53-64.

3. Голод Б.И., Кошевой А.А. Эластичные емкости для транспортировки и хранения жидких грузов. Л.: Судпромгиз, 1963. 91 с.

4. Ермолов В.В. и др. Пневматические конструкции воздухоопорного типа. М.: Стройиздат, 1973. 288 с.

5. Хуберян К.М. Рациональные формы трубопроводов, резервуаров и напорных перекрытий. М.: Госстройиздат, 1956. 254 с.

6. Кноринг С.Д. Павлинова Е.А., Филиппов В.В. Плавающие эластичные емкости для транспортировки нефтепродуктов. Л.: Судостроение, 1965. 224 с.

7. Магула В.Э. Судовые эластичные конструкции. Л.: Судостроение, 1978. 263 с.

8. Магула В.Э., Друзь Б.И., Кулагин В.Д. Судовые мягкие

емкости. Л.: Судостроение, 1966. 287 с.

9. Otto F., Trostel R. Zugbeanspruchte Konstruktionen. Ullstein Fachverlag. Frankfurt/Berlin. 1962 (Русск пер. Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. М.: Стройиздат. 1967. 320 с.)

10. Усюкин В.И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. N 1. С.70-75.

К главе VI

1. Green A.E., Zerna W. Theoretical Elasticity. Oxford. Clarendon Press. 1954. 457 p.

2. Луковский И.А., Троценко В.А., Усюкин В.И. Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях. Киев: Наукова думка, 1989. 240 с.

3. Кузьмина Р.П. Осесимметричная задача равновесия полусферической пленки под гидростатическим давлением // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. N 1. С.125-131.

4. Кузьмина Р.П. Осесимметричная задача равновесия цилиндрической пленки под гидростатическим давлением // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. N 4. С.183-188.

5. Кузьмина Р.П., Петров В.М., Черноусько Ф.Л. Задачи механики гибких пленок, содержащих жидкие массы. Успехи механики деформируемых сред, М.: Наука, 1975. С.324-339.

6. Петров В.М., Черноусько Ф.Л. О равновесии жидкости, ограниченной гибкой пленкой // Изв. АН СССР. МТТ, 1971. N 4. С.131-142.

STATIC PROBLEMS OF HYDROELASTICITY

M.A. Ilgamov

Institute of Mechanics and Engineering

The Russian Academy of Sciences

2/31, Lobachevsky Str.

420111 Kazan, Russia

CONTENTS

PREFACE

INTRODUCTION

CHAPTER I. EQUILIBRIUM OF THIN ROD AND PIPE IN LIQUID

- § 1. Equilibrium of vertical rod in liquid
- § 2. Stability of vertical position of rod in liquid
- § 3. Some general features of problem of stability of vertical rod in liquid
- § 4. Two special cases of load
- § 5. Stability of rod under various fastening conditions. Mine shaft
- § 6. Stability of vertical pipe with liquid. Buckling of tensioned pipe
- § 7. Stability of drilling and producing oil column
- § 8. Stability of pipes fastened on movable supports

CHAPTER II. EQUILIBRIUM OF MEMBRANE CONTACTING WITH LIQUID

- § 1. Linear problem of equilibrium of membrane under liquid weight

- § 2. Nonlinear problem of equilibrium of membrane under liquid layer
- § 3. The circular membrane under hydrostatic load
- § 4. Interaction of membrane with incompressible liquid in closed vessel
- § 5. Stability of membrane between liquids of different density
- § 6. Determination of membrane deflection in stability problem
- § 7. Nonlinear deflection of membrane under concentrated action

CHAPTER III. EQUILIBRIUM OF PLATE CONTACTING WITH LIQUID

- § 1. Bending of light beam resting on water surface
- § 2. Bending of circular plate under liquid weight
- § 3. Bending of circular plate covering cavity with liquid
- § 4. Hertz's problem of floating plate
- § 5. Bending of circular plate under concentrated load
- § 6. Circular plate under action of noncentral concentrated load
- § 7. Cylindrical bending of vertical plate contacting with liquid of limited volume
- § 8. Stability of vertical plate in liquid
- § 9. Influence of medium compressibility on plate bending
- § 10. Influence of medium compressibility on plate stability

CHAPTER IV. SOME EXAMPLES OF NONLINEAR PROBLEMS

- § 1. Flexible plate on liquid surface under load distributed along line
- § 2. Cylindrical panel under action of load distributed along line
- § 3. Cylindrical shell in liquid under load distributed along line

- § 4. Stability of shallow panel under liquid layer
- § 5. Stability of cylindrical panel loaded by pressure of compressible fluid
- § 6. Appendix. Rigid cylindrical shell being in liquid or containing liquid

CHAPTER V. EQUILIBRIUM OF MEMBRANE SHELLS CONTACTING WITH LIQUID. CAPACITIES

- § 1. Long cylindrical shell containing liquid
- § 2. Volume of liquid in rectangular cushion-shaped capacity
- § 3. Equilibrium of cylindrical shell under total hydrostatic pressure
- § 4. Analysis of partitions separating compartments with liquid
- § 5. Freely lying capacities
- § 6. Instertable vessel capacities
- § 7. Soft floating capacities
- § 8. Capacities for load lifting

CHAPTER VI. EQUILIBRIUM OF FILMS CONTACTING WITH LIQUID. DISPLACING DEVICES

- § 1. Plane problem of film equilibrium
- § 2. Equilibrium of spherical and semispherical film
- § 3. Equilibrium of cylindrical film
- § 4. Finite strains of membrane

CONCLUSION

REFERENCES



Ильгамов Марат Аксанович

Институт механики и машиностроения КНЦ РАН,
420111, г.Казань, ул. Лобачевского, 2/31.

Области научных интересов: аэроупругость, гидроупругость оболочек, динамика и статика конструкций и рабочих сред.

Монографии:

М.А.Ильгамов. Колебания оболочек, содержащих жидкость и газ
М.: Наука, 1969. 180 с.

М.А.Ильгамов, В.А.Иванов, Б.В.Гулин. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М.: Наука
1977. 332 с.

М.А.Ильгамов, В.А.Иванов, Б.В.Гулин. Расчет оболочек с упругим наполнителем: М.: Наука, 1987. 264 с.

E.N.Dowell, M.A.Ilgamov. Studies in Nonlinear Aeroelasticity. New York - Berlin - London - Paris - Tokyo: Springer - Verlag, 1988. 456 p.

М.А.Ильгамов. Введение в нелинейную гидроупругость. М
Наука, Физматлит, 1991. 200 с.

М.А.Ильгамов. Статические задачи гидроупругости. Казань
ИММ РАН, 1994. 208 с.

Подписано к печати 17.06.94 г. Объем 13 п.л.

Тираж 1000 экз. Заказ N C-167

Полиграфический комбинат им. К.Якуба, Казань, ул.Ваумана, 19